# درسنامه ۳: رتبه‌ی ماتریس

در این بخش می‌خواهیم با مفهوم رتبه‌ی ماتریس آشنا شده و روش محاسبه‌ی آن را شرح دهیم. پیش از آن لازم است با مفهوم استقلال و وابستگی خطی آشنا شوید. در این قسمت از درس، ماتریس‌های سطری یا ستونی را گاهی اوقات بردار می‌نامیم.

## استقلال و وابستگی خطی

ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\3&5&10\\7&11&22\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. سطرهای آن را می‌توانیم به صورت $A_1=[1\quad 1\quad 2]$، $A_2=[3\quad 5\quad 10]$ و $A_3=[7\quad 11\quad 22]$ نامگذاری کنیم. آیا می‌توانید رابطه‌ای که بین سطرهای ماتریس وجود دارد را پیدا کنید؟ با کمی دقت متوجه می‌شوید که اگر سطر دوم را دو برابر کرده و با سطر اول جمع کنیم، سطر سوم به دست می‌آید. به عبارتی $A_3=2A_2+A_1$ است. اگر رابطه‌ای بین سطرهای ماتریس وجود داشته باشد، مانند مثال بالا، که توانستیم سطر سوم را با استفاده از سطرهای اول و دوم تولید کنیم، در این حالت می‌گویند سطرهای ماتریس $A$ به یکدیگر **وابسته‌ی خطی‌اند.**

در یک نمونه‌ی دیگر به ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0\\5&7\end{bmatrix}$ دقت کنید، داریم $A_1=[1\quad 0]$ و $A_2=[5\quad 7]$. اما این بار $A_1$ و $A_2$ هیچ رابطه‌ای با هم ندارند. در واقع $A_2$ مضرب $A_1$ نیست. مثلاً اگر $A_1$ را در ۵ ضرب کنید، $A_2$ تولید نمی‌شود: $5A_1=5[1\quad 0]=[5\quad 0]\neq A_2$

در این حالت می‌گویند سطرهای ماتریس $A$ **مستقل خطی** هستند. در ریاضیات، برای اطمینان از مستقل خطی بودنِ $A_1$ و $A_2$ ابتدا فرض می‌کنند $c_1A_1+c_2A_2=\bar{0}$ شده باشد. اگر از این معادله بتوانیم نتیجه بگیریم که $c_1=c_2=0$ است، نشان داده‌ایم که $A_1$ و $A_2$ مستقل خطی هستند. مثلاً در این مثال از تساوی $c_1A_1+c_2A_2=\bar{0}$ خواهیم داشت: $c_1[1\quad 0]+c_2[5\quad 7]=[0\quad 0]\Rightarrow[c_1+5c_2\quad 7c_2]=[0\quad 0]\Rightarrow c_1+5c_2=0\quad,\quad 7c_2=0$
پس باید $c_2=0$ و $c_1=0$ باشد. یعنی $A_1$ و $A_2$ مستقل خطی هستند.

**چند نمونه‌ی دیگر:**

به سطرهای ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&10&15\end{bmatrix}$ توجه کنید. داریم $A_1=[1\quad 2\quad 3]$ و $A_2=[5\quad 10\quad 15]$، با کمی دقت می‌بینیم که $A_2$، مضرب $A_1$ است. به عبارتی $A_2=5A_1$ است. این نشان می‌دهد که $A_1$ و $A_2$ وابسته‌ی خطی هستند.

اکنون به سطرهای ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&5\\3&0&1\end{bmatrix}$ توجه کنید. داریم $A_1=[1\quad 2\quad 5]$ و $A_2=[3\quad 0\quad 1]$. آیا $A_2$ مضربی از $A_1$ است؟ می‌بینید که چنین رابطه‌ای بین آن‌ها وجود ندارد. اگر سعی کنیم اعداد $c_1$ و $c_2$ را پیدا کنیم طوری که $c_1A_1+c_2A_2=\bar{0}$ باشد، می‌بینیم که تنها حالت ممکن $c_1=c_2=0$ است:
$$c_1[1\quad 2\quad 5]+c_2[3\quad 0\quad 1]=[0\quad 0\quad 0]\Rightarrow[c_1+3c_2\quad 2c_1\quad 5c_1+c_2]=[0\quad 0\quad 0]$$
در این صورت باید $2c_1=0$ و $c_1+3c_2=0$ باشد. یعنی تنها حالت ممکن آن است که $c_2=c_1=0$ باشد. این نشان می‌دهد که $A_1$ و $A_2$ مستقل خطی هستند.

**نتیجه:** در مورد هر نوع ماتریس با هر مرتبه و هر تعداد سطر، وقتی دو سطر از ماتریس، مضرب هم نباشند، حتماً نسبت به هم مستقل خطی هستند.

در آخرین نمونه، به سطرهای ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&5\\5&7&10\end{bmatrix}$ توجه کنیم. داریم $A_1=[1\quad 1\quad 0]$، $A_2=[2\quad 3\quad 5]$ و $A_3=[5\quad 7\quad 10]$. با کمی دقت به درایه‌ها متوجه می‌شویم که سطر سوم از مجموع سطر اول با دو برابر سطر دوم به دست می‌آید. یعنی $A_3=A_1+2A_2$. بنابراین، این سطرها وابسته‌ی خطی هستند.

**نتیجه:** سطرهای ماتریس $A$ وابسته‌ی خطی‌اند اگر بتوانیم یکی از آن‌ها را به صورت ترکیب خطی سایر سطرها بنویسیم. مثلاً سطرهای ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&-4&2\\1&-2&7\end{bmatrix}$ مستقل خطی نیستند، زیرا می‌توانیم سطر سوم را به صورت مجموع سطرهای اول و دوم بنویسیم: $A_3=A_1+A_2$. سطرهای این ماتریس، وابسته‌ی خطی هستند.

اکنون آماده هستیم که تعریف استقلال خطی و وابستگی خطی را به شکل کلی‌تر بیان کنیم:

❖ تعریف: اگر بتوانیم یک ترکیب خطی پیدا کنیم که در آن $c_1A_1+\cdots+c_mA_m=\bar{0}$ باشد اما همه‌ی ضرایب $c_i$ صفر نباشند، می‌گوییم $A_1$، $A_2$، ... و $A_m$ وابسته‌ی خطی هستند. اما اگر تنها حالتی که به صفر می‌رسد همان حالتِ $c_1=\cdots=c_m=0$ باشد، می‌گوییم $A_1$، $A_2$، ... و $A_m$ مستقل خطی هستند.

تا اینجا با مفهوم استقلال و وابستگی خطی آشنا شدیم. اما به یک ابزار قوی‌تر برای تشخیص آن‌ها احتیاج داریم. این ابزار همان دترمینان ماتریس‌های مربع است.

**قضیه:** اگر $\det A=0$ باشد، نشان می‌دهد که سطرهای ماتریس $A$ نسبت به هم وابسته‌ی خطی‌اند. به همین ترتیب اگر $\det A\neq 0$ باشد، ثابت می‌شود سطرهای $A$ نسبت به هم مستقل خطی‌اند.

**مثال۱: اگر سطرهای $A_1=[1\ \ 1\ \ 2], A_2=[a\ \ 2\ \ 1], A_3=[2\ \ 3\ \ 4]$ از ماتریس $A_{3\times3}$ وابسته خطی باشند، آن‌گاه a کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

**پاسخ :** گزینه «۳» اگر سطرهای ماتریس A وابسته‌ی خطی باشند باید دترمینان A صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (8+3+4a)-(6a+2+8)=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

**مثال۲: به ازای کدام مقدار m بردارهای (2,m,1) و (−1,3,2) و (1,4,3) وابسته خطی‌اند؟**

۱) ‎-۲ ۲) ‎-۱ ۳) ۱ ۴) ۲

**پاسخ:** گزینه «۳» شرط آن که سه بردار وابستگی خطی داشته باشند آن است که دترمینان مربوط به این سه بردار مساوی صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2(9-8)-m(-3-2)+1\times(-4-3)=0 \Rightarrow 2+5m-7=0 \Rightarrow 5m=5 \Rightarrow m=1$$

## رتبه ماتریس

ابتدا توجه کنید که **رتبه‌ی** ماتریس و **مرتبه‌ی** ماتریس را با هم اشتباه نگیرید! همان‌طور که قبلاً گفتیم؛ هر ماتریس با m سطر و n ستون را از مرتبه‌ی $m\times n$ می‌نامیم. مثلاً ماتریس مربعِ $A_{n\times n}$ را یک ماتریس مرتبه‌ی n می‌گوییم. اما رتبه‌ی ماتریس یک بحث مفهومی‌تر است. ابتدا مفهوم رتبه‌ی ماتریس را شرح می‌دهیم و در ادامه، راه‌های مختلف برای تعیین رتبه را خواهیم گفت. برای ورود به بحث به نمونه‌های زیر توجه کنید:

**نمونه‌ی یک:**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 6 & 10 \\ 3 & -6 & 9 & 15 \\ -2 & 4 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

به رابطه‌ی بین سطرهای ماتریس A دقت کنید. متوجه می‌شوید که سطرهای دوم، سوم و چهارم هر کدام مضربی از سطر اول هستند. به عبارتی داریم:

$$A_2=2A_1\ ,\ A_3=3A_1\ ,\ A_4=-2A_1$$

پس نتیجه می‌شود که در ماتریس A فقط یک سطرِ مستقل خطی وجود دارد و بقیه‌ی سطرها همگی وابسته خطی به سطر اول هستند. در چنین حالتی می‌گوئیم ماتریس A رتبه‌ی یک دارد. در واقع **رتبه‌ی یک ماتریس، تعداد سطرهای مستقل خطی آن را نشان می‌دهد**. رتبه‌ی A را به صورت $\text{rank}(A)=1$ یا به شکل خلاصه شده‌ی $r(A)=1$ بیان می‌کنیم.

**نمونه‌ی دو:** ماتریس مقابل را در نظر بگیرید.

$$B=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

آیا بین سطرهای اول و دوم B رابطه‌ای وجود دارد؟ منظور آن است که آیا سطر دوم و اول مضرب یکدیگر هستند؟ واضح است که چنین نیست. سطرهای $B_1$ و $B_2$ هیچ‌کدام مضرب یکدیگر نیستند. بنابراین تا اینجا متوجه شدیم که ماتریس B حداقل دو سطر مستقل خطی دارد. حالا به سطر سوم توجه کنید. آیا بین این سطر با سطرهای قبلی، رابطه‌ای وجود دارد؟ با کمی دقت معلوم می‌شود که سطر سوم، مجموعِ سطرهای اول و دوم است. بنابراین سطر سوم یک سطر مستقل نیست، بلکه وابسته به سطرهای بالاتر از خود است. به نظر شما رتبه‌ی ماتریس B چند خواهد بود؟ بررسی‌ها نشان داد که ماتریس B دارای ۲ سطر مستقل خطی و یک سطر وابسته به آن‌ها است. بنابراین رتبه‌ی B برابر با ۲ است: $\text{rank}(B)=2$

**نمونه‌ی سه:** در اینجا سه ماتریس A، B و C را داریم که مرتبه‌ی همه‌ی آن‌ها سه است. می‌خواهیم رتبه‌ی این ماتریس‌ها را به شکل مفهومی بررسی کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 5 & 15 & -10 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

از شما می‌خواهیم که توجه خود را به سطرهای ماتریس $A$ و رابطه‌ی بین آن‌ها معطوف کنید. سطر اول این ماتریس $A_۱ = [۱ \quad ۳ \quad -۲]$ است. سطر دوم، مستقل از سطر اول نیست، بلکه وابسته به آن است. در واقع سطر دوم از دو برابر کردن سطر اول به‌دست آمده است. $A_۲ = [۲ \quad ۶ \quad -۴] = ۲A_۱$

سطر سوم هم همان سطر اول است که ۵ برابر شده است. به عبارتی داریم $A_۳ = [۵ \quad ۱۵ \quad -۱۰] = ۵A_۱$. بسیار خب! نتیجه گرفتیم که در ماتریس $A$ سطرهای دوم و سوم وابسته به سطر اول هستند. ماتریس $A$ فقط یک سطر مستقل خطی دارد. می‌گوییم رتبه‌ی $A$ برابر با یک است ($\text{rank}(A) = ۱$). اکنون همین موضوع را در ماتریس $B$ بررسی کنیم. با کمی دقت می‌بینیم که سطرهای اول و دوم $B$ مضرب یکدیگر نیستند. بنابراین فعلاً دو سطر مستقل خطی در این ماتریس پیدا کرده‌ایم. اما آیا سطر سوم $B$ هم مستقل از سطرهای بالاتر است؟ اگر کمی دقت کنید می‌بینید که سطر سوم، تفاضل سطرهای اول و دوم است. در ماتریس $B$ داریم: $B_۳ = B_۱ - B_۲$. بنابراین ماتریس $B$ دارای دو سطر مستقل خطی و یک سطر وابسته خطی است. به نظر شما رتبه‌ی $B$ چند است؟ درست حدس زدید $\text{rank}(B) = ۲$ است. زیرا این ماتریس ۲ سطر مستقل خطی دارد. حالا نوبت به ماتریس $C$ رسیده است. آیا سطرهای اول و دوم $C$ مضرب یکدیگر هستند؟ به سادگی معلوم می‌شود که این سطرها مستقل خطی‌اند؛ زیرا هیچ‌کدام از آن‌ها مضرب دیگری نیست. تا این‌جا می‌دانیم که رتبه‌ی $C$ حداقل ۲ است. حالا به سطر سوم و رابطه‌اش با سطرهای قبلی توجه کنیم. به نظر نمی‌رسد که رابطه‌ای بین این سطر با سطرهای قبل وجود داشته باشد. اما از کجا می‌توانیم مطمئن باشیم؟ شاید با ضرب کردن سطرهای اول و دوم در اعداد مناسب و جمع و تفریق کردن آن‌ها بتوانیم سطر سوم را بوجود آوریم. اینجاست که نقش دترمینان مشخص می‌شود. **اگر دترمینان یک ماتریس مربع صفر نشود، ثابت می‌شود که سطرهای آن ماتریس، مستقل خطی‌اند و به یکدیگر وابسته نیستند.** پس با محاسبه‌ی $\det C$ می‌توانیم کار را تمام کنیم. با انجام محاسبات می‌بینیم که $\det C = -۱۵$ است پس $\det C \neq ۰$ است. یعنی ماتریس $C$ دارای سه سطر مستقل خطی است. از این‌جا معلوم می‌شود که رتبه‌ی آن برابر با سه است: $\text{rank}(C) = ۳$.

با توجه به توضیحات فوق، آماده هستیم که تعریف دقیق رتبه را بیان کنیم:

**تعریف رتبه:** تعداد سطرهای مستقل خطیِ ماتریس $A_{m\times n}$ را رتبه‌ی آن می‌نامیم و با علامت $\text{rank}(A)$ یا $r(A)$ نشان می‌دهیم. در برخی از منابع، تعداد سطرهای مستقل خطی $A$ را رتبه‌ی سطری آن و تعداد ستون‌های مستقل خطی $A$ را رتبه‌ی ستونی آن می‌نامند. اما چون ثابت می‌شود که رتبه‌های سطری و ستونی $A$ با هم برابرند، این مفاهیم کاربرد چندانی ندارند. البته بهتر است تساوی زیر را به یاد داشته باشید:

$$\text{rank}(A) = (\text{تعداد سطرهای مستقل خطیِ } A) = (\text{تعداد ستون‌های مستقل خطیِ } A)$$

وقتی یک ماتریس دارای $k$ سطر مستقل خطی باشد، حتماً دارای $k$ ستونِ مستقل خطی است و برعکس. بنابراین در ماتریس $A_{m\times n}$، رتبه‌ی $A$ نمی‌تواند از تعداد سطرها یا تعداد ستون‌ها بیشتر باشد.

**نتیجه:** در هر ماتریس $A_{m\times n}$، که $m$ سطر و $n$ ستون دارد، رتبه‌ی ماتریس $A$ نمی‌تواند از $n$ و $m$ بیشتر باشد، پس داریم:

$$\forall A \qquad ۰ \le \text{rank}(A) \le \min(n,m)$$

از طرفی، تنها ماتریسی که رتبه‌اش صفر می‌شود، ماتریس صفر $\bar{o}$ است. رتبه‌ی هر ماتریس غیرصفر، حداقل برابر با یک است. بنابراین داریم:

$$A \neq \bar{o} \Rightarrow ۱ \le \text{rank}(A) \le \min(n,m)$$

**روش‌های پیدا کردن رتبه:** برای تعیین رتبه‌ی ماتریس $A$ دو راه مختلف وجود دارد. یکی از آن‌ها استفاده از دترمینانِ زیرماتریس‌های مربع است و راه دوم، انجام عملیات سطری برای سطری ـ اشلی کردنِ ماتریس است که به روش حذفی گاوس معروف است. (مفهوم سطری ـ اشلی را در ادامه توضیح می‌دهیم) اکنون این روش‌ها را به طور کامل شرح می‌دهیم:

**الف) استفاده از دترمینان:** هر ماتریس $m\times n$ در درون خودش دارای زیرماتریس‌هایِ مربعی است. مثلاً یک ماتریسِ $۳\times ۴$ دارای زیرماتریس‌های $۳\times ۳$ و $۲\times ۲$ و $۱\times ۱$ است. برای مثال در شکل زیر، زیرماتریس‌های $۳\times ۳$ و برخی از زیرماتریس‌های $۲\times ۲$ را نشان داده‌ایم. ابتدا از بزرگترین زیرماتریس‌های مربع آغاز می‌کنیم. دترمینان آن‌ها را می‌گیریم. به محض آن که دترمینان یکی از آن‌ها مخالف صفر شود، مرتبه‌ی آن، رتبه‌ی ماتریس را مشخص می‌کند.

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & -۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۲ & ۴ \\ ۲ & ۵ & -۳ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۲ & -۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۲ & ۴ \\ ۲ & ۵ & -۳ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

(زیرماتریس‌های $۳\times ۳$)

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۲ & -۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۲ & ۴ \\ ۲ & ۵ & -۳ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

(برخی از زیرماتریس‌های $۲\times ۲$)

فرض کنید می‌خواهیم رتبه‌ی ماتریس $A_{۳\times ۴}$ را تعیین کنیم. این ماتریس خودش مربعی نیست؛ اما می‌توانیم در داخل آن ماتریس‌های مربعی انتخاب کنیم. ما آن‌ها را زیرماتریس‌های مربعی می‌نامیم. بررسی را از زیرماتریس‌های $۳\times ۳$ آغاز می‌کنیم. یکی از آن‌ها با استفاده از ۳ ستون سمت راست و دیگری با استفاده از ۳ ستون سمت چپ تشکیل شده است.

ابتدا دترمینان این ماتریس‌های $۳\times ۳$ را حساب می‌کنیم. اگر دترمینان یکی از آن‌ها مخالف صفر باشد، متوجه می‌شویم که رتبه‌ی $A$ برابر با ۳ است. اما اگر دترمینان هر دوی آن‌ها صفر شود، متوجه می‌شویم که رتبه‌ی $A$ از ۳ کمتر است و باید به سراغ زیرماتریس‌های $۲\times ۲$ برویم:

$$\begin{vmatrix} ۴ & -۲ & -۳ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۲ & ۵ & -۳ \end{vmatrix} = ۰ \quad , \quad \begin{vmatrix} -۲ & -۳ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۴ \\ ۵ & -۳ & ۱۱ \end{vmatrix} = ۰$$

پس لازم شد که به زیرماتریس‌های ۲×۲ توجه کنیم. تعداد آن‌ها زیاد است و ما در شکل، برخی از آن‌ها را نشان داده‌ایم. به محض آن که دترمینان یکی از آن‌ها مخالف صفر شد، دیگر نیازی به ادامه‌ی کار نداریم.

$$\begin{vmatrix}4&-2\\2&1\end{vmatrix}=8\neq 0$$

پس مطمئن شدیم که رتبه‌ی A برابر با ۲ است. اگر دترمینان همه‌ی ۲×۲ها هم صفر می‌شد، نتیجه می‌گرفتیم که رتبه‌ی A برابر با یک است. دو نکته‌ی مهم را باید به یاد داشته باشید:

۱ـ فقط ماتریس صفر $A=\bar{0}$ دارای رتبه‌ی صفر است و سایر ماتریس‌ها حداقل رتبه‌ی یک دارند. ۲ـ در این روش حتماً از ماتریس‌های مربعِ بزرگ بررسی را شروع کنید.

برای مثال فرض کنید می‌خواهیم رتبه‌ی ماتریس $A_{3\times 4}=\begin{bmatrix}3&3&0&3\\2&0&1&-1\\1&3&-1&4\end{bmatrix}$ را تعیین کنیم. بزرگترین زیرماتریس‌های مربع در این ماتریس، ۳×۳ هستند. ابتدا دترمینان آن‌ها را حساب می‌کنیم. اگر یکی از آن‌ها صفر نشود کار تمام است و رتبه‌ی A برابر با ۳ می‌شود:

$$\det\begin{bmatrix}3&0&3\\0&1&-1\\3&-1&4\end{bmatrix}=0 \qquad,\qquad \det\begin{bmatrix}3&3&0\\2&0&1\\1&3&-1\end{bmatrix}=0$$

هر دو دترمینان، صفر شدند. پس مطمئن می‌شویم که رتبه‌ی A کمتر از ۳ است. حالا به زیرماتریس‌های ۲×۲ توجه کنیم. خوشبختانه اولین آن‌ها دترمینان غیر صفر دارد: $\det\begin{bmatrix}3&3\\2&0\end{bmatrix}=-6\neq 0$ بنابراین رتبه‌ی ماتریس A برابر با دو است: $\operatorname{rank}(A)=2$

**مثال ۳: رتبه‌ی ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\3&6&9&12\end{bmatrix}$ را تعیین کنید.**

☑ **پاسخ:** نیازی نیست در چنین مثال ساده‌ای از دترمینان استفاده کنیم. سطرهای دوم و سوم مضرب‌هایی از سطر اول هستند. سطر دوم، دو برابر سطر اول است و سطر سوم سه برابر آن است. $A_2=2A_1$ و $A_3=3A_1$. پس واضح است که رتبه‌ی A برابر است با یک: $\operatorname{rank}(A)=1$.

---

**مثال ۴: رتبه‌ی ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&11\end{bmatrix}$ را تعیین کنید.**

☑ **پاسخ:** سطرهای اول و سوم مضرب یکدیگر نیستند. اما سطر دوم کاملاً صفر است. می‌توان گفت سطر دوم همان سطر اول است که در صفر ضرب شده است. بنابراین سطرهایی که کاملاً صفر هستند مستقل خطی محسوب نمی‌شوند. پس به طریق مفهومی واضح است که رتبه‌ی A برابر است با دو:

$\operatorname{rank}(A)=2$

---

در بخش قبلی با ویژگی‌های دترمینان آشنا شده‌اید. می‌دانید که با جمع و تفریق یک سطر با مضربی از سطر دیگر، مقدار دترمینان تغییر نخواهد کرد. همین‌طور جمع و تفریق یک ستون با مضربی از ستون دیگر، تأثیری بر دترمینان ماتریس ندارد. اکنون به اطلاع شما می‌رسانیم که انجام این عملیات رتبه‌ی ماتریس را هم تغییر نخواهد داد. پس می‌توانید برای ساده‌تر شدن مسأله، ابتدا با اعمال فوق ماتریس را ساده‌تر کنید و سپس رتبه‌ی آن را تعیین نمایید.

**مثال ۵: رتبه یا rank ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{bmatrix}$ کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» گفتیم که با کم کردن یا جمع کردن دو سطر با یکدیگر، رتبه‌ی ماتریس تغییر نمی‌کند. پس برای ساده‌تر شدن مسأله و کوچک‌تر شدن درایه‌ها، از سطر آخر شروع می‌کنیم و هر سطر را منهای سطر قبلی‌اش می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&4&4&4\\4&4&4&4\\4&4&4&4\end{bmatrix}$$

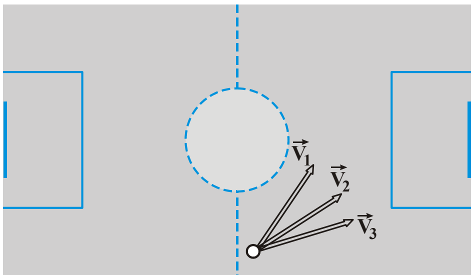
حالا واضح است که سطرهای دوم، سوم و چهارم با هم برابرند اما سطرهای اول و دوم مستقل خطی هستند. بنابراین ماتریس A فقط دو سطر مستقل دارد. پس: $\operatorname{rank}(A)=2$.

---

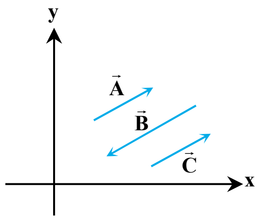
**توجه:** در مثال‌های بالا توانستیم با تکیه بر مفهوم رتبه و چند قانون ساده، رتبه را مشخص کنیم و نیازی به استفاده از دترمینان نداشتیم. حالا می‌خواهیم یک مثال مشکل‌تر را با استفاده از دترمینان حل کنیم.

# درسنامه۴: بردارها در فضای سه بعدی

برخی از کمیت‌ها را می‌توان با یک عدد حقیقی بیان کرد. برای مثال، قد و وزن یک شخص، دمای محیط، فاصله‌ی دو شهر و مدت زمان پرواز یک هواپیما، هر کدام از این‌ها را می‌توانیم با یک عدد حقیقی بیان کنیم. این کمیت‌ها را کمیت‌های **اسکالر** می‌نامیم. اما نوع دیگری از کمیت‌ها وجود دارد که علاوه بر مقدار، دارای جهت نیز هستند.

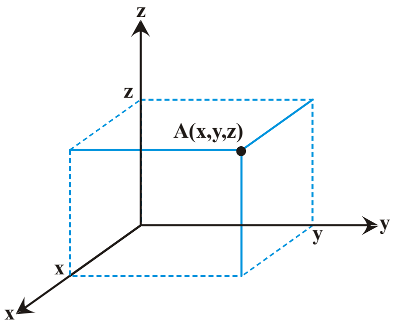



توپی را تصور کنید که قرار است یک بازیکن فوتبال به آن ضربه بزند و شما می‌دانید که سرعت شوت‌های این بازیکن ۸۰ کیلومتر بر ساعت است. آیا با این اطلاع می‌توانید مسیر حرکت توپ را پیش‌بینی کنید؟ واضح است که نمی‌توانید، چون جهت حرکت توپ را نمی‌دانید. کمیت سرعت را نمی‌توان فقط با یک عدد حقیقی بیان کرد. زیرا علاوه بر اندازه، جهت هم دارد. با دانستن جهتِ حرکت توپ و عددِ $۸۰\frac{km}{h}$، می‌توانیم مسیر حرکت توپ را پیش‌بینی کنیم.



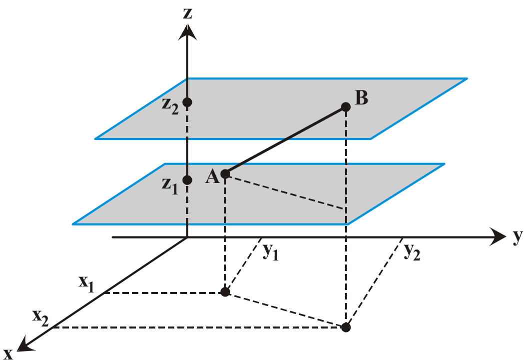

کمیت‌هایی مانند نیرو، سرعت و شتاب، که علاوه بر اندازه، دارای جهت هم هستند کمیت‌های **برداری** می‌نامیم. اگر دو بردار داشته باشیم که موازی هم باشند آن‌ها را **هم‌راستا** می‌نامیم. بردارهای هم‌راستا ممکن است هم‌جهت یا غیرهم‌جهت باشند. در شکل مقابل بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هم‌راستا هستند، اما هم‌جهت نیستند.

## دستگاه مختصات قائم




چه تصوری از درس هندسه دارید؟ در هندسه معمولی، از مفاهیمی مانند اندازه، زاویه، تناسب و توازی استفاده می‌شود. از آنجا که اقلیدس برای اولین بار این نوع هندسه را به صورت اصولی و مرتب شده بیان کرد، به آن هندسه‌ی **اقلیدسی** هم می‌گویند. در هندسه‌ی اقلیدسی چیزی به نام محورهای مختصات وجود ندارد، اما در هندسه‌ی **تحلیلی** ما هر شکل را در یک دستگاه مختصات قائم قرار می‌دهیم و این باعث می‌شود که هر نقطه دارای مختصاتی به صورت $(x,y,z)$ باشد. حالا می‌توانیم علاوه بر قوانینی که در هندسه‌ی اقلیدسی داریم، از ابزارهای جدیدی مانند معادله‌ی خط، شیب خط، معادله‌ی دایره و نظایر آن نیز استفاده کنیم.

بنابراین هندسه‌ی تحلیلی، یعنی هندسه‌ای که در یک دستگاه مختصات بررسی شده باشد. برای اشکال مسطح، فقط به دو محور x و y نیاز داریم. اما در یک دستگاه سه بعدی با محورهای x، y و z می‌توانیم علاوه بر اشکال مسطح، اشکال فضایی را نیز تحلیل کنیم.

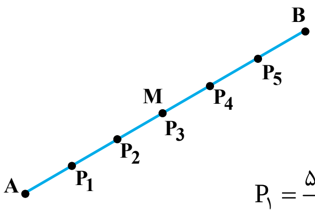



در این دستگاه هر نقطه دارای سه **مؤلفه** یا **مختص** است. معمولاً مؤلفه‌های x، y و z را به ترتیب طول، عرض و ارتفاع آن نقطه می‌نامیم. اگر A و B دو نقطه از دستگاه سه بعدی باشند، فاصله‌ی آن‌ها از رابطه‌ی زیر که نتیجه‌ی قضیه‌ی فیثاغورث است به دست می‌آید:

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}$$

اگر پاره‌خط AB را نصف کنیم، نقطه‌ی وسطِ پاره‌خط AB از میانگین مؤلفه‌های A و B به دست می‌آید:

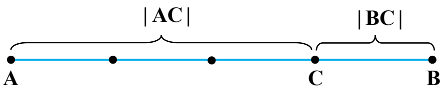
$$M=\frac{(A+B)}{۲}=(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲},\frac{z_۱+z_۲}{۲})$$




این فرمول یک حالت کلی‌تر هم دارد که به وسیله‌ی آن می‌توانیم پاره‌خط AB را به چند قسمت مساوی تقسیم کنیم. برای مثال، تصور کنید می‌خواهیم پاره‌خط AB را به ۶ قسمت مساوی تقسیم کنیم. مطابق شکل، ۵ نقطه‌ی $P_۱$, ...، و $P_۵$ باید مشخص شوند. مختصات نقاط $P_i$ چگونه به دست می‌آید؟ به روابط زیر دقت کنید. هرچه به B نزدیک‌تر می‌شویم ضریب B آن بزرگ‌تر می‌شود.

$$P_۱=\frac{۵A+B}{۶}\qquad P_۲=\frac{۴A+۲B}{۶}\qquad P_۳=\frac{۳A+۳B}{۶}\qquad P_۴=\frac{۲A+۴B}{۶}\qquad P_۵=\frac{A+۵B}{۶}$$

در حالت کلی اگر بخواهیم پاره‌خط AB را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم نقاط $P_i$ از رابطه‌ی $P_i=\frac{(n-i)A+iB}{n}$ به ازای $i=۱,۲,\cdots,n-۱$ به‌دست می‌آیند.




**مثال ۱:** نقاط $A(۱,۲,۰)$ و $B(۵,-۶,۴)$ را در نظر بگیرید. نقطه‌ی C روی پاره‌خط AB چنان است که $|AC|=۳|BC|$. مختصات C را پیدا کنید.

☑ **پاسخ:** فرض کنید AB را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. در این صورت نقطه‌ی C نزدیکترین نقطه به B است. پس داریم:

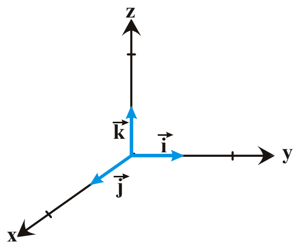
$$C=\frac{۳B+A}{۴}=\frac{۳(۵,-۶,۴)+(۱,۲,۰)}{۴}=\frac{(۱۶,-۱۶,۱۲)}{۴}=(۴,-۴,۳)$$

## بردار

هر پاره‌خط جهت‌دار را یک بردار می‌نامیم. برداری که ابتدای آن در نقطه‌ی A و انتهای آن در B باشد را با علامت $\overrightarrow{AB}$ نشان می‌دهیم. اگر O مبدأ مختصات باشد، بردار $\overrightarrow{OA}$ را اغلب با همان علامت $\vec{A}$ نشان می‌دهیم. برای نشان دادن بردارها دو روش وجود دارد.

**روش اول:** مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ را به این صورت می‌نویسیم:
$$\overrightarrow{AB}=(x_۲-x_۱,y_۲-y_۱,z_۲-z_۱)$$

همیشه باید مؤلفه‌های انتهای بردار را منهای مؤلفه‌های ابتدای آن کنیم. برای مثال برداری که از $A(۱,۲,-۳)$ به $B(۴,-۲,۶)$ می‌رود برابر است با:
$$\overrightarrow{AB}=(۴-۱,-۲-۲,۶-(-۳))=(۳,-۴,۹)$$




**روش دوم:** از بردارهای واحد برای نوشتن بردار $\overrightarrow{AB}$ استفاده می‌کنیم. مطابق شکل بردارهای $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهایی به اندازه‌ی واحد و در جهت محورهای x، y و z هستند. هر بردار دیگر، ترکیب خطی این سه بردار است. برای مثال داریم:
$$\overrightarrow{AB}=(۳,-۴,۹)=۳\vec{i}-۴\vec{j}+۹\vec{k}$$

**اندازه بردار:** اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقطه‌ی B، به عبارتی داریم:

$$\boxed{|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}}$$

**تساوی بردارها:** دو بردار را که اندازه و جهت یکسانی داشته باشند، با هم برابر می‌گوییم. به لحاظ تحلیلی برای تساوی بردارها باید مؤلفه‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.

**اعمال جبری روی بردارها:** برای بردارها چهار عمل جبری تعریف می‌شود که عبارتند از جمع برداری، ضرب اسکالر، ضرب داخلی و ضرب خارجی، که در ادامه، طرز محاسبه و کاربرد هر یک را شرح می‌دهیم.

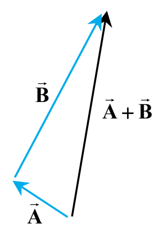
**ضرب اسکالر در بردار:** حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی مانند $\lambda$ در بردار $\vec{A}$، برداری مانند $\vec{B}$ است که اگر $\lambda$ مثبت باشد، $\vec{B}$ برداری است هم جهت با $\vec{A}$ و اگر $\lambda$ منفی باشد، $\vec{B}$ برداری است در خلاف جهت $\vec{A}$. و اندازه‌ی $\vec{B}$، $|\lambda|$ برابر اندازه بردار $\vec{A}$ خواهد بود. $(\vec{B}=\lambda\vec{A})$

**حاصل‌جمع و تفاضل دو بردار:** اگر دو بردار $\vec{A}(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $\vec{B}(x_۲,y_۲,z_۲)$ مفروض باشند، آن‌گاه خواهیم داشت:
$$\vec{A}+\vec{B}=(x_۱+x_۲,y_۱+y_۲,z_۱+z_۲)\ ,\ \vec{A}-\vec{B}=(x_۱-x_۲,y_۱-y_۲,z_۱-z_۲)$$

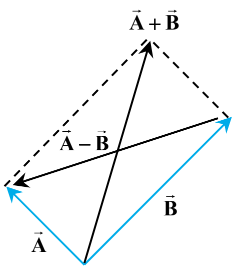
برای رسم هندسیِ بردار $\vec{A}+\vec{B}$ دو راه وجود دارد:

**روش اول:** مطابق شکل سمت راست پایین، ابتدا بردار $\vec{A}$ را رسم می‌کنیم، از انتهای آن بردار $\vec{B}$ را رسم می‌کنیم، سپس ابتدای $\vec{A}$ را به انتهای $\vec{B}$ وصل می‌کنیم. مثلثی به دست می‌آید که اضلاع آن $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{A}+\vec{B}$ هستند. این را روش مثلث می‌نامیم.

**روش دوم:** مطابق شکل سمت چپ بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را از یک نقطه رسم می‌کنیم. سپس از انتهای بردار $\vec{A}$، برداری موازی و هم‌اندازه با $\vec{B}$ رسم می‌کنیم. از انتهای بردار $\vec{B}$، برداری موازی و هم‌اندازه با $\vec{A}$ رسم می‌کنیم. متوازی‌الاضلاعی که با این بردارها ساخته می‌شود را در نظر می‌گیریم. مطابق شکل، یکی از قطرها $\vec{A}+\vec{B}$ و قطر دیگر $\vec{A}-\vec{B}$ را نشان خواهد داد. بردار $\vec{A}-\vec{B}$ از انتهای $\vec{B}$ به انتهای $\vec{A}$ رسم می‌شود.




**قانون مثلث**




**قانون متوازی‌الاضلاع**

**مثال ۲:** اگر $\vec{A}=(۱,۳,۴)$ و $\vec{B}=(۲,۱,۲)$ باشد، آن‌گاه حاصل $\vec{C}=۳\vec{B}-۲\vec{A}$ کدام است؟

۱) $(۴,۹-۲)$ ۲) $(۴,-۳,-۲)$ ۳) $(۸,۹,۱۴)$ ۴) $(۸,۹,۲)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با محاسبه‌ی ضرب‌های اسکالر داده شده، داریم:
$$\vec{C}=۳(۲,۱,۲)-۲(۱,۳,۴)=(۶,۳,۶)+(-۲,-۶,-۸)=(۴,-۳,-۲)$$

**امتداد نیمساز دو بردار:** برداری که امتداد نیمساز بردارهای غیرصفر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را نشان می‌دهد به صورت $\vec{C}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}+\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$ نوشته می‌شود. برای مثال اگر $\vec{A}=(۲,۲,۱)$ و $\vec{B}=(۰,۳,۴)$ باشند داریم:
$$\vec{C}=\frac{(۲,۲,۱)}{۳}+\frac{(۰,۳,۴)}{۵}=(\frac{۲}{۳},\frac{۱۹}{۱۵},\frac{۱۷}{۱۵})$$

**کسینوس‌های هادی یک بردار:**

اگر $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ زوایایی باشند که بردار دلخواه $\vec{u}=(a,b,c)$ با جهت‌های مثبت محورهای x، y و z می‌سازد، آن‌گاه $\cos\alpha$، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ را کسینوس‌های هادی بردار یا خط می‌گوییم و از فرمول زیر به دست می‌آیند:

$$\cos\alpha=\frac{a}{|\vec{u}|} \quad و \quad \cos\beta=\frac{b}{|\vec{u}|} \quad و \quad \cos\gamma=\frac{c}{|\vec{u}|}$$

با توجه به تعریف فوق بلافاصله نتیجه زیر را داریم:

$$\boxed{\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱}$$

**مثال ۳: اگر $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ زوایایی باشند که خط d با محورهای مختصات می‌سازد، کدامیک از روابط زیر صحیح است؟**

۱) $\alpha+\beta+\gamma=۹۰^\circ$

۲) $\sin^۲\alpha+\sin^۲\beta+\sin^۲\gamma=۲$

۳) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=۱$

۴) $\alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ$

**پاسخ :** گزینه «۲» با توجه به اینکه $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ زوایای هادی هستند، پس داریم:

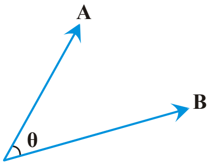
$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱\Rightarrow ۱-\sin^۲\alpha+۱-\sin^۲\beta+۱-\sin^۲\gamma=۱\Rightarrow \sin^۲\alpha+\sin^۲\beta+\sin^۲\gamma=۲$$

## حاصل‌ضرب داخلی دو بردار

ضرب داخلی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را با علامت $\vec{A}.\vec{B}$ نشان می‌دهند. برای محاسبه‌ی ضرب داخلی دو بردار $\vec{A}=(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $\vec{B}=(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو راه وجود دارد، می‌توانیم اندازه دو بردار را در کسینوسِ زاویه‌ی بین دو بردار ضرب کنیم: $\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}|.|\vec{B}|\cos\theta$

همچنین می‌توانیم آن را با استفاده از مؤلفه‌ها، به دست آوریم:

$$\vec{A}.\vec{B}=x_۱x_۲+y_۱y_۲+z_۱z_۲$$




بنابراین خواهیم داشت:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=x_۱x_۲+y_۱y_۲+z_۱z_۲}$$

که با توجه به رابطه فوق زاویه بین دو بردار از فرمول زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$\boxed{\cos\theta=\frac{x_۱.x_۲+y_۱.y_۲+z_۱.z_۲}{\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲+z_۱^۲}.\sqrt{x_۲^۲+y_۲^۲+z_۲^۲}}}$$

**مثال ۴: زاویه بین دو بردار $\vec{V}_۱(۱۰,۱۱,-۲)$ و $\vec{V}_۲=(۳,۰,۴)$ کدام است؟**

۱) ۳۰

۲) ۶۰

۳) $\operatorname{Arc}\cos\frac{۱}{۳}$

۴) $\operatorname{Arc}\cos\frac{۲۲}{۷۵}$

**پاسخ :** گزینه «۴»

$$\cos\theta=\frac{(۳\times۱۰)+(۱۱\times۰)-(۴\times۲)}{\sqrt{۱۰۰+۱۲۱+۴}.\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۲۲}{۱۵\times۵}=\frac{۲۲}{۷۵}\Rightarrow\theta=\operatorname{Arc}\cos(\frac{۲۲}{۷۵})$$

**شرط عمود بودن دو بردار:** دو بردار $\vec{A}(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $\vec{B}(x_۲,y_۲,z_۲)$ در صورتی بر هم عمود هستند که داشته باشیم:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=x_۱.x_۲+y_۱.y_۲+z_۱.z_۲=۰}$$

**خواص ضرب داخلی:**

۱) ضرب داخلی بردارها خاصیت جابجایی دارد یعنی داریم: $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$.

۲) ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر است با اندازه‌اش به توان دو: $\vec{A}.\vec{A}=|\vec{A}|^۲$

۳) بیشترین مقدار ضرب داخلی دو بردار وقتی به دست می‌آید که $\theta=۰$ باشد. بنابراین داریم: $|\vec{A}.\vec{B}|\le|\vec{A}||\vec{B}|$

۴) ضرب داخلی در جمع بردارها بخش‌پذیر است: $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$

**مثال ۵: اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهای یکه باشند و در تساوی $|\vec{a}-\vec{b}|^۲+|\vec{b}-\vec{c}|^۲+|\vec{c}-\vec{a}|^۲=۹$ صدق کنند، آن‌گاه مقدار $|۲\vec{a}+۵\vec{b}+۵\vec{c}|$ کدام است؟**

۱) ۳

۲) ۹

۳) ۶

۴) ۲

**پاسخ:** گزینه «۱» برای هر بردار دلخواه $\vec{V}$ داریم: $|\vec{V}|^۲=\vec{V}.\vec{V}$. پس تساویِ $|\vec{a}-\vec{b}|^۲+|\vec{b}-\vec{c}|^۲+|\vec{c}-\vec{a}|^۲=۹$ را می‌توان چنین نوشت:

$$(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{b}-\vec{c}).(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{c}-\vec{a}).(\vec{c}-\vec{a})=۹\Rightarrow \vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{c}-\vec{c}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{c}-\vec{a}.\vec{c}-\vec{c}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{a}=۹$$

اما $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ است و $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲$. به همین ترتیب برای سایر بردارها خواهیم داشت:

$$\Rightarrow ۲|\vec{a}|^۲+۲|\vec{b}|^۲+۲|\vec{c}|^۲-۲\vec{a}.\vec{b}-۲\vec{b}.\vec{c}-۲\vec{a}.\vec{c}=۹$$

بردارهای a و b و c یکه هستند پس: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=۱$.

$$\Rightarrow ۶-۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c})=۹\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}=-\frac{۳}{۲}$$

اکنون می‌توانیم اندازه‌ی بردار خواسته شده را حساب کنیم. برای این کار ابتدا نشان می‌دهیم بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ بردار صفر است:

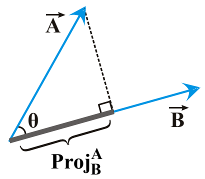
$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^{۲}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}+۲\vec{a}.\vec{b}+۲\vec{a}.\vec{c}+۲\vec{b}.\vec{c})$$

$$=(|a|^{۲}+|b|^{۲}+|c|^{۲}+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}))=(۳+۲(-\frac{۳}{۲}))=۳-۳=۰$$

پس $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=۰$ است یعنی $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=۰$ به این ترتیب خواهیم داشت:

$$|۲\vec{a}+۵\vec{b}+۵\vec{c}|=|۵\vec{a}+۵\vec{b}+۵\vec{c}-۳\vec{a}|=|۵(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-۳\vec{a}|=|۰-۳\vec{a}|=|۳\vec{a}|=۳|\vec{a}|=۳$$

### طول تصویر یک بردار:



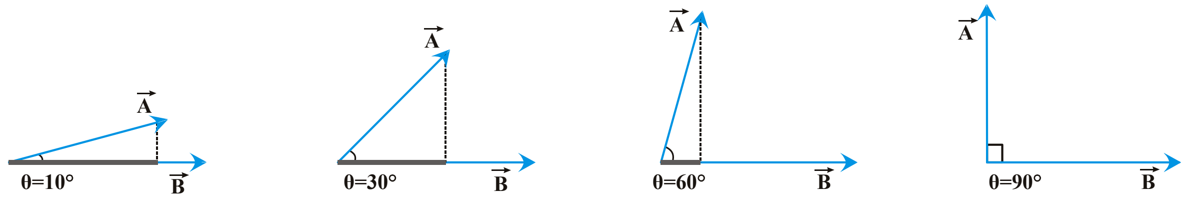

در شکل مقابل، تصویر بردار $\vec{A}$ روی بردار $\vec{B}$ را با علامت $Proj_{B}^{A}$ نشان داده‌ایم. در مثلث قائم‌الزاویه، می‌دانید که کسینوسِ زاویه‌ی $\theta$ برابر با نسبتِ ضلع مجاور، به وتر است. به عبارتی داریم:

$$\cos\theta=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{Proj_{B}^{A}}{|\vec{A}|}\Rightarrow Proj_{B}^{A}=|\vec{A}|\cos\theta$$

از طرفی دیدیم که $\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$ است. با جایگذاری این تساوی در رابطه‌ی قبلی داریم:

$$\boxed{Proj_{B}^{A}=|\vec{A}|\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}}$$

به شکل‌های زیر توجه کنید. وقتی که زاویه‌ی $\theta$ کوچک باشد، تصویر $\vec{A}$ (سایه‌ی $\vec{A}$) روی $\vec{B}$ تقریباً به اندازه‌ی خود $\vec{A}$ است. با بزرگتر شدن زاویه‌ی $\theta$، سایه‌ی $\vec{A}$ کوچک‌تر می‌شود تا آنجا که وقتی $\theta=۹۰^{\circ}$ باشد، طول این تصویر صفر می‌شود.



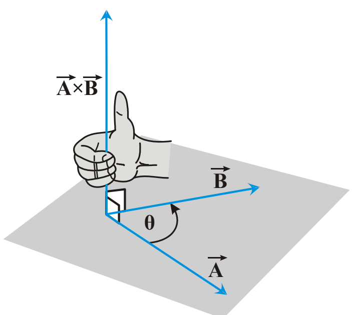

**مثال ۶: طول تصویر بردار $\vec{A}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ بر بردار $\vec{B}=\frac{\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{۲}}$ کدام است؟**

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲

**پاسخ :** گزینه «۱» طبق فرمول داریم:

$$Proj_{B}^{A}=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times ۱)+(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times ۱)}{\sqrt{(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{۲}+(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{۲}}}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}}{\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

## حاصل‌ضرب خارجی دو بردار




بردارهای $\vec{A}=x_{۱}\vec{i}+y_{۱}\vec{j}+z_{۱}\vec{k}$ و $\vec{B}=x_{۲}\vec{i}+y_{۲}\vec{j}+z_{۲}\vec{k}$ را در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برداری است مانند $\vec{C}$ که بر هر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است. برای تشخیص جهت آن نیز از قانون دست راست مطابق شکل استفاده می‌کنیم. البته این کار برای مسائل فیزیکی لازم می‌شود.

در مسائل فیزیکی، برای تشخیص جهت صحیح بردار $\vec{C}$، از قانون دست راست، مطابق شکل استفاده می‌کنند. اگر چهار انگشت را روی $\vec{A}$ و هم‌جهت با آن قرار داده و به سمت $\vec{B}$ ببندیم، انگشت شصت، جهت $\vec{C}$ را نشان می‌دهد. برای محاسبه‌ی ضرب خارجی از دترمینان استفاده می‌کنیم:

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_{۱} & y_{۱} & z_{۱}\\ x_{۲} & y_{۲} & z_{۲}\end{vmatrix}=(y_{۱}z_{۲}-z_{۱}y_{۲})\vec{i}+(z_{۱}x_{۲}-x_{۱}z_{۲})\vec{j}+(x_{۱}y_{۲}-x_{۲}y_{۱})\vec{k}$$

**تذکر ۱:** اندازه حاصل‌ضرب خارجی دو بردار غیر صفر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که با نماد $\vec{A}\times\vec{B}$ نشان داده می‌شود برابر است با:

$$\boxed{|\vec{C}|=|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}|.|\vec{B}|\sin\theta}$$

که $\theta$ زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.