سؤالات آزمون مجموعه مدیریت و حسابداری ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۰

توجه: برای رشته مدیریت مجموعاً ۸ سؤال ریاضی طرح شده است که سؤالات ۱، ۳، ۶، ۷، ۹، ۱۱، ۱۲ و ۱۵ مشترک با رشته حسابداری می‌باشد.

۱ـ یک شرکت خدماتی تصمیم دارد مبلغی پول را بین ۱۰ کارگر خود به‌صورت تسهیلات تقسیم کند. مدیر شرکت اختیار دارد به هر تعداد از کارگران که صلاح بداند این تسهیلات را واگذار نماید، به‌طوری که مبلغ تسهیلات بین افراد انتخاب شده به‌صورت مساوی تقسیم شود. او به چند حالت می‌تواند به حداقل ۲ و حداکثر ۵ کارگر تسهیلات اعطا نماید؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۲۷ ۳) ۵۷۲ ۴) ۶۲۷

۲ـ فرض کنید $f(xf(x)) = ۳f(x)$ و $f(۱) = ۲$، مقدار $f(۱۲)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۳ـ اگر $f(x) = \begin{vmatrix} x & x^۲ & x^۳ \\ ۱ & ۲x & ۳x^۲ \\ ۰ & ۲ & ۶x \end{vmatrix}$ باشد، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۴ـ m در کدام بازهٔ زیر باشد تا تابع $f(x) = |۲x+۴| + mx$ اکیداً یکنوا باشد؟

۱) $(-\infty, -۲)$ ۲) $(-۲, +\infty)$ ۳) $(-\infty, ۲)$ ۴) $(-۲, ۲)$

۵ـ تابع نمایی $f(x) = (\frac{۲-۳k}{۴+k})^x$ را در نظر بگیرید. محدودهٔ تغییرات k کدام باشد تا f همواره نزولی باشد؟

۱) $(-۴, -\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{-۱}{۲}, \frac{۲}{۳})$ ۳) $(-۴, -\frac{۲}{۳})$ ۴) $(-\infty, -۴) \cup (-\frac{۱}{۲}, \infty)$

۶ـ فرض کنید دنبالهٔ $\{|a_n|\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا باشد، کدام دنباله لزوماً همگرا <u>نیست</u>؟

۱) $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ ۲) $\{a_n^۲\}_{n=۱}^{\infty}$ ۳) $\{\frac{a_n}{n}\}_{n=۱}^{\infty}$ ۴) $\left\{\sqrt[۳]{|a_n|}\right\}_{n=۱}^{\infty}$

۷ـ مقدار حد تابع $\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}+۳\sqrt[۳]{x-۳}}{\sqrt[۳]{x+۱}+\sqrt[۳]{x-۱}}$ در $x = +\infty$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $+\infty$

۸ـ به ازای کدام مقدار a، تابع زیر یک تابع همواره پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[x^۲]-۹}{[x]^۲-[x^۲]} & ; \ x < ۳ \\ x[-x]+ax & ; \ x \geq ۳ \end{cases}$$

۱) ۴ ۲) $\frac{۳۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۴۹}{۱۲}$ ۴) به ازای هیچ مقدار a

۹ـ ضریب $x^۴$ در بسط مکلورن تابع $f(x) = \sqrt[۳]{۱-x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۴۳}$ ۲) $-\frac{۱۰}{۲۴۳}$ ۳) $\frac{۸۰}{۸۱}$ ۴) $-\frac{۸۰}{۸۱}$

۱۰ـ حاصل انتگرال $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$ کدام است؟

۱) $Ln(e^{۲x}+۱)-x+c$ ۲) $Ln(e^{۲x}+۱)-x+c$ ۳) $Ln(e^{-۲x}-۱)+x+c$ ۴) $Ln(e^{۲x}+۱)+x+c$

۱۱ـ مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی‌های $y = x^۳$ و $y = x^۲$ در بازهٔ $[۰, ۲]$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۲ـ فرض کنید دستگاه‌های معادلات خطی زیر جواب یکسان داشته باشند. مقدار $a+b$ کدام است؟

$$\begin{cases} 2x+y-5z=9 \\ bx+3z=21 \\ y-2z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+2y+z=-7 \\ 3x-y+2z=-1 \\ 5x+y-z=8 \end{cases}$$

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۲۱

۱۳ـ فرض کنید D مجموعهٔ جواب دستگاه نامعادلات زیر باشد. در این‌صورت ماکزیمم تابع $f(x,y)=3x+5y$ روی مجموعهٔ D کدام است؟

$$\begin{cases} x\geq y \\ x+y\leq 2 \\ x+3y\geq -6 \end{cases}$$

۱) -2
۲) ۲
۳) ۸
۴) ۱۲

۱۴ـ اگر بردار ناصفر $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ موجود باشد به قسمی که $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$، λ در کدام معادلهٔ زیر صدق می‌کند؟

۱) $\lambda^2-10\lambda+24=0$ ۲) $\lambda^2-5\lambda+1=0$ ۳) $\lambda^2-10\lambda+26=0$ ۴) $\lambda^2-5\lambda-1=0$

۱۵ـ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B=(b_{ij})$ معکوس ماتریس A باشد، مقدار b_{21} کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) -4 ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) صفر

پاسخنامه آزمون مجموعه مدیریت و حسابداری ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۰

۱ـ گزینه «۴» چون از ۱۰ کارگر حداقل ۲ و حداکثر ۵ کارگر را می‌خواهیم انتخاب کنیم، باید حالت‌های ترکیب انتخاب ۲ تا ۵ از ۱۰ کارگر را بنویسیم:

$$\binom{10}{2}+\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=\frac{10\times 9}{2}+\frac{10!}{3!7!}+\frac{10!}{4!6!}+\frac{10!}{5!5!}$$

$$=45+\frac{10\times 9\times 8\times 7!}{3\times 2\times 7!}+\frac{10\times 9\times 8\times 8}{4\times 3\times 2}+\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2}=45+120+210+252=627$$

۲ـ گزینه «۳» با توجه به این که مقدار $f(1)=2$ را داریم، پس ابتدا به جای x باید مقدار $x=1$ را قرار دهیم.

$$x=1\ \Rightarrow f(1\times \overbrace{f(1)}^{2})=3\overbrace{f(1)}^{2}\ \Rightarrow f(2)=6$$

اکنون چون $f(12)$ را می‌خواهیم، باید $x=2$ را قرار دهیم تا به $f(12)$ برسیم:

$$x=2\ \Rightarrow f(2\underbrace{f(2)}_{6})=3f(2)$$

$$f(12)=3(6)=18$$

۳ـ گزینه «۴» ابتدا باید حاصل دترمینان را بر حسب متغیر x به دست آوریم و سپس از آن برحسب x مشتق بگیریم.

$$f(x)=x(12x^2-6x^2)-x^2(6x)+x^3(2-0)=6x^3-6x^3+2x^3=2x^3$$

$$f'(x)=6x^2\xrightarrow{x=2}6(2)^2=24$$

۴ـ گزینه «۱» ریشهٔ داخل قدر مطلق $x=-2$ است، لذا داریم:

$$x<-2\ \to f(x)=-(2x+4)+mx=x(m-2)-4$$

$$x\ge -2\ \to f(x)=2x+4+mx=x(m+2)+4$$

برای یکنوا بودن باید شیب هر دو خط به‌دست آمده هر دو منفی یا هر دو مثبت باشد. پس داریم:

$$\begin{cases}m-2<0\ \to\ m<2\\ m+2<0\ \to\ m<-2\end{cases}\ \xrightarrow{\ \cap\ }\ m<-2=(-\infty,-2)$$

توجه داشته باشید که شیب خط‌های به دست آمده با مشتق‌گیری نیز همان ضرایب x یعنی $m-2$ و $m+2$ می‌باشد.

۵ـ گزینه «۲» در تابع نمایی به فرم $y=a^x$ اگر $0<a<1$ باشد، تابع نزولی و اگر $a>1$ باشد، تابع صعودی است.

پس در این مثال باید $0<\frac{2-3k}{4+k}<1$ باشد تا f همواره نزولی باشد.

$$\frac{2-3k}{4+k}<1\ \Rightarrow\ \frac{2-3k}{4+k}-1<0\ \Rightarrow\ \frac{2-3k-4-k}{4+k}<0$$

برای تعیین علامت یک تابع کسری فقط کافی است ریشه‌های صورت و مخرج کسر را بـه دست آوریم و علامت عبارت داده شده را به ازای قبل و بعـد از ریشـه‌هـای سـاده تعیـین کنیم، با عبور از هر ریشه ساده علامت عبارت تغییر می‌کند.

$$\Rightarrow \frac{-4k-2}{4+k}<0\ \Rightarrow$$

k		-4		$-\frac{1}{2}$	
$p<0$	$-$		$+$		$-$

$k<-4$ یا $k>-\frac{1}{2}$

$$\frac{2-3k}{4+k}>0\ \Rightarrow$$

k		-4		$\frac{2}{3}$	
$p>0$	$-$		$+$		$-$

$-4<k<\frac{2}{3}$

اشتراک جواب‌ها $\Rightarrow$ -4 $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{2}{3}$ $\quad \Rightarrow k\in(-\frac{1}{2},\frac{2}{3})$

۶ـ گزینه «۱» به عنوان مثال دنبالهٔ $a_n = |(-1)^n \frac{n}{n+1}|$ همگرا به عدد ۱ است، ولی دنباله $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ واگرا می‌باشد، چون حاصل حد آن ۱± است.

$$\text{اگر } n \text{ زوج باشد} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{n}{n+1} = 1 \quad , \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{-n}{n+1} = -1$$

۷ـ گزینه «۳» در صورت کسر، حالت مبهم $\infty - \infty$ را داریم، پس باید ابتدا آن قسمت را با ضرب و تقسیم عبارت در مزدوج آن رفع ابهام کنیم.

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt[3]{x}} \times \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-(x-1)}{2\sqrt[3]{x}\times(\sqrt{x}+\sqrt{x})} = \lim \frac{2}{\infty} = 0$$

پس داریم:

$$\text{حاصل حد} = 0 + \frac{3\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}$$

۸ـ گزینه «۴» باید $f(3) = f(3^-) = f(3^+)$ باشد، پس داریم: (نقطهٔ مرزی یعنی $x = 3$ باید بررسی شود.)

$$\begin{cases} f(3) = 3[-3] + 3a = -9 + 3a \\ f(3^+) = 3[-(3^+)] + 3a = 3(-4) + 3a = -12 + 3a \end{cases}$$

پس باید:

$$-9 + \cancel{3a} = -12 + \cancel{3a} \Rightarrow -9 = -12$$

که این غیرممکن است، پس به a ربطی ندارد و به ازای هیچ مقدار a تابع در $x = 3$ پیوسته نمی‌باشد.

۹ـ گزینه «۲» با استفاده از هم‌ارزی برنولی داریم:

$$(1+u)^h = 1 + hu + \frac{h(h-1)}{2!}u^2 + \frac{h(h-1)(h-2)}{3!}u^3 + \cdots$$

چون در اینجا ضریب x^4 را از ما می‌خواهد، پس فقط جمله‌ای که x^4 تولید می‌کند را می‌یابیم.

$$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{4!}x^4 = \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3})}{4\times3\times2}x^4 = \frac{-2\times5\times8}{3^4\times4\times3\times2}x^4 = \frac{-10}{243}x^4$$

۱۰ـ گزینه «۲» با توجه به این‌که مشتق عامل مخرج یعنی $e^x + e^{-x}$ دقیقاً در صورت کسر قرار دارد، پس داریم:

$$e^x + e^{-x} = u \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} (e^x - e^{-x})\,dx = du$$

و حاصل انتگرال برابر است با:

$$\int \frac{du}{u} = \text{Ln}\,u \Rightarrow \text{Ln}(e^x + e^{-x}) + c = \text{Ln}(e^x + \frac{1}{e^x}) + c = \text{Ln}(\frac{e^{2x}+1}{e^x}) + c = \text{Ln}(e^{2x}+1) - \text{Ln}\,e^x + c = \text{Ln}(e^{2x}+1) - x + c$$

۱۱ـ گزینه «۴» مساحت بین دو تابع برابر است با:

$$S = \left|\int_a^b (y_2 - y_1)\,dx\right|$$

ابتدا باید محل تلاقی دو تابع را به‌دست آوریم (با مساوی قرار دادن دو تابع):

$$x^3 = x^2 \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$S = \left|\int_0^1 (x^3 - x^2)\,dx\right| + \left|\int_1^2 (x^3 - x^2)\,dx\right| = \left|(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3})_0^1\right| + \left|(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3})_1^2\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right| + \left|(4 - \frac{8}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{3})\right| = \left|\frac{-1}{12}\right| + \left|\frac{4}{3} - (\frac{-1}{12})\right| = \frac{1}{12} + \left|\frac{17}{12}\right| = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

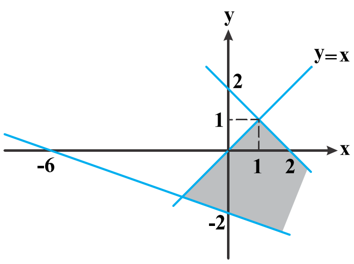
۱۲ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه مجموعه جواب دو دستگاه یکسان است، می‌توانیم از هر ۳ معادله دلخواه از بین ۶ معادله (به شرطی کـه وابسـتگی خطـی نداشته باشند)، پاسخ دستگاه را محاسبه کنیم. از این رو داریم:

$$\begin{cases} ۳x-y+۲z=-۱ \\ ۵x+y-z=۸ \\ y-۲z=۴ \end{cases} \xrightarrow{y=۲z+۴} \begin{cases} ۳x-۲z-۴+۲z=-۱ \\ ۵x+۲z+۴-z=۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-۱+۴}{۳}=۱ \\ ۵+z=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-۱ \\ y=۲ \end{cases}$$

حالا با توجه به دو معادله دارای ضرایب a و b خواهیم داشت:

$$ax+۲y+z=-۷ \Rightarrow a+۴-۱=a+۳=-۷ \Rightarrow a=-۱۰$$
$$bx+۳z=۲۱ \Rightarrow b-۳=۲۱ \Rightarrow b=۲۴$$
$$a+b=-۱۰+۲۴=۱۴$$

۱۳ـ گزینه «۳» این سؤال مربوط به درس تحقیق در عملیات می‌باشد که متأسفانه طراح محترم به دلیل وجود قید در صورت سؤال به اشتباه، آن را به جای سؤال‌های اکسترمم نسبی توابع مقید در نظر گرفته است. با توجه به اینکه تابع داده شده خطی است و ناحیه D از تقاطع خطوط راست به وجود آمده است، در این صورت نقاط اکسترمم تابع در گوشه‌های ناحیه (یعنی محل برخورد خطوط ناحیه) اتفاق می‌افتد. باید ناحیه‌های مشخص‌شده توسط نامعادله‌های داده‌شده را مشخص کنیم و ماکزیمم مقدار تابع را در نقاط برخورد خطها بیابیم.



$$f_{(max)} \xrightarrow{x=y=۱} ۳(۱)+۵(۱)=۸$$

۱۴ـ گزینه «۱» با توجه به این که بردار ستونی $v=\begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \end{bmatrix}$ در رابطهٔ $Av=\lambda v$ صدق می‌کند و λ مقادیر ویژه ماتریس می‌باشد، مقدارهای ویژه ماتریس از معادلهٔ مشخصهٔ $|A-\lambda I|=۰$ به‌دست می‌آیند.

$$|A-\lambda I|=۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & ۰ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵-\lambda & ۱ \\ ۱ & ۵-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=۰ \Rightarrow (۵-\lambda)(۵-\lambda)-۱=۰ \Rightarrow ۲۵+\lambda^۲-۱۰\lambda-۱=۰ \Rightarrow \lambda^۲-۱۰\lambda+۲۴=۰$$

۱۵ـ گزینه «۳» درایه واقع در سطر دوم و ستون اول ماتریس معکوس A را می‌خواهیم.

$$a_{ij}^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times\Delta_{ji}$$

دترمینان ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی برابر است با حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی.

$$|A|=۲\times۲\times۲\times۲=۱۶$$

$$\Delta_{۱۲}=(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}=-۱\times(۴-۰)=-۴$$

$$a_{۲۱}^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times\Delta_{۱۲}=\frac{۱}{۱۶}\times(-۴)=-\frac{۱}{۴}$$

سؤالات آزمون علوم اقتصادی ـ کارشناسی ارشد ۱۴۰۰

۱ـ اگر $x+iy=\dfrac{1-2e^{\frac{\pi}{2}i}}{1+2e^{\frac{\pi}{2}i}}$، آنگاه مقادیر x و y کدام‌اند؟

۱) $x=-\frac{3}{5}, y=-\frac{4}{5}$
۲) $x=-\frac{4}{5}, y=-\frac{3}{5}$
۳) $x=\frac{3}{5}, y=\frac{4}{5}$
۴) $x=\frac{4}{5}, y=\frac{3}{5}$

۲ـ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x-1}{x^3-9x}}$، کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $\mathbb{R}-\{0\}$
۳) $\{-3,0,3\}$
۴) $\mathbb{R}-\{-3,0,3\}$

۳ـ دامنهٔ تابع $y=\text{Ln}\dfrac{1+x}{1-2x}+\cos^{-1}(x-1)$، کدام است؟

۱) $[0,2)$
۲) $[0,\frac{1}{2})$
۳) $(-1,1)$
۴) $(-1,2)$

۴ـ حد تابع $\dfrac{x-1}{x-\sqrt{2-x}}$، هنگامی‌که x به عدد یک نزدیک می‌شود، کدام است؟

۱) 1
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{3}{2}$

۵ـ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{3}x\right)^{\frac{2}{x}}$، کدام است؟

۱) $e^{\frac{8}{3}}$
۲) $e^{\frac{3}{8}}$
۳) 1
۴) 0

۶ـ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+4}+\frac{1}{n^2+9}+\dots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$
۲) $\frac{\pi}{2}$
۳) 0
۴) ∞

۷ـ وضعیت تابع $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]-\left[-\frac{x}{2}\right]$ در نقطهٔ $x=2$، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) پیوسته نیست.
۲) پیوستگی راست دارد.
۳) پیوستگی چپ دارد.
۴) پیوسته است.

۸ـ اگر $f(x)=x+e^x$ باشد، حاصل عبارت $(f^{-1})'(1)$، کدام است؟

۱) 0
۲) -1
۳) $\frac{1}{2}$
۴) 1

۹ـ مشتق مرتبهٔ nام تابع $y=x\text{Ln}(x+1)$ به ازای $x=0$، کدام است؟

۱) $(-1)^n n!$
۲) $(-1)^{n-1}n(n-1)!$
۳) $(-1)^{n-1}(n-1)!$
۴) $(-1)^n n(n-2)!$

۱۰ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع استوانهٔ $x^2+2y^2=3$ و صفحهٔ $x+y+z=1$ در نقطهٔ $(1,-1,1)$، کدام است؟

۱) $\frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z-1}{-3}$
۲) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$
۳) $\frac{x-1}{-3}=y+1=\frac{z-1}{2}$
۴) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{1}$

۱۱ـ تابع تقاضای تولیدکننده‌ای $y=80-2x$ و هزینه متغیر بنگاه پنجاه درصد درآمد کل است. اگر هزینهٔ ثابت ۳۰۰ واحد پول باشد، ماکزیمم سود بنگاه کدام است؟

۱) ۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۲۰

۱۲ـ هرگاه $\begin{cases}x=t^2-2t\\y=t^2\end{cases}$، آنگاه مشتق y نسبت به x، کدام است؟

۱) $\frac{y-x-2}{y-x}$
۲) $\frac{y}{x-1}$
۳) $\frac{y-x}{y-x-2}$
۴) $\frac{x}{y-1}$

۱۳ـ مقدار تقریبی $\sqrt{(۱/۹)^{۳} - ۲(۲/۰۵)}$ با استفاده از تقریب مرتبهٔ اول (تقریب خطی)، کدام است؟

۱) $\frac{۶۹}{۴۰}$　　۲) $\frac{۶۸}{۴۰}$　　۳) $\frac{۶۷}{۴۰}$　　۴) $\frac{۶۶}{۴۰}$

۱۴ـ هرگاه $f(x,y) = xy$، در این صورت حاصل $\frac{\partial f}{\partial t}$ در امتداد مسیر $x = \cos t$ و $y = \sin t$، کدام است؟

۱) $\cos ۲t$　　۲) $\cos t$　　۳) $\sin ۲t$　　۴) $\sin t$

۱۵ـ کدام مورد برای $f(x,y) = xy$ در نقطهٔ $(۰,۰)$ درست است؟

۱) مینیمم نسبی　　۲) نقطهٔ زینی　　۳) ماکزیمم نسبی　　۴) هیچ‌کدام

۱۶ـ در مسئلهٔ بهینه‌سازی تابع $z = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{y}$ با شرط $x + y = ۲$، وضعیت تابع z در نقطهٔ $(۱,۱,۲)$، کدام است؟

۱) بحرانی　　۲) زینی　　۳) ماکزیمم　　۴) مینیمم

۱۷ـ فرض کنید $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ به‌طوری‌که $x = u^{۲} + v^{۲}$ و $y = uv$، حاصل $\frac{\partial u}{\partial y}$ به ازای $(u,v) = (-۲,۱)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $-\frac{۱}{۲}$　　۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۸ـ در معادلهٔ دیفرانسیل $y' = y^{۲} + xy^{۲}$ با شرط اولیه $y(۰) = -۱$، مجانب تابع $y(x)$ هنگامی که x به $+\infty$ می‌گراید، کدام است؟

۱) $y = ۰$　　۲) $y = -۱$　　۳) $y = -۲$　　۴) $y = ۱$

۱۹ـ جواب معادلهٔ دیفرانسیل $y' - ۳y = e^{۲x}$ با شرط اولیهٔ $y(۰) = ۰$، کدام است؟

۱) $y = e^{x}(e^{۲x} - ۱)$　　۲) $y = e^{x}(e^{۲x} + ۱)$　　۳) $y = e^{۲x}(e^{x} - ۱)$　　۴) $y = e^{۲x}(e^{x} + ۱)$

۲۰ـ اگر فرض کنیم سود به‌طور پیوسته به سرمایه‌ای اضافه و سرمایهٔ کل پس از گذشت ۱۰ سال دو برابر شود، نرخ سود کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}\text{Ln}۲$　　۲) $\frac{۱}{۵}\text{Ln}۲$　　۳) $\frac{۱}{۱۰}\text{Ln}۵$　　۴) $\frac{۱}{۵}\text{Ln}۵$

۲۱ـ فرض کنید $f(x) = \int \frac{\sqrt{x+۴}}{x}dx$ و $f(-۴) = ۰$. مقدار $f(۵)$، کدام است؟

۱) $\text{Ln}۵$　　۲) $۲ - \text{Ln}۳$　　۳) $۳ - \text{Ln}۲$　　۴) $۶ - ۲\text{Ln}۵$

۲۲ـ در کدام بازه، تقعر منحنی $f(x) = \int_{۰}^{x} \frac{t^{۲}}{t^{۲} + t + ۲}dt$ به سمت پایین است؟

۱) $(۰,۴)$　　۲) $(۰,۲)$　　۳) $(-۴,۰)$　　۴) $(-۲,۰)$

۲۳ـ حاصل $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}|x - y|dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۱}{۳}$　　۳) $\frac{۱}{۴}$　　۴) $\frac{۱}{۵}$

۲۴ـ بردارهای $\vec{v}_۱ = (-۱,۲,-۳)$، $\vec{v}_۲ = (-۲,۰,-۴)$ و $\vec{v}_۳ = (۰,۰,-۱)$ مفروض‌اند. اگر $A = \begin{pmatrix} \vec{v}_۱ \\ \vec{v}_۲ \\ \vec{v}_۳ \end{pmatrix}$ یک ماتریس ۳×۳ باشد، کدام عبارت زیر برای سه بردار موردنظر و دترمینان ماتریس A، درست است؟

۱) وابسته خطی هستند و $|A| \neq ۰$　　۲) وابسته خطی هستند و $|A| = ۰$

۳) مستقل خطی هستند و $|A| = ۰$　　۴) مستقل خطی هستند و $|A| \neq ۰$

۲۵ـ فرض کنید $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ مقادیر ویژه (ریشه‌های معادلهٔ مشخصه) مثبت ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & m \end{bmatrix}$ با شرط $\lambda_۱^{۲}\lambda_۲ + \lambda_۱\lambda_۲^{۲} = ۲۰$ باشند. کسینوس زاویهٔ بین بردارهای ویژه (مشخصه) متناظر، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$　　۳) $\frac{۱}{\sqrt{۸}}$　　۴) $\frac{۱}{\sqrt{۶}}$

پاسخنامه آزمون علوم اقتصادی ــ کارشناسی ارشد ۱۴۰۰

۱ــ گزینه «۱» با توجه به این که $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ می‌باشد، پس داریم:

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i=i$$

پس با جایگذاری i در رابطه‌ی داده شده داریم:

$$x+iy=\frac{1-2i}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{(1-2i)^2}{1-4i^2}=\frac{1+4i^2-4i}{1-4(-1)}\Rightarrow x+iy=\frac{1+4(-1)-4i}{5}=\frac{-3-4i}{5}=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$$

پس $x=-\frac{3}{5}$ و $y=-\frac{4}{5}$ می‌باشند.

۲ــ گزینه «۴» فقط کافی است ریشه‌های مخرج کسر را از $\mathbb{R}$ کم کنیم.

$$x^3-9x=0\Rightarrow x(x^2-9)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=\pm 3$$

پس دامنه‌ی تابع برابر $R-\{-3,0,3\}$ می‌باشد.

۳ــ گزینه «۲» اولاً باید جلوی Ln بزرگتر از صفر باشد. برای تعیین علامت یک عبارت کسری باید ریشه‌های ساده صورت و مخرج کسر را بیابیم و مقادیری که به ازای آن‌ها عبارت جلوی Ln بزرگ‌تر از صفر می‌باشد را قبول کنیم.

$$\frac{1+x}{1-2x}>0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

x		-1		$\frac{1}{2}$	
$P>0$	$-$	$\circ$	$+$		$-$

$$\underbrace{\quad\quad}_{\text{ق ق}}\qquad -1<x<\frac{1}{2}$$

از طرفی باید جلوی $\cos^{-1}$ در بازه $[-1,1]$ باشد، یعنی داریم:

$$-1\le x-1\le 1\Rightarrow 0\le x\le 2$$

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده برابر $[0,\frac{1}{2})$ می‌باشد که همان دامنه‌ی تابع می‌باشد.

۴ــ گزینه «۲» حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است که با هوپیتال آن را رفع ابهام می‌کنیم.

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

۵ــ گزینه «۳» گزینه صحیح، گزینه (۳) می‌باشد که متأسفانه سنجش گزینه (۱) را به اشتباه به عنوان گزینه صحیح انتخاب کرده است. حالت مبهم $(\infty)^0$ می‌باشد که برای رفع ابهام از این حالت باید از حد داده شده Ln بگیریم.

$$y=(1+\frac{4}{3}x)^{\frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}Lny=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}Ln(1+\frac{4}{3}x)=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\infty}Lny=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2\times\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}x}}{1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{8}{3}}{1+\frac{4}{3}x}\right)=0$$

$$Lny=0\Rightarrow y=e^0=1$$

۶ـ گزینه «۱» با استفاده از فرمول حد مجموع انتگرال معین داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

پس در مخرج کسرها ابتدا باید از n^2 فاکتور بگیریم:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\frac{1}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}+\cdots+\frac{1}{n^2(1+1)}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{4}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+1}\right)$$

$$\Rightarrow \text{حاصل حد}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{Arctan}x\Big|_0^1=\operatorname{Arctan}(1)-\operatorname{Arctan}(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

۷ـ گزینه «۱» باید حد چپ و راست و مقدار تابع را در $x=2$ به‌دست آوریم.

$$f(2)=\left[\frac{2}{2}\right]-\left[-\frac{2}{2}\right]=1-(-1)=2$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\left[\frac{2^+}{2}\right]-\left[-\frac{2^+}{2}\right]=[1^+]-[-(1^+)]=1-(-2)=3\quad,\quad \lim_{x\to2^-}f(x)=\left[\frac{2^-}{2}\right]-\left[-\frac{(2)^-}{2}\right]=[1^-]-[-(1^-)]=0-(-1)=1$$

چون هیچ کدام از حدهای چپ و راست با مقدار تابع برابر نیستند، پس تابع هیچ نوع پیوستگی در $x=2$ ندارد.

۸ـ گزینه «۳» با استفاده از فرمول مشتق تابع معکوس داریم:

$$(f^{-1})'_{(b)}=\frac{1}{f'(a)}$$

که در این رابطه $b=f(a)$ می‌باشد.

با توجه به این‌که طول تابع معکوس برابر ۱ می‌باشد، عرض تابع اصلی را برابر ۱ قرار می‌دهیم و داریم: $1=x+e^x\Rightarrow x=0$

پس داریم: $f'(x)=1+e^x\xrightarrow{x=0}1+e^0=1+1=2$

در مرحله آخر، مشتق تابع معکوس برابر است با: $(f^{-1})'_{(1)}=\frac{1}{f'_{(0)}}=\frac{1}{2}$

۹ـ گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: باید ۲ یا ۳ مرتبه از تابع داده شده مشتق بگیریم و سپس به جای x مقدار صفر را قرار دهیم و سپس از روی گزینه‌ها به گزینه‌ی صحیح برسیم.

$$y^{(1)}=1\times\operatorname{Ln}(x+1)+\frac{1}{x+1}(x)=\operatorname{Ln}(x+1)+\frac{x}{x+1}$$

$$y^{(2)}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$y^{(3)}=\frac{-1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}\xrightarrow{x=0}-1-2=-3$$

فقط در گزینه (۴) به ازای $n=3$ به مقدار -3 می‌رسیم.

$$\text{گزینه (4)}\Rightarrow(-1)^3\,3(3-2)!=-3$$

روش دوم: با توجه به مشتق دوم به دست آمده باید چند مرتبه دیگر از تابع مشتق دوم بگیریم تا بتوانیم مشتق مرتبه‌ی nام را از روی آن بیابیم.

$$y=(x+1)^{-1}+(x+1)^{-2}\Rightarrow y^{(1)}=-(x+1)^{-2}-2(x+1)^{-3}$$

$$y^{(2)}=2(x+1)^{-3}+6(x+1)^{-4}\Rightarrow y^{(3)}=-6(x+1)^{-4}-24(x+1)^{-5}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)}+(-1)^n(n+1)!(x+1)^{-(n+2)}$$

می‌بینیم که در مشتق مرتبه دوم قسمت اول ضریب ۲ و قسمت دوم ضریب ۶ دارند و در مشتق مرتبه سوم قسمت اول ضریب ۶ و قسمت دوم ضریب ۲۴ دارند و این یعنی در مشتق مرتبه nاُم قسمت اول ضریب $n!$ و قسمت دوم ضریب $(n+1)!$ دارد.

$$x=0 \Rightarrow y^{(n)}=(-1)^n n!+(-1)^n(n+1)!$$

مشتق $(n-2)$اُم y'' همان مشتق nاُم تابع y می‌باشد. پس داریم:

$$y^{(n)}=(-1)^n((n-2)!+(n-1)!)=(-1)^n((n-2)!+(n-1)(n-2)!)=(-1)^n n(n-2)!$$

۱۰ـ گزینه «۱» باید ابتدا بردارهای گرادیان دو رویه را به‌دست آوریم و آنها را درهم ضرب خارجی کنیم تا بردار هادی خط مماس به‌دست بیاید و از روی آن بتوانیم معادله‌ی خط مماس را بنویسیم.

$$f: x^2+2y^2-3=0 \to \vec{\nabla}f:(2x,4y,0)\xrightarrow{(1,-1,1)}(2,-4,0)$$

$$g: x+y+z-1=0 \to \vec{\nabla}g:(1,1,1)$$

$$\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}(-4-0)-\vec{j}(2-0)+\vec{k}(2+4)=-4\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$$

پس معادلهٔ خط مماس برابر است با:

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{6}\xrightarrow{\times(-2)}\frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z-1}{-3}$$

۱۱ـ گزینه «۳» درآمد برابر است با:

$R(x)=$ معادله تقاضا $\times$ تعداد کالا

$$R(x)=x(80-2x)=80x-2x^2$$

از طرفی هزینه کل برابر است با:

$$C(x)=a+bx$$

که a هزینه ثابت و bx هزینه متغیر است، پس داریم:

$$C(x)=\frac{1}{2}(80x-2x^2)+300=40x-x^2+300$$

پس سود برابر است با:

سود = درآمد − هزینه

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

$$P(x)=80x-2x^2-(40x-x^2+300)=-x^2+40x-300$$

$P'(x)=0 \Rightarrow -2x+40=0 \Rightarrow x=20 \Rightarrow$ ماکزیمم سود $=-400+800-300=100$

۱۲ـ گزینه «۳» با استفاده از مشتق توابع پارامتری داریم:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{2t-2}$$

چون گزینه‌ها برحسب x و y می‌باشند، باید به رابطه‌ی به‌دست آمده برسیم.

$$\begin{cases}y-x=t^2-(t^2-2t)=2t\\ y-x-2=2t-2\end{cases}\Rightarrow\frac{y-x}{y-x-2}=\frac{2t}{2t-2}$$

۱۳ـ گزینه «۳» با استفاده از فرمول مقدار تقریبی توابع دو متغیره داریم:

$$f(x_\circ+\Delta x\,,y_\circ+\Delta y)\simeq f(x_\circ,y_\circ)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

$$\begin{cases}x_\circ=۲\\ \Delta x=-\dfrac{۱}{۱\circ}\end{cases}\quad \text{و}\quad \begin{cases}y_\circ=۲\\ \Delta y=\dfrac{۵}{۱\circ\circ}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^۳-۲y}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳-۲y}}\xrightarrow{(۲,۲)}\dfrac{۱۲}{۴}=۳\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-۲}{۲\sqrt{x^۳-۲y}}\xrightarrow{(۲,۲)}\dfrac{-۲}{۴}=\dfrac{-۱}{۲}\end{cases}$$

$$f(۲,۲)=\sqrt{(۲)^۳-۲(۲)}=\sqrt{۸-۴}=۲$$

$$\text{مقدار تقریبی تابع}\simeq ۲+۳\,(-\frac{۱}{۱\circ})-\frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۱\circ\circ})\simeq ۲-\frac{۳}{۱\circ}-\frac{۵}{۲\circ\circ}=\frac{۴\circ\circ-۶\circ-۵}{۲\circ\circ}=\frac{۳۳۵}{۲\circ\circ}=\frac{۶۷}{۴\circ}$$

۱۴ـ گزینه «۱» چون مشتق تابع f نسبت به متغیر t را می‌خواهیم بیابیم و f وابسته به دو متغیر x و y می‌باشد، باید از مشتق زنجیره‌ای استفاده کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial t}=(\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial t})+(\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial t})=(y\times(-\sin t))+(x\times\cos t)=(\sin t)(-\sin t)+(\cos t\times\cos t)=-\sin^۲ t+\cos^۲ t=\cos ۲t$$

توجه داشته باشید که $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$ می‌باشد.

۱۵ـ گزینه «۲» باید از تابع f نسبت به x و y جداگانه مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases}f_x=y=\circ\\ f_y=x=\circ\end{cases}\Rightarrow(\circ,\circ)\quad \text{نقطه‌ی بحرانی}$$

اکنون باید مقدار $\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^۲$ را بیابیم.

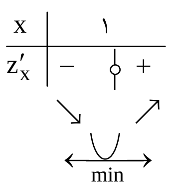
$$\begin{cases}f_{xx}=\circ\\ f_{xy}=۱\\ f_{yy}=\circ\end{cases}\Rightarrow\Delta=\circ-(۱)^۲=-۱<\circ\ \Rightarrow\ \text{نقطه بحرانی، نقطه زینی است.}$$

۱۶ـ گزینه «۴» با استفاده از شرط داده شده تابع z را برحسب یک متغیر x می‌کنیم و از آن نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$x+y=۲\ \Rightarrow y=۲-x$$

$$z=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{y+x}{xy}=\frac{(۲-x)+x}{x(۲-x)}=\frac{۲}{۲x-x^۲}\Rightarrow z'_x=\frac{\circ-(۲-۲x)\times ۲}{(۲x-x^۲)^۲}=\circ\ \Rightarrow ۲-۲x=\circ\ \Rightarrow x=۱$$

با استفاده از تعیین علامت مشتق نوع نقطه‌ی اکسترمم را به‌دست می‌آوریم.



با توجه به این که در سمت چپ $x=۱$ تابع نزولی و در سمت راست آن تابع صعودی است پس $x=۱$ نقطه مینیمم نسبی تابع می‌باشد.

۱۷ـ گزینه «۴» با توجه به این‌که u و v برحسب متغیرهای x و y می‌باشند و خود u و v نیز متغیرهای توابع f و g می‌باشند، داریم:

$$\begin{cases} f: u^2+v^2-x=0 \\ g: uv-y=0 \end{cases}$$

با استفاده از مشتق جزئی توابع چند متغیره داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}0 & 2v\\ -1 & u\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u & 2v\\ v & u\end{vmatrix}}\xrightarrow{(-2,1)}-\frac{\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

۱۸ـ گزینه «۱» گزینه (۱)، گزینه‌ی صحیح می‌باشد که سنجش به اشتباه گزینه (۳) را به عنوان گزینه صحیح انتخاب کرده است. به جای y' قرار می‌دهیم $\frac{dy}{dx}$ و سپس معادله را برحسب x و y مرتب می‌کنیم تا بتوانیم از آن برحسب x و y جداگانه انتگرال بگیریم و به تابع $y(x)$ برسیم.

$$\frac{dy}{dx}=y^2(1+x)\ \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=(1+x)dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int y^{-2}dy=\int(1+x)dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1}=x+\frac{x^2}{2}+c\ \Rightarrow -\frac{1}{y}=x+\frac{x^2}{2}+c \xrightarrow{y(0)=-1} \frac{-1}{-1}=0+\frac{0}{2}+c \Rightarrow c=1$$

پس داریم:

$$-\frac{1}{y}=x+\frac{x^2}{2}+1\ \Rightarrow -\frac{1}{y}=\frac{2x+x^2+2}{2}\ \Rightarrow y=\frac{-2}{x^2+2x+2}\ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}y=\frac{\text{عدد}}{+\infty}=0\ \Rightarrow y=0$$

۱۹ـ گزینه «۳» در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به فرم $y'+yf(x)=q(x)$ همواره جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$y=e^{-\int f(x)\,dx}\left(\int q(x)e^{\int f(x)\,dx}dx+c\right)$$

پس داریم:

$$y=e^{-\int(-3)\,dx}\left(\int e^{2x}\times e^{\int(-3)dx}dx+c\right)$$

$$y=e^{3x}\left(\int(e^{2x}\times e^{-3x})\,dx+c\right)=e^{3x}\left(\int e^{-x}dx+c\right)$$

$$y=e^{3x}(-e^{-x}+c)\ \xrightarrow{y(0)=0} 0=e^{0}(-e^{0}+c)\ \Rightarrow c=1$$

پس داریم:

$$y=e^{3x}(-e^{-x}+1)=e^{3x}-e^{2x}=e^{2x}(e^{x}-1)$$

۲۰ـ گزینه «۱» با استفاده از رابطه‌ی $A_t=A_0e^{kt}$ (k ثابت رشد می‌باشد) داریم:

$$2A_0=A_0e^{10k}\ \Rightarrow 2=e^{10k}\ \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} \text{Ln}2=10k\text{Ln}e\ \Rightarrow \text{Ln}2=10k\ \Rightarrow k=\frac{1}{10}\text{Ln}2$$

۲۱ـ گزینه «۴» با تغییر متغیر $u=\sqrt{x+4}$ داریم:

$$u^2=x+4 \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} 2udu=dx \;,\; x=u^2-4$$

$$f(u)=\int\frac{u}{u^2-4}\times 2udu=2\int\frac{u^2}{u^2-4}du=2\int(1+\frac{4}{u^2-4})\,du$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی $\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|$ داریم:

$$=2(u+4(\frac{1}{4})(Ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|))=2u+2Ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+c$$

$$x=-4 \Rightarrow u=\sqrt{-4+4}=0 \Rightarrow 0=0+2Ln1+c \Rightarrow c=0$$

$$x=5 \Rightarrow u=\sqrt{5+4}=3 \Rightarrow 6+2Ln\frac{1}{5}=6-2Ln5$$

۲۲ـ گزینه «۳» باید $f''(x)<0$ باشد، با استفاده از فرمول مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$f'(x)=\frac{x^2}{x^2+x+2} \Rightarrow f''(x)=\frac{2x(x^2+x+2)-(2x+1)x^2}{(x^2+x+2)^2}<0$$

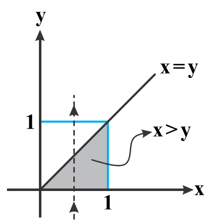
$$\xrightarrow{\text{باید}} 2x^3+2x^2+4x-2x^3-x^2<0 \Rightarrow x^2+4x<0$$

$$\Rightarrow x(x+4)<0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=-4\end{cases} \Rightarrow$$

x		-4		0	
$P<0$	+		−		+

$-4<x<0$: قق

۲۳ـ گزینه «۲» حاصل انتگرال زیر خط $x=y$ را به‌دست می‌آوریم و با توجه به متقارن بودن ناحیه انتگرال‌گیری، حاصل را دو برابر می‌کنیم.



$$\text{حاصل}=2\times\int_0^1\int_0^x(x-y)dydx=2(\int(xy-\frac{y^2}{2})\Big|_0^x dx)$$

$$=2\int_0^1(x^2-\frac{x^2}{2})\,dx=2\times(\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{6})\Big|_0^1=2(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})=2(\frac{2-1}{6})=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

۲۴ـ گزینه «۴» اگر دترمینان مربوط به سه بردار مساوی صفر باشد، در این صورت می‌گوییم سه بردار وابسته خطی هستند، در غیر این صورت مستقل خطی هستند. پس داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&-3\\-2&0&-4\\0&0&-1\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-1\times(0-0)-2(2-0)-3(0-0)=-4$$

چون $|A|=-4\neq 0$ پس سه بردار مستقل خطی هستند.

۲۵ـ گزینه «۲» ابتدا با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی $|A-\lambda I|=0$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس را به‌دست می‌آوریم.

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}4&1\\0&m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-\lambda&1\\0&m-\lambda\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow(4-\lambda)(m-\lambda)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=4\\\lambda_2=m\end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر λ در رابطه‌ی داده شده مقدار m را می‌یابیم و داریم:

$$(4)^2m+4m^2=20\Rightarrow4m^2+16m-20=0\Rightarrow m^2+4m-5=0$$

$$(m+5)(m-1)=0\Rightarrow\begin{cases}m=-5 & (\text{غ ق ق})\\m=1 & \xrightarrow{\lambda>0}\lambda_2=1\end{cases}$$

اکنون با استفاده از رابطه $Av=\lambda v$ مقادیر v_1 و v_2 را می‌یابیم.

$$\lambda=4\Rightarrow\begin{bmatrix}4&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\Rightarrow4v_1+v_2=4v_1\Rightarrow v_2=0$$

پس $v_2=0$ و v_1 دلخواه می‌باشد؛ بنابراین در نظر می‌گیریم: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

اگر $\lambda=1\Rightarrow\begin{bmatrix}4&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\Rightarrow4v_1+v_2=v_1\Rightarrow v_2=-3v_1$

پس در نظر می‌گیریم: $\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$

کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $(1,-3)$ و $(1,0)$ برابر است با:

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}=\frac{1+0}{\sqrt{1+0}\times\sqrt{1+9}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$