سؤالات آزمون سراسری ۹۶

سؤالات رشته‌ی MBA

۱ـ فرض کنید z_1 , z_2 و z_3 اعداد مختلط و متمایز باشند که رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه در رأس z_1 است. کدام‌یک از روابط زیر صحیح است؟

۱) $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 0$
۲) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$
۳) $(z_1 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 = 0$
۴) $(z_1 - z_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = 0$

۲ـ طول قوس منحنی $\cosh x$ برای $0 \le x \le 2$ کدام است؟

۱) $\sinh(2)$
۲) $\cosh(2)$
۳) $\sinh(2) - 1$
۴) $\cosh(2) - 1$

۳ـ بازه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x-3)^n \mathrm{Ln}\, n}{(3n+1)5^n}$ برابر است با:

۱) $[-1,4)$
۲) $(-1,4]$
۳) $[0,3)$
۴) $(0,3]$

۴ـ سری‌های $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ به ترتیب .... و .... می‌باشند.

۱) واگرا ـ واگرا
۲) همگرا ـ همگرا
۳) واگرا ـ همگرا
۴) همگرا ـ واگرا

۵ـ مقدار $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\sin x + \cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2} - \mathrm{Ln}(\frac{3}{2})$
۲) $\frac{\pi}{2} + \mathrm{Ln}(\frac{3}{2})$
۳) $\mathrm{Ln}(\frac{3}{2})$
۴) $\frac{\pi}{2}$

۶ـ معادله صفحه قائم بر خم C با معادله‌ی برداری $\vec{r}(t) = 4\cosh t\,\hat{i} + 8\sinh t\,\hat{j} + e^t\hat{k}$ در نقطه نظیر $t = \mathrm{Ln}2$ کدام گزینه است؟

۱) $x\mathrm{Ln}2 + y + z = 1$
۲) $8x + 4y + z = 65$
۳) $4x + 8y + z = 12$
۴) $3x + 10y + 2z = 79$

۷ـ مشتق سویی تابع $f(x,y,z) = x^2 + 3xy + xyz^2$ در نقطه $P(1,1,-1)$ و در جهت بردار یکه از نقطه‌ی P به نقطه‌ی $Q(2,2,-3)$ کدام است؟

۱) $\frac{12}{\sqrt{3}}$
۲) $\frac{12}{\sqrt{6}}$
۳) $\frac{14}{\sqrt{3}}$
۴) $\frac{14}{\sqrt{6}}$

۸ـ فرض کنید C منحنی حاصل از برخورد دو رویه‌ی $\phi = \theta$ و $\rho = 1 + \cos\theta$ در مختصات کروی باشد. اگر دستگاه TNB برای منحنی C را در $\theta = \frac{\pi}{2}$ تشکیل دهیم T کدام است؟

۱) $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
۲) $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
۳) $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$
۴) $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$

۹ـ فرض کنید S رویه‌ی $-1 \le z \le 2$ و $x^2 + y^2 = 4$ باشد.

اگر $\vec{F}(x,y,z) = (zy^2 + \cos(y^2) + x^3)\hat{i} + (x^3 + yz)\hat{j} + (\sin(xy) + 3y^2z)\hat{k}$، در این صورت شار برونسوی گذرنده از رویه‌ی S کدام است؟

۱) 98π
۲) 96π
۳) 94π
۴) 90π

۱۰ـ فرض کنید R ناحیه‌ای در $\mathbb{R}^3$ باشد که با نامساوی‌های $r \le 1$ و $0 \le z \le 5 - r^2$ مشخص می‌شود. مقدار $\iiint_R (x^2 + y^2)dxdydz$ کدام است؟

۱) 2π
۲) $\frac{7\pi}{3}$
۳) $\frac{13\pi}{6}$
۴) 0

۱۱ـ ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $y = x^2$ و $y = -x + 2$ و محور xها را حول محور yها دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟

۱) 2π
۲) $\frac{5\pi}{3}$
۳) $\frac{11\pi}{6}$
۴) $\frac{13\pi}{6}$

۱۲ـ مقدار حد زیر کدام است؟

$$\lim_{n\to +\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^8+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^8+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^8+n^5}}\right)$$

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) $+\infty$

۱۳ـ کدام گزینه به ترتیب در مورد $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$ و $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\frac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2}$ صحیح است؟

۱) حد اولی موجود است ولی دومی حد ندارد.
۲) اولی حد ندارد ولی دومی دارای حد است.
۳) هر دو مورد دارای حد نیستند.
۴) هر دو مورد حد دارند.

۱۴ـ ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=(Lnx+Lny+3Lnz)^5$ بر بخشی از کره $x^2+y^2+z^2=125$ که در آن $x>0, y>0, z>0$ به‌صورت $(LnA)^5$ می‌باشد، مقدار A کدام گزینه است؟

۱) $\sqrt{3}(25)^5$ ۲) $\sqrt{3}(5)^5$ ۳) $3\sqrt{3}(25)^5$ ۴) $3\sqrt{3}(5)^5$

۱۵ـ اگر C اشتراک نیم‌کره $x^2+y^2+z^2=6x$ ، $z>0$ و استوانه $x^2+y^2=4x$ باشد، مقدار $\oint_C (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$ برابر کدام گزینه است؟ (جهت C به‌گونه‌ای است که جهت حرکت تصویر آن روی صفحه‌ی xy در جهت مثلثاتی است.)

۱) 12π ۲) 18π ۳) 24π ۴) 36π

۱۶ـ حاصل $\frac{dy}{dx}$ در عبارت $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+\sin t^3}}+\int_y^2 \sin t^2 dt=0$ کدام است؟

۱) $y'=\frac{-1}{\sin(2y)\sqrt{1+\sin^3 x}}$ ۲) $y'=\frac{1}{\sin(2y)\sqrt{1+\sin^3 x}}$ ۳) $y'=\frac{-1}{\sin y^2\sqrt{1+\sin x^3}}$ ۴) $y'=\frac{1}{\sin y^2\sqrt{1+\sin x^3}}$

۱۷ـ مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\pi Lnx}}dx$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\pi}$ ۲) e ۳) 1 ۴) این انتگرال تعریف نشده است.

۱۸ـ دامنه‌ی همگرایی سری $\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{(n-k)!}{n!k!}(x-a)^{n+k}$ کدام است؟ (k یک عدد اول است.)

۱) $|x-a|<k$ ۲) $|x-a|<1$ ۳) $|x-a|<\frac{1}{k}$ ۴) مجموعه اعداد حقیقی.

۱۹ـ می‌دانیم که: $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx=\frac{e^{-am}}{a^2}$. مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{x\sin 3x}{x^2+16}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}e^{-12}$ ۲) $\frac{\pi}{8}e^{-12}$ ۳) $4\pi e^{-12}$ ۴) $8\pi e^{-12}$

۲۰ـ حاصل عبارت $s=\frac{1+(i^{1391}+i^{1392}+i^{1393}+i^{1394}+i^{1395})}{1-(i^{2013}+i^{2014}+i^{2015}+i^{2016}+i^{2017})}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) i ۳) -1 ۴) $-i$

۲۱ـ انحنای منحنی $\begin{cases} x=t+\sin t\\ y=t-\sin t\\ z=\sqrt{2}\cos t\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲۲ـ اگر $u=\frac{x^2y^2-y^4}{x^2+y^2}$، مقدار $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $4u$ ۲) $3u$ ۳) $2u$ ۴) u

۲۳ـ اگر $I=\int_1^2 f(u)du$ و $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<xy<2, 1<x^2-y^2<5\}$ باشد، آنگاه $\iint_D f(xy)(x^2+y^2)dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{I}{4}$ ۲) $2I$ ۳) I ۴) $\frac{I}{2}$

۲۴ـ حاصل انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ وقتی $\vec{F}(x,y,z)=y\sin z\vec{i}+3xy\vec{j}+tgx^2\vec{k}$ کدام است؟ S مرز ناحیه‌ی: $x^2+y^2\le 4, 0\le z\le 3, y\ge 0$ و $x\ge 0$ می‌باشد.

۱) -48 ۲) -24 ۳) 24 ۴) 48

۲۵ـ مقدار انتگرال $\int_1^e \frac{1}{x}\sqrt{(Lnx)^2+(Lnx)^3}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{4\sqrt{2}+4}{15}$ ۲) $\frac{4+\sqrt{2}}{15}$ ۳) $\frac{4\sqrt{2}+1}{15}$ ۴) $\frac{1+\sqrt{2}}{15}$

۲۶ـ به ازای کدام عدد حقیقی C انتگرال ناسره $\int_0^\infty [\frac{C}{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}]dx$ همگراست و مقدار انتگرال چقدر است؟

۱) $C=\frac{1}{2}$ و مقدار $-Ln2$ ۲) $C=1$ و مقدار $-Ln2$ ۳) $C=\frac{1}{2}$ و مقدار $\frac{1}{2}$ ۴) $C=1$ و مقدار $\frac{1}{2}$

۲۷ـ نقطه تماس صفحه افقی مماس بر رویه $z=x^4-4xy^3+6y^2-2$ کدام است؟

۱) $(-1,0,-1)$ ۲) $(0,1,4)$ ۳) $(1,1,1)$ ۴) $(1,-1,9)$

۲۸ـ اگر $u(x,y,t)=\frac{1}{t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$، آنگاه مقدار $\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{x^2+y^2}{4t^3}e^{\frac{-x^2-y^2}{4t}}$ ۲) $\frac{2}{t^2}e^{\frac{-x^2-y^2}{4t}}$ ۳) $-\frac{2}{t^2}e^{\frac{-x^2-y^2}{4t}}$ ۴) 0

۲۹ـ اگرمسیر C با رئوس (۳,۰)و (۶,۰)و (۱۷,۵) در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت باشد، آنگاه $\int_C (7y+e^{x^2})dx+(19x+e^{y^2})dy$ برابر است با:

۱) 180 ۲) 90 ۳) 45 ۴) $\frac{45}{2}$

۳۰ـ هرگاه $\overrightarrow{r(t)}=e^t\vec{i}+e^t\vec{j}+3\vec{k}$ ، $0\le t\le 1$، $\vec{F}(x,y,z)=ye^{x^2}\vec{i}+xe^{y^2}\vec{j}+\cosh xy^3\vec{k}$ باشد، انتگرال $\int_C \vec{F}.\overrightarrow{dr}$ چقدر است؟

۱) e^e-1 ۲) e^e-e ۳) $e^{e^2}-1$ ۴) $e^{e^2}-e$

پاسخنامه رشته‌ی MBA

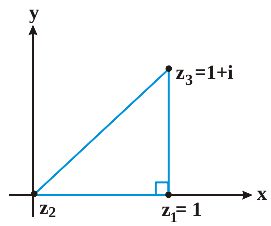
۱ـ گزینه «۳» مثلث مورد نظر متساوی‌الساقین است، بنابراین داریم: $|z_۲ - z_۱| = |z_۳ - z_۱|$

از طرفی قائم‌الزاویه هم هست، پس داریم: $(z_۲ - z_۱) = e^{i\frac{\pi}{۲}}(z_۳ - z_۱)$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم: $(z_۲ - z_۱)^۲ = e^{i\pi}(z_۳ - z_۱)^۲ \Rightarrow (z_۲ - z_۱)^۲ = -(z_۳ - z_۱)^۲ \Rightarrow (z_۲ - z_۱)^۲ + (z_۳ - z_۱)^۲ = ۰$

این معادله را می‌توان به صورت مقابل هم نوشت: $(z_۱ - z_۲)^۲ + (z_۱ - z_۳)^۲ = ۰$

روش رد گزینه: می‌توانیم نقاط $z_۱ = ۱$ ،$z_۲ = ۰$ ،$z_۳ = ۱ + i$ را در نظر بگیریم که در تمام شرایط مسأله صدق می‌کنند.



در این صورت داریم:

$$z_۱^۲ = ۱ \ , \ z_۲^۲ = ۰ \ , \ z_۳^۲ = (۱+i)^۲ = ۲i$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) غلط هستند. برای گزینه‌ی (۴) داریم:

$$(z_۱ - z_۲)^۲ + (z_۳ - z_۲)^۲ = ۱^۲ + (۱+i)^۲ = ۱ + ۲i \neq ۰$$

بنابراین گزینه (۴) هم غلط است و گزینه (۳) جواب است: $(z_۱ - z_۲)^۲ + (z_۱ - z_۳)^۲ = ۱^۲ + (-i)^۲ = ۱ - ۱ = ۰$ = مقدار گزینه (۳)

۲ـ گزینه «۱» از فرمول طول قوس برای تابع $f(x)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \cosh x \Rightarrow L = \int_۰^۲ \sqrt{۱ + (f'(x))^۲}\, dx \Rightarrow L = \int_۰^۲ \sqrt{۱ + \sinh^۲ x}\, dx = \int_۰^۲ \cosh x\, dx \Rightarrow L = \sinh x \Big|_۰^۲ = \sinh ۲$$

یادآوری: $۱ + \sinh^۲ x = \cosh^۲ x$

۳ـ گزینه «۲» (البته طراح باید از $n = ۱$ سری را می‌نوشت تا Lnn بی‌معنی نشود). در داخل پرانتز از ۲ فاکتور می‌گیریم تا پرانتز به صورت $(x-c)^n$ در بیاید:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(-۱)^n ۲^n Lnn}{(۳n+۱)۵^n}(x - \frac{۳}{۲})^n$$

حالا برای شعاع همگرایی داریم:

$$\frac{۱}{R} = |\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{۲^n Lnn}{(۳n+۱)۵^n}}| \Rightarrow \frac{۱}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{۲}{۵}\sqrt[n]{\frac{Lnn}{۳n+۱}} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow R = \frac{۵}{۲}$$

توجه کنید که می‌دانیم: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{Lnn} = ۱$ و $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۳n+۱} = ۱$ است. درضمن وسط بازه‌ی همگرایی $c = \frac{۳}{۲}$ است. پس بازه‌ی همگرایی به صورت زیر است:

$$(c - R \ , \ c + R) = (\frac{۳}{۲} - \frac{۵}{۲} \ , \ \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۲}) = (-۱ \ , \ ۴)$$

حالا مرزهای بازه را بررسی می‌کنیم. با جایگذاری $x = ۴$ در سری به سری عددی مقابل می‌رسیم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(-۱)^n ۲^n Lnn}{(۳n+۱)۵^n}(۴ - \frac{۳}{۲})^n = \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(-۱)^n Lnn}{۳n+۱}$$

این سری متناوب همگرا است، زیرا دنباله‌ی $\frac{Lnn}{۳n+۱}$ نزولی و همگرا به صفر است. بنابراین سری در $x = ۴$ همگرا است. درنتیجه گزینه (۲) درست است و نیازی به بررسی مرز دیگر بازه نداریم.

۴ـ گزینه «۲» برای سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{n}{n+۱})^{n^۲}$ با استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n}{n+۱})^{n^۲}} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+۱})^n = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n}{n+۱}} = e^{-۱}$$

چون $L = \frac{۱}{e} < ۱$، لذا این سری همگرا است. در مورد سری دوم یعنی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n}}$ کار خیلی ساده است. این یک سری متناوب است و دنباله‌ی $\frac{۱}{\sqrt{n}}$ نزولی و همگرا به صفر است، پس این سری در شرط همگرایی سری‌های متناوب صدق می‌کند. پس این سری هم همگرا است.

۵ـ گزینه «۲» فرض می‌کنیم $u = 2\sin x + 3\cos x$ باشد. حالا صورت کسر را برحسب u و u' می‌نویسیم:

$$u' = 2\cos x - 3\sin x$$

$$\text{صورت کسر} = Au + Bu'$$

$$\Rightarrow 5\sin x + \cos x = A(2\sin x + 3\cos x) + B(2\cos x - 3\sin x) \Rightarrow 5\sin x + \cos x = (2A - 3B)\sin x + (3A + 2B)\cos x$$

با توجه به تساوی طرفین داریم:

$$\begin{cases} 2A - 3B = 5 \\ 3A + 2B = 1 \end{cases}$$

از حل این دستگاه به جواب‌های $A = 1$ و $B = -1$ می‌رسیم. در نتیجه داریم:

$$\text{صورت کسر} = 5\sin x + \cos x = u - u'$$

بنابراین داریم:

$$\int \frac{5\sin x + \cos x}{2\sin x + 3\cos x}dx = \int \frac{u - u'}{u}dx = \int (1 - \frac{u'}{u})dx = x - \operatorname{Ln}|u|$$

حالا با جایگذاری u و قرار دادن حدود انتگرال داریم:

$$I = (x - \operatorname{Ln}|2\sin x + 3\cos x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Ln}2 + \operatorname{Ln}3 = \frac{\pi}{2} + \operatorname{Ln}\frac{3}{2}$$

۶ـ گزینه «۴» ابتدا به ازای $t = \operatorname{Ln}2$ نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) از منحنی را به دست می‌آوریم (از رابطه‌ی $e^{\operatorname{Ln}a} = a$ هم استفاده می‌کنیم):

$$\begin{cases} x_0 = 4\cosh(\operatorname{Ln}2) = \frac{4}{2}(e^{\operatorname{Ln}2} + e^{-\operatorname{Ln}2}) = 2(2 + \frac{1}{2}) = 5 \\ y_0 = 8\sinh(\operatorname{Ln}2) = \frac{8}{2}(e^{\operatorname{Ln}2} - e^{-\operatorname{Ln}2}) = 4(2 - \frac{1}{2}) = 6 \\ z_0 = e^{\operatorname{Ln}2} = 2 \end{cases}$$

حالا بردار $\vec{r}'(t)$ را حساب می‌کنیم. این بردار، می‌تواند بردار نرمال صفحه‌ی قائم بر منحنی باشد.

$$\vec{r}'(t) = (4\sinh t\ ,\ 8\cosh t\ ,\ e^t)$$

با جایگذاری $t = \operatorname{Ln}2$ داریم:

$$\vec{r}'(\operatorname{Ln}2) = (4\sinh(\operatorname{Ln}2)\ ,\ 8\cosh(\operatorname{Ln}2)\ ,\ e^{\operatorname{Ln}2}) = (\frac{4}{2}(2 - \frac{1}{2})\ ,\ \frac{8}{2}(2 + \frac{1}{2})\ ,\ 2) = (3\ ,\ 10\ ,\ 2)$$

معادله‌ی صفحه‌ی قائم بر منحنی به این صورت نوشته می‌شود:

$$3(x - 5) + 10(y - 6) + 2(z - 2) = 0 \Rightarrow 3x + 10y + 2z = 79$$

توجه: فقط با یافتن بردار نرمال هم می‌توانستیم تشخیص دهیم که گزینه (۴) صحیح است.

۷ـ گزینه «۴» برداری که از نقطه‌ی $P(1,1,-1)$ به نقطه‌ی $Q(2,2,-3)$ می‌رود را می‌نویسیم:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (2-1\ ,\ 2-1\ ,\ -3+1) = (1, 1, -2)$$

این بردار را به اندازه‌اش تقسیم می‌کنیم تا بردار یکه به دست آید:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(1, 1, -2)}{\sqrt{6}}$$

حالا بردار گرادیان f را در نقطه‌ی P حساب می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}f = (f_x, f_y, f_z) = (2x + 3y + yz^2\ ,\ 3x + xz^2\ ,\ 2xyz)$$

در نقطه P داریم: $\vec{\nabla}f = (6, 4, -2)$ و لذا طبق فرمول مشتق سوئی داریم:

$$\text{مشتق سوئی} = \frac{\vec{\nabla}f.\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{6 + 4 + 4}{\sqrt{6}} = \frac{14}{\sqrt{6}}$$

۸ـ گزینه «۳» ابتدا معادله‌ی پارامتری منحنی C را می‌نویسیم. طبق فرمول‌های مختصات کروی داریم:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

حالا با جایگذاری $\phi = \theta$ و $\rho = 1 + \cos\theta$ داریم:

$$\vec{R}(\theta): \begin{cases} x = (1 + \cos\theta)\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\sin 2\theta \\ y = (1 + \cos\theta)\sin\theta\sin\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\sin 2\theta \\ z = (1 + \cos\theta)\cos\theta \end{cases}$$

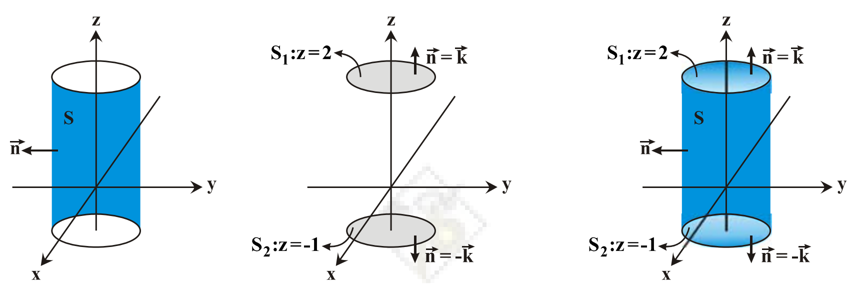
بردار $\vec{T}$ از رابطه‌ی $\vec{T}=\dfrac{\vec{R}'(\theta)}{|\vec{R}'(\theta)|}$ به دست می‌آید، پس ابتدا $\vec{R}'(\theta)$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}'(\theta):\begin{cases} x'(\theta)=\frac{1}{2}[-\sin\theta\sin 2\theta+2\cos 2\theta(1+\cos\theta)] \\ y'(\theta)=\frac{1}{2}[-\sin\theta\sin 2\theta+2\cos 2\theta(1+\cos\theta)] \\ z'(\theta)=-\sin\theta\cos\theta-\sin\theta(1+\cos\theta)\end{cases} \Rightarrow \vec{R}'(\frac{\pi}{2})=x'(\frac{\pi}{2})\vec{i}+y'(\frac{\pi}{2})\vec{j}+z'(\frac{\pi}{2})\vec{k} \Rightarrow \vec{R}'(\frac{\pi}{2})=-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

پس داریم:

$$\vec{T}=\frac{(-1,-1,-1)}{\sqrt{3}}=(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$$

۹ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. سطح S بسته نیست. با اضافه کردن صفحات $S_1: z=-1$ و $S_2: z=2$ آن را به سطحی بسته تبدیل می‌کنیم.



روی سطح SUS_1US_2 چون سطح بسته است، از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$I_1=\iint_{SUS_1US_2}\vec{F}.\vec{n}\,ds=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})\,dv=\iiint_V(3x^2+z+3y^2)\,dv$$

با استفاده از مختصات استوانه‌ای داریم:

$$I_1=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-1}^2(3r^2+z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2(3r^3z+r\frac{z^2}{2})\Big|_{-1}^2 dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2(9r^3+\frac{3}{2}r)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}(\frac{9}{4}r^4+\frac{3}{4}r^2)\Big|_0^2 d\theta=(2\pi)(36+3)=78\pi$$

حالا روی سطح $S_1: z=-1$ داریم $\vec{n}=-\vec{k}$، پس داریم:

$$I_2=\iint_{S_1}\vec{F}.(-\vec{k})\,d\sigma=-\iint_{S_1}(\sin xy-3y^2)\,d\sigma$$

و روی سطح $S_2: z=2$ داریم $\vec{n}=\vec{k}$، پس داریم:

$$I_3=\iint_{S_2}\vec{F}.\vec{k}\,d\sigma=\iint_{S_2}(\sin xy+6y^2)\,d\sigma$$

تصویر سطوح S_1 و S_2 بر صفحه‌ی xy همان ناحیه‌ی درون دایره‌ی $x^2+y^2=4$ است که آن را D می‌نامیم.

$$I_2+I_3=\iint_D(-\sin xy+3y^2+\sin xy+6y^2)\,dydx=\int_0^{2\pi}\int_0^2 9r^2\sin^2\theta\,r\,dr\,d\theta=(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta)(\int_0^2 9r^3dr)=\pi(36)=36\pi$$

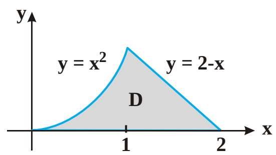
جواب صحیح برای این مسأله، به این صورت است:

$$I=I_1-I_2-I_3=78\pi-36\pi=42\pi$$

۱۰ـ گزینه «۳» از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم؛ کران‌های z واضح هستند. حدود r هم با توجه به آن‌که همواره $r\geq 0$ است، به صورت $0\leq r\leq 1$ هستند. در ضمن در ناحیه‌ی $0\leq r\leq 1$ یعنی ناحیه درون دایره واحد داریم: $0\leq\theta\leq 2\pi$

$$I=\iiint_R(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{5-r^2}r^2\,r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3(5-r^2)\,dr\,d\theta=2\pi\left[5\times\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1=2\pi(\frac{5}{4}-\frac{1}{6})$$

$$\Rightarrow I=2\pi(\frac{30-4}{24})=2\pi\frac{26}{24}=\frac{13\pi}{6}$$



۱۱ـ گزینه «۳» از روش دیسک استفاده می‌کنیم. ابتدا محل برخورد $y=x^2$ و $y=2-x$ را تعیین می‌کنیم که به وضوح در $x=1$ است. وقتی خط $y=2-x$ حول محور yها دوران می‌کند، شعاع دوران $x=2-y$ است و هنگامی که منحنی $y=x^2$ حول محور y دوران می‌کند، شعاع دوران $x=\sqrt{y}$ است. در نقطه $x=1$ داریم $y=1$، پس در کل این ناحیه $0\le y\le 1$ است.

$$V=\pi\int_0^1 (f^2(y)-g^2(y))\,dy=\pi\int_0^1 [(2-y)^2-\sqrt{y}^{\,2}]\,dy=\pi\int_0^1 (4-5y+y^2)\,dy=\pi\left[4y-\frac{5}{2}y^2+\frac{y^3}{3}\right]_0^1 \Rightarrow V=\frac{11}{6}\pi$$

۱۲ـ گزینه «۲» با دقت به مخرج کسرها می‌بینیم که همه آن‌ها به فرم $\sqrt{n^8+k}$ هستند که در اولین جمله $k=1$ و در دومین جمله $k=2$ و به همین ترتیب در آخرین جمله $k=n^5$ است، بنابراین تعداد جملات این مجموع برابر است با تعداد اعداد طبیعی $k=1,2,\dots,n,\dots,n^5$ یعنی تعداد آن‌ها n^5 تا است. برای حل این سؤال از قضیه‌ی ساندویچ استفاده می‌کنیم:

جمله‌ی $\frac{1}{\sqrt{n^8+1}}$ بزرگ‌ترین جمله و $\frac{1}{\sqrt{n^8+n^5}}$ کوچک‌ترین جمله است، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{n}\times\frac{n^5}{\sqrt{n^8+n^5}}\le\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^8+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^8+n^5}}\right)\le\frac{1}{n}\times\frac{n^5}{\sqrt{n^8+1}}$$

اکنون از کران‌های بالا و پایین حد می‌گیریم $(n\to\infty)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\frac{n^5}{\sqrt{n^8+1}}\simeq\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^4}=1\quad;\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\frac{n^5}{\sqrt{n^8+n^5}}\simeq\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^4}=1$$

دقت کنید که در محاسبه‌ی حدود بالا از قاعده‌ی بزرگ‌ترین درجه استفاده کرده‌ایم. حالا طبق قضیه‌ی ساندویچ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^8+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^8+n^5}}\right)=1$$

توضیح تکمیلی: دقت کنید این سؤال را بدون نیاز به قضیه‌ی ساندویچ هم می‌شد جواب داد. از همان اول می‌توانیم بگوییم، مخرج کسرها تماماً هم‌ارز n^4 هستند و چون تعداد جملات n^5 تاست، لذا داریم: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^5}{n^4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{n^5}{n^5}=1$ = حاصل حد

البته در برخی سؤالات خاص، استفاده از قضیه‌ی ساندویچ ضروری می‌باشد و در واقع قضیه‌ی ساندویچ حل و بررسی کلی‌تری برای این سؤال است.

۱۳ـ گزینه «۱» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: در مورد اولین حد با استفاده از هم‌ارزی سینوسی در صفر داریم:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}\simeq\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=1$$

در مورد حد دوم، روی مسیر $x=1$ داریم:

$$\text{مقدار حد}=\lim_{y\to1}\frac{y-1-y+1}{1+y^2-2-2y+2}=\lim_{y\to1}\frac{0}{y^2-2y+1}=0$$

مقدار حد صفر است، زیرا صورت صفر مطلق می‌شود. اما روی مسیر $y=x$ داریم:

$$\text{مقدار حد}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x-x+1}{x^2+x^2-2x-2x+2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{2(x^2-2x+1)}=\frac{1}{2}$$

بنابراین این حد وجود ندارد، زیرا روی دو مسیر مختلف به جواب‌های متفاوت رسیدیم.

روش دوم: برای حد دوم می‌توانیم از تغییرمتغیر $u=x-1$ و $v=y-1$ هم استفاده کنیم (دقت کنید که مخرج را می‌توان به شکل $(x-1)^2+(y-1)^2$ و صورت را می‌توان به صورت $(y-1)$ و $(x-1)$ نوشت):

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\left(\frac{xy-x-y-1}{x^2+y^2-2x-2y+2}\right)=\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}=\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{uv}{u^2+v^2}$$

تنها ریشه‌ی مخرج $(0,0)$ می‌باشد و چون درجه صورت کسر با درجه هر یک از جملات مخرج برابر است، پس طبق نکته حد وجود ندارد.

۱۴ـ گزینه «۴» تابع f را می‌توان به صورت مقابل نوشت: $f(x,y,z)=(\text{Ln}(xyz^3))^5$

گفته شده ماکزیمم تابع روی کره $x^2+y^2+z^2=125$ در ربع اول به صورت $(\text{Ln}A)^5$ است؛ برای یافتن مقدار A می‌توانیم بیشترین مقدار عبارت $w=xyz^3$ را روی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=125$ به دست بیاوریم. (البته با شرط $x>0$، $y>0$ و $z>0$).

از تناسب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{yz^3}{2x}=\frac{xz^3}{2y}=\frac{3xyz^2}{2z}$$

با انجام طرفین وسطین داریم:

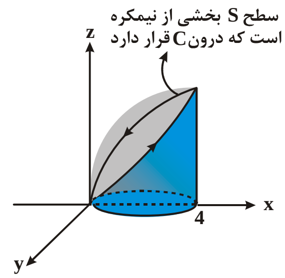
$$\begin{cases}2y^2z^3=2x^2z^3 \Rightarrow y^2=x^2 \Rightarrow y=x\\ 2yz^4=6x^2yz^2 \Rightarrow z^2=3x^2 \Rightarrow z=\sqrt{3}x\end{cases}$$

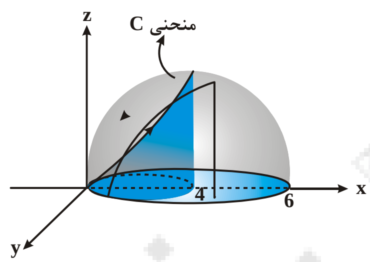
(دقت کنید که می‌دانیم x، y و z همگی مثبت هستند)

با جایگذاری $y=x$ و $z=\sqrt{3}x$ در معادله‌ی کره داریم: $x^2+y^2+z^2=125 \Rightarrow x^2+x^2+3x^2=125 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=5\ ,\ y=5\ ,\ z=5\sqrt{3}$

با جایگذاری در w داریم: $w=xyz^3=5\times5\times5^3\times3\sqrt{3}=3\sqrt{3}(5)^5 \Rightarrow A=3\sqrt{3}(5)^5$

۱۵ـ گزینه «۳» منحنی C را در شکل زیر نشان داده‌ایم. فرض کنیم سطح S بخشی از نیم‌کره‌ی $x^2+y^2+z^2=6x$ $(z\geq0)$ باشد که C مرز آن است. انتگرال خط را می‌توان از هر دو روش محاسبه کرد ولی بهتر است. از قضیه‌ی استوکس کمک بگیریم.





میدان برداری $\vec{F}=(y^2+z^2,x^2+z^2,x^2+y^2)$ را داریم، بنابراین $\text{curl}\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}=2(y-z)\vec{i}-2(x-z)\vec{j}+2(x-y)\vec{k}$$

با توجه به معادله $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6x=0$ و نظر به این که $\vec{p}=\vec{k}$، لذا $|\vec{\nabla}g.\vec{p}|=2z$ خواهیم داشت:

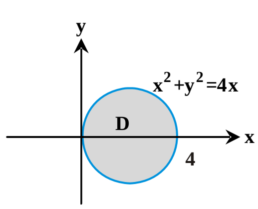
$$\vec{n}d\sigma=\pm\frac{(2x-6,2y,2z)}{2z}dA=\frac{(x-3,y,z)}{z}dydx$$

بنابراین اگر D تصویر S بر صفحه‌ی xoy باشد که توسط استوانه‌ی $x^2+y^2=4x$ مشخص می‌شود، داریم:

$$I=\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_D\frac{2(y-z)(x-3)-2y(x-z)+2z(x-y)}{z}dydx=2\iint_D\frac{yx-3y-zx+3z-yx+yz+zx-zy}{z}dydx$$

$$I=2\iint_D\frac{3(z-y)}{z}dydx=6\iint_D(1-\frac{y}{z})dydx$$

از معادله‌ی S داریم $z=\sqrt{6x-x^2-y^2}$. پس می‌توان نوشت: $I=6\iint_D(1-\frac{y}{\sqrt{6x-x^2-y^2}})dydx$



معادله‌ی $x^2+y^2=4x$ با تبدیل y به $-y$ تغییر نمی‌کند. بنابراین ناحیه‌ی D نسبت به محور xها تقارن دارد. همچنین تابع $\frac{y}{\sqrt{6x-x^2-y^2}}$ نسبت به y فرد است، بنابراین انتگرال آن روی D صفر می‌شود و بنابراین داریم: $I=6\iint_D(1)\,dydx=6\times(\text{مساحت } D)=6(4\pi)=\mathbf{24\pi}$

توجه: در حل این سؤال می‌توانید به روشی دیگر، حجم محاسبات را کاهش دهید. یعنی برای g از معادله‌ی $x^2+y^2=4x$ استفاده می‌کنیم؛ یعنی داریم:

$$g:x^2+y^2+z^2-6x=4x+z^2-6x=0 \Rightarrow g:z^2-2x=0$$

و همچنین در محاسبه‌ی $\vec{F}$ به جای x^2+y^2 معادل آن $4x$ و به جای y^2+z^2 معادل آن از نیم‌کره یعنی «$6x-x^2$» قرار دهیم. به این ترتیب حجم محاسبات و محاسبه‌ی انتگرال دوگانه راحت‌تر می‌شود.

۱۶ـ گزینه «۴» با استفاده از فرمول مشتق‌گیری از انتگرال، از طرفین تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم. دقت کنید که y تابعی برحسب x است.

$$\int_{0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{1+\sin t^{3}}}+\int_{y}^{2}\sin t^{2}\,dt=0\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x}\frac{1}{\sqrt{1+\sin x^{3}}}+0-y'\sin(y^{2})=0\Rightarrow y'=\frac{1}{\sin(y^{2})\sqrt{1+\sin x^{3}}}$$

۱۷ـ گزینه «۳» ابتدا از $\sqrt{\pi}$ در مخرج فاکتور می‌گیریم:

$$I=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{-\operatorname{Ln}x}}$$

حالا با تغییر متغیر $t=-\operatorname{Ln}x$ داریم: $x=e^{-t}$، لذا $dx=-e^{-t}dt$. از طرفی به ازای $x=0$ داریم: $t=\infty$ و به ازای $x=1$ داریم: $t=0$.

$$I=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{0}\frac{-e^{-t}dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt\xrightarrow{\text{فرمول برحسب تابع گاما}}I=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(-\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\times\sqrt{\pi}=1$$

۱۸ـ گزینه «۲» ابتدا شعاع همگرایی سری $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(n-k)!}{n!k!}(x-a)^{n}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right|=\frac{1}{R}\Rightarrow\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1-k)!}{(n+1)!k!}\times\frac{n!k!}{(n-k)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1-k)(n-k)!}{(n+1)n!k!}\times\frac{n!k!}{(n-k)!}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1-k}{n+1})=1$$

پس $\frac{1}{R}=1$ و لذا $R=1$ می‌باشد.

طبق نکته می‌دانیم اگر شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}(x-x_{0})^{n}$ برابر R باشد، در این صورت شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}(x-x_{0})^{kn+p}$ برابر $\sqrt[k]{R}$ می‌باشد.

پس شعاع همگرایی سری $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(n-k)!}{n!k!}(x-a)^{n+k}$ نیز برابر $\sqrt[k]{1}$ می‌باشد و با توجه به این که طبق صورت سؤال k عددی اول است، پس شعاع همگرایی همان ۱ می‌باشد. همچنین با توجه به این که مرکز بازه‌ی همسایگی a می‌باشد، پس فاصله همگرایی برابر با $|x-a|<1$ است.

توضیح: با توجه به گزینه‌ها، طراح سؤال نخواسته که دو سر بازه همگرایی را بررسی کنیم. اما اگر بخواهیم کامل‌تر پاسخ دهیم باید نقاط $x=a\pm1$ را در سری قرار داده و همگرایی سری را در این نقاط هم بررسی کنیم. با جایگذاری $x=a+1$ به سری $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(n-k)!}{n!k!}$ می‌رسیم. با ساده کردن صورت و مخرج و خارج کردن جمله‌ی ثابت $k!$ داریم: $\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$. چون k عددی اول است، پس $k\geq2$ است در نتیجه درجه‌ی مخرج حداقل ۲ است و سری همگراست. با جایگذاری $x=a-1$ هم به سری متناوب $\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$ می‌رسیم که همگراست؛ زیرا دنباله‌ی $a_{n}=\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$ نزولی و همگرا به صفر است. پس سری در هر دو سمت بازه همگراست و جواب دقیق‌تر به صورت $|x-a|\leq1$ خواهد بود.

۱۹ـ گزینه «۲» با توجه به این‌که در مخرج کسر انتگرالِ خواسته شده $x^{2}+16$ داریم و این ترکیب با قرار دادن $a=4$ در تساوی داده شده در صورت سؤال ایجاد می‌شود، پس ظاهراً نباید عملیاتی انجام دهیم که مخرج فرض داده شده تغییر کند، اما در صورت کسر sin داریم و در فرض cos، پس متوجه می‌شویم که باید نسبت به متغیر m مشتق بگیریم تا sin در صورت ایجاد شود.

از طرفین رابطه‌ی اول نسبت به پارامتر m مشتق می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{-x\sin mx}{x^{2}+a^{2}}dx=\frac{-ae^{-am}}{a^{2}}$$

حالا با جایگذاری $a=4$ و $m=3$ داریم:

$$-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin 3x}{x^{2}+16}dx=-\frac{e^{-12}}{4}\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin 3x}{x^{2}+16}dx=\frac{\pi}{8}e^{-12}$$

توضیح: صورت سؤال دارای ایراد است! در واقع فرض داده شده به ما آن است که $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^{2}+a^{2}}dx=\frac{e^{-am}}{a^{2}}$، اما شکل درست تساوی باید به شکل مقابل باشد (سمت راست به جای a^{2} باید a نوشته می‌شد.)

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^{2}+a^{2}}dx=\frac{e^{-am}}{a}$$

حالا با مشتق‌گیری نسبت به پارامتر m داریم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{-x\sin mx}{x^2+a^2}dx=\frac{-ae^{-am}}{a}$$

با جایگذاری $a=4$ و $m=3$ خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty \frac{x\sin 3x}{x^2+16}dx=\frac{\pi}{2}e^{-12}$$

۲۰ـ گزینه «۱» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: ابتدا با فاکتورگیری از توان کوچک‌تر در صورت و مخرج داریم:

$$S=\frac{1+i^{1391}(1+i+i^2+i^3+i^4)}{1-i^{2013}(1+i+i^2+i^3+i^4)}$$

اکنون با توجه به آن‌که $i^2=-1$ است، داریم $i^3=-i$ و $i^4=1$ و با این جایگذاری‌ها خواهیم داشت:

$$S=\frac{1+i^{1391}(1+i-1-i+1)}{1-i^{2013}(1+i-1-i+1)}=\frac{1+i^{1391}}{1-i^{2013}}\Rightarrow S=\frac{1+(i^2)^{695}\times i}{1-(i^2)^{1006}\times i}=\frac{1+(-1)^{695}i}{1-(-1)^{1006}i}\Rightarrow S=\frac{1-i}{1-i}=1$$

روش دوم: می‌توانستیم از این نکته استفاده کنیم که مجموع هر ۴ توان متوالی i برابر با صفر است. بنابراین داریم:

$$i^{1392}+i^{1393}+i^{1394}+i^{1395}=0 \quad,\quad i^{2014}+i^{2015}+i^{2016}+i^{2017}=0$$

در نتیجه صورت $S=\frac{1+i^{1391}}{1-i^{2013}}$ است. حالا با تقسیم توان‌ها بر ۴ و استفاده از این نکته که $i^4=1$ است داریم:

$$S=\frac{1+i^{4\times 347+3}}{1-i^{4\times 503+1}}=\frac{1+i^3}{1-i}=\frac{1-i}{1-i}=1$$

۲۱ـ گزینه «۱» معادله‌ی پارامتری این منحنی به این صورت است:

$$\vec{R}(t)=(t+\sin t,t-\sin t,\sqrt{2}\cos t)$$

بردارهای $\vec{R}'(t)$ و $\vec{R}''(t)$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}'(t)=(1+\cos t,1-\cos t,-\sqrt{2}\sin t)$$
$$\vec{R}''(t)=(-\sin t,\sin t,-\sqrt{2}\cos t)$$

با توجه به آن‌که طراح سؤال مقدار خاصی برای t نداده است، معلوم می‌شود انحنای این منحنی برای همه نقاط ثابت است، پس برای ساده‌تر شدن محاسبات، انحنای آن را در $t=0$ حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}'=(2,0,0) \quad,\quad \vec{R}''=(0,0,-\sqrt{2})$$

ضرب خارجی این دو بردار را نیاز داریم:

$$\vec{R}'\times\vec{R}''=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&0&0\\0&0&-\sqrt{2}\end{vmatrix}=2\sqrt{2}\vec{j}$$

طبق فرمول انحنا داریم:

$$\kappa=\frac{|\vec{R}'\times\vec{R}''|}{|\vec{R}'|^3}=\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2^2+0+0})^3}=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

۲۲ـ گزینه «۳» یک نمونه خیلی ساده از فرمول اویلر است. درجه‌ی جملات صورت برابر با ۴ و درجه‌ی جملات مخرج برابر با ۲ است، پس این کسر همگن از مرتبه‌ی $n=4-2=2$ است. طبق فرمول اویلر داریم:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=nu\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u$$

۲۳ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. معادله‌ی مرزهای ناحیه‌ی D به این صورت هستند:

$$x^2-y^2=1\ ,\ x^2-y^2=5\ ,\ xy=1\ ,\ xy=2$$

با تغییر دستگاه $u=xy$ و $v=x^2-y^2$ معادله‌ی مرزهای جدید به صورت مقابل درمی‌آیند:

$$v=1\ ,\ v=5\ ,\ u=1\ ,\ u=2$$

ژاکوبی دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{uv}=\frac{1}{J_{xy}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}y&x\\2x&-2y\end{vmatrix}}=\frac{1}{-2(y^2+x^2)}$$

قدر مطلق ژاکوبی برابر با $|J_{uv}|=\frac{1}{2(y^2+x^2)}$ است.

با ضرب قدر مطلق ژاکوبی در انتگرال و نوشتن حدود u و v داریم:

$$\iint_D f(xy)(x^2+y^2)\,dy\,dx=\int_1^2\int_1^5 f(u)\frac{(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}dv\,du=\frac{1}{2}\int_1^2\int_1^5 f(u)\,dv\,du=\frac{1}{2}\int_1^2 f(u)[v]_1^5du=\frac{4}{2}\int_1^2 f(u)\,du=2I$$

توضیح: طراح سؤال با همین ذهنیت به سؤال پاسخ داده بود و کلید هم بر همین اساس اعلام شده است. این سؤال دارای یک ایراد علمی است و جواب واقعی آن $4I$ می‌شود. علت این امر آن است که معادلات $u = xy$ و $v = x^2 - y^2$ در ناحیه‌ی D یک‌به‌یک نیستند. برای مثال نقاط $A(\frac{3}{2}, 1)$ و $B(-\frac{3}{2}, -1)$ هر دو در ناحیه‌ی D قرار دارند و هر دوی آن‌ها به نقطه‌ی $u = \frac{3}{2}, v = \frac{5}{4}$ تبدیل می‌شوند. نباید دو نقطه متفاوت به یک نقطه‌ی یکسان تبدیل شوند. در واقع معادلات $u = xy$ و $v = x^2 - y^2$ با تبدیل همزمان x به $-x$ و y به $-y$ تغییری نمی‌کنند، بنابراین ناحیه‌ی D از دو بخش متقارن در ربع اول و سوم تشکیل می‌شود. پس باید در پایان، جواب به دست آمده را دو برابر کنیم. به همین دلیل جواب واقعی $4I = 2 \times 2I$ خواهد بود.

۲۴ـ گزینه «۳» S مرز (پوسته) یک ناحیه است، پس یک سطح بسته است. از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم. ناحیه درون S را با V نشان می‌دهیم:

$$I = \iint_S \vec{F}.\vec{n}\, d\sigma = \iiint_V (\operatorname{div}\vec{F})\, dv = \iiint_V (0 + 3x + 0)\, dz\, dy\, dx$$

بهتر است از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. در ربع اول از دایره‌ی $x^2 + y^2 = 4$ داریم $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ و $0 \le r \le 2$. حدود z هم به صورت $0 \le z \le 3$ مشخص شده‌اند:

$$I = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\int_0^3 (r\cos\theta)\, r\, dz\, dr\, d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 3r^2\cos\theta\, dr\, d\theta = 3\big[\sin\theta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \big[r^3\big]_0^2 = 24$$

۲۵ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $t = \operatorname{Ln} x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $x = e^t$ است. پس $dx = e^t dt$ است. $1 \le x \le e \Rightarrow 0 \le t \le 1$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^t}\sqrt{t^2 + t^3}\, e^t dt = \int_0^1 \sqrt{t^2 + t^3}\, dt = \int_0^1 \sqrt{t^2(1+t)}\, dt = \int_0^1 t\sqrt{1+t}\, dt$$

با تغییر متغیر $u = \sqrt{1+t}$ داریم: $t = u^2 - 1$ و $dt = 2u\, du$ در ضمن $0 \le t \le 1$، پس $1 \le u \le \sqrt{2}$ است.

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} (u^2 - 1)u(2u\, du) = 2\int_1^{\sqrt{2}} (u^4 - u^2)\, du = 2\left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\left[\frac{4\sqrt{2} - 1}{5} - \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}\right] = \frac{4\sqrt{2} + 4}{15}$$

۲۶ـ گزینه «۲» ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$I = \int_0^\infty \frac{c\sqrt{x^2+1} - x - 1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

وقتی $x \to \infty$ با استفاده از قاعده‌ی بزرگ‌ترین درجه داریم:

$$\frac{c\sqrt{x^2+1} - x - 1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} \simeq \frac{(c-1)x}{x^2} = \frac{c-1}{x}$$

درجه مخرج برابر با یک است، پس انتگرال ناسره در $x \to \infty$ واگرا می‌شود، مگر آن‌که $c - 1 = 0$ باشد، یعنی به ازای $c = 1$ انتگرال همگرا است.

اکنون به ازای $c = 1$ می‌خواهیم مقدار انتگرال را تعیین کنیم.

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx = \left[\operatorname{Ln}(x+1) - \operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2+1})\right]_0^\infty = \left[\operatorname{Ln}\left(\frac{x+1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right)\right]_0^\infty = \operatorname{Ln}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) - \operatorname{Ln}\left(\frac{0+1}{0 + \sqrt{0+1}}\right)$$

$$\stackrel{\text{هم‌ارزی}}{=\!=} \operatorname{Ln}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+x}\right) = \operatorname{Ln}\frac{1}{2} = -\operatorname{Ln}2$$

این کار شاید کمی وقت‌گیر و نیازمند حفظ بودن فرمول انتگرال $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ باشد، اما در حقیقت با توجه به گزینه‌ها رسیدن به جواب بسیار ساده است.

توجه کنید که در بازه‌ی $0 < x < \infty$ داریم:

$$x + 1 = \sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} > \sqrt{x^2+1}$$

پس $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ به عبارتی داریم:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0$$

پس جواب انتگرال باید منفی باشد، بنابراین گزینه (۲) درست است.

۲۷ـ گزینه «۳» بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر رویه، همان بردار گرادیان است. به عبارتی داریم: $\vec{n}=(f_x,f_y,f_z)$

اگر بخواهیم صفحه مماس بر رویه یک صفحه افقی به صورت $z=\bar{k}$ باشد، باید بردار نرمال این صفحه به صورت $\vec{n}=(۰,۰,f_z)$ باشد، یعنی باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} f_x=۰ \\ f_y=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴x^۳-۴y^۳=۰ \\ -۱۲xy^۲+۱۲y=۰ \end{cases}$$

از معادله‌ی اول داریم $y=x$ و با جایگذاری در معادله‌ی دوم داریم: $-۱۲x^۳+۱۲x=۰ \Rightarrow ۱۲x(-x^۲+۱)=۰$

اگر $x=۰$ باشد، داریم $y=۰$ و $z=-۲$. این نقطه در گزینه‌ها نیست. اگر $x=۱$ باشد داریم $y=۱$ و $z=۱$، پس نقطه‌ی $(۱,۱,۱)$ جواب است.

۲۸ـ گزینه «۴» ابتدا $\frac{\partial u}{\partial x}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{۲x}{۴t}\times\frac{۱}{t}e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۴t}}$$

با مشتق‌گیری مجدد نسبت به x داریم:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}=-\frac{۲}{۴t^۲}e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۴t}}+(\frac{۲x}{۴t})^۲\frac{۱}{t}e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۴t}} \Rightarrow \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}=\frac{۱}{t^۲}e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۴t}}(-\frac{۱}{۲}+\frac{x^۲}{۴t})$$

به علت تقارن x و y در ضابطه‌ی این تابع، مشتق دوم نسبت به y هم مانند مشتق دوم نسبت به x است، فقط جای x و y عوض می‌شود:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=\frac{۱}{t^۲}e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۴t}}(-\frac{۱}{۲}+\frac{y^۲}{۴t})$$

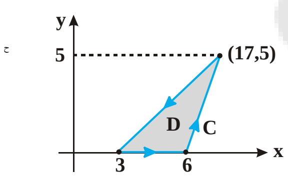
اکنون $\frac{\partial u}{\partial t}$ را هم حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{۱}{t^۲}e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۴t}}+\frac{۱}{t}\times(\frac{x^۲+y^۲}{۴t^۲})e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۴t}} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{۱}{t^۲}e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۴t}}(-۱+\frac{x^۲+y^۲}{۴t})$$

با جایگذاری نتایج به دست آمده در عبارت خواسته شده داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}-\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=\frac{۱}{t^۲}e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۴t}}(-۱+\frac{x^۲+y^۲}{۴t}+\frac{۱}{۲}-\frac{y^۲}{۴t}+\frac{۱}{۲}-\frac{x^۲}{۴t})=۰$$

۲۹ـ گزینه «۲» ناحیه‌ی درون مرز بسته‌ی C را با D نشان می‌دهیم. حالا از قضیه‌ی گرین استفاده می‌کنیم:



$$P=۷y+e^{x^۲}\ ,\ Q=۱۹x+e^{y^۲} \Rightarrow Q_x-P_y=۱۹-۷=۱۲$$

$$I=\iint_D(Q_x-P_y)\,dy\,dx=\iint_D ۱۲\,dy\,dx \Rightarrow I=۱۲\times(\text{مساحت } D)$$

ناحیه‌ی D مثلثی با قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۵ است، پس مساحت آن برابر با $\frac{۱۵}{۲}=\frac{۳\times۵}{۲}$ است.

$$\Rightarrow I=۱۲\times\frac{۱۵}{۲}=۶\times۱۵=۹۰$$

توضیح: بهتر بود طراح سؤال قید می‌کرد که مسیر موردنظرش مرز یک مثلث با رئوس داده شده است. البته استفاده از واژه‌ی (رأس) به ما نشان می‌دهد که منظور طراح سؤال یک n ضلعی با این رئوس است و در نتیجه مسیر موردنظر مرز یک مثلث است و بسته خواهد بود.

۳۰ـ گزینه «۴» منحنی $r(t)$ بسته نیست، زیرا به ازای $t=۰$ و $t=۱$ به دو نقطه مختلف می‌رسیم. میدان $\vec{F}$ هم به وضوح پایستار نیست. پس از معادلـه‌ی پارامتری مسیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=e^t \\ y=e^t \\ z=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=e^t\,dt \\ dy=e^t\,dt \\ dz=۰ \end{cases}\quad ,\quad ۰\le t\le ۱$$

با جایگذاری در انتگرال داریم:

$$I=\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_C ye^{x^۲}dx+xe^{y^۲}dy+\cosh(xy^۳)dz=\int_۰^۱(e^te^{e^{۲t}}e^t+e^te^{e^{۲t}}e^t+۰)dt=\int_۰^۱ ۲e^{۲t}e^{e^{۲t}}dt=e^{e^{۲t}}\Big|_۰^۱=e^{e^۲}-e$$

توجه کنید که در آخرین انتگرال با فرض $u=e^{۲t}$ داریم $du=۲e^{۲t}dt$ و از فرمول $\int e^u du=e^u$ استفاده کردیم.

سؤالات رشته‌ی عمران

۱ـ حاصل عبارت $(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i})^{10}$ کدام است؟ $(i=\sqrt{-1})$

۱) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ۲) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ۳) $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ۴) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

۲ـ فرض کنید تابع g در $\mathbb{R}$ پیوسته بوده و $\int_0^1 g(t)dt = 2$ باشد. اگر $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$ باشد، حاصل $f''(1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲- ۴) ۴-

۳ـ حاصل انتگرال $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-2\sin 2x+3\cos^2 x}\,dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{5}+3$ ۴) $2\sqrt{5}-3$

۴ـ مقدار انتگرال $\int_{-6}^{6}\frac{\sqrt{\lfloor x\rfloor+9}}{\sqrt{\lfloor x\rfloor+9}+\sqrt{\lfloor -x\rfloor+9}}dx$ کدام است؟ ($\lfloor x\rfloor$ جزء صحیح x است)

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۵ـ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد. کدام گزینه همواره صحیح است؟ $(n=1,2,\ldots)$

۱) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ نیز همگرا است.

۲) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ نیز همگرا است.

۳) دو سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ هم‌رفتارند.

۴) دو سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ هم‌رفتارند.

۶ـ فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار در فضا باشند، به‌طوری که $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{c}$ با هم‌موازی‌اند و $\vec{a}\times\vec{b}=(-2,0,1)$ و $\vec{a}\times\vec{c}=(0,-1,3)$ باشد، در این صورت $\vec{b}\times\vec{c}$ کدام است؟

۱) $(-2,1,-2)$ ۲) $(2,-1,2)$ ۳) $(2,1,-4)$ ۴) $(-2,-1,4)$

۷ـ حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[\cos(xy)-x\sin y]^{\frac{1}{xy}}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) e

۸ـ اگر $f(x,y,z)=x^{\sqrt{2}}\times y^{\sqrt{3}}+\sqrt{3}z$ آنگاه بردار $\vec{\nabla}f(1,1,1)$ با محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

۹ـ مقدار انتگرال $\iint_D \frac{2e^x+3e^y}{e^x+e^y}dxdy$ کدام است که در آن D ناحیه $x^2+y^2\le 2$ و $x\ge 0$ و $y\ge 0$ می‌باشد؟

۱) 5π ۲) $\frac{5\pi}{2}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{8}$

۱۰ـ مقدار انتگرال $\int_C (x+y)ds$ که در آن C منحنی $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(2\pi,0)$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $4\pi+\frac{16}{3}$ ۲) $4\pi+\frac{32}{3}$ ۳) $8\pi+\frac{16}{3}$ ۴) $8\pi+\frac{32}{3}$

پاسخنامه رشته‌ی عمران

۱ـ گزینه «۴» از نمایش قطبی اعداد مختلط استفاده می‌کنیم.

$$z=\sqrt{3}+i\Rightarrow x=\sqrt{3},y=1\Rightarrow r=\sqrt{3+1}=2,\theta=tg^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{6}$$

بنابراین $z=\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ است و در مخرج هم مزدوج همین عدد را داریم: $\bar{z}=\sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

$$(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i})^{10}=(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}})^{10}=(e^{i\frac{\pi}{3}})^{10}=e^{i\frac{10\pi}{3}}=e^{i(2\pi+\frac{4\pi}{3})}=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

۲ـ گزینه «۱» همین سؤال با اندکی تغییر در عمران سال ۸۱ آمده است. با استفاده از فرمول مشتق انتگرال داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x-x)^2g(x)-0+\frac{1}{2}\int_0^x 2(x-t)g(t)dt\Rightarrow f'(x)=\int_0^x(x-t)g(t)dt$$

با مشتق‌گیری دوباره داریم:

$$f''(x)=(x-x)g(x)-0+\int_0^x(1)g(t)dt\Rightarrow f''(x)=\int_0^x g(t)dt$$

حالا با جایگذاری $x=1$ داریم:

$$f''(1)=\int_0^1 g(t)dt=2$$

۳ـ گزینه «۴» باجایگذاری $1=\sin^2x+\cos^2x$ و استفاده از فرمول مثلثاتی $\sin 2x=2\sin x\cos x$ می‌توانیم در عبارت زیر رادیکال، اتحاد مربع ایجاد کنیم.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-2\sin 2x+3\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2x-4\sin x\cos+4\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x-2\cos x)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-2\cos x|dx$$

برای تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق ابتدا محل ریشه‌ی آن را پیدا می‌کنیم.

$$\sin\theta-2\cos\theta=0\Rightarrow tg\theta=2\Rightarrow\theta=tg^{-1}2\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\theta}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

حالا با تفکیک انتگرال به دو بازه‌ی $[0,\theta]$ و $[\theta,\frac{\pi}{2}]$ داریم:

$$I=\int_0^\theta(2\cos x-\sin x)dx+\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-2\cos x)dx=(2\sin x+\cos x)\Big|_0^\theta-(2\sin x+\cos x)\Big|_\theta^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=(2\sin\theta+\cos\theta)-1-[2-(2\sin\theta+\cos\theta)]=4\sin\theta+2\cos\theta-3-4\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+2\times\frac{\sqrt{5}}{5}-3=2\sqrt{5}-3$$

۴ـ گزینه «۳» فرض کنیم $f(x)=\sqrt{\lfloor x\rfloor+9}$ باشد. در این‌صورت انتگرال داده شده به این صورت است:

$$I=\int_{-6}^{6}\frac{f(x)}{f(x)+f(-x)}dx\quad,\ (1)$$

با تغییر متغیر $t=-x$ داریم:

$$I=\int_6^{-6}\frac{f(-t)}{f(-t)+f(t)}(-dt)=\int_{-6}^{6}\frac{f(-t)}{f(-t)+f(t)}dt\quad,\ (2)$$

بنابراین با جمع کردن انتگرال‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$I+I=\int_{-6}^{6}\frac{f(x)+f(-x)}{f(-x)+f(x)}dx=\int_{-6}^{6}dx=12\Rightarrow 2I=12\Rightarrow I=6$$

نکته: به طور کلی فرمول مقابل برای چنین انتگرال‌هایی قابل استفاده است:

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{f(x)+f(-x)}dx=\int_{-a}^{a}\frac{f(-x)}{f(-x)+f(x)}dx=a$$

۵ـ گزینه «۱» ابتدا نادرست بودن گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) را با یافتن مثال نقض نشان می‌دهیم. در گزینه‌ی (۳)، $a_n = \frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید، سریِ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، اما سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست. بنابراین گزینه‌ی (۱) نادرست است.

گزینه «۴» هم با همین مثال یعنی $a_n = \frac{1}{n}$ رد می‌شود. گزینه «۲» هم با در نظرگرفتن $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ غلط بودنش مشخص می‌شود.

اما گزینه «۱» ثابت می‌شود. برای اثبات آن دقت کنید که وقتی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا باشد، حتماً جمله‌ی عمومی آن به صفر میل می‌کند، پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

با توجه به فرض مثبت بودن a_n می‌توانیم نتیجه بگیریم که به جز احتمالاً چند جمله‌ی اول، سایر جملات کوچکتر از یک هستند، به عبارت دقیق‌تر: $0 < a_n < 1$ است.

بنابراین $0 < a_n^3 < a_n^2$ است و حالا از آزمون مقایسه نتیجه می‌گیریم که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ همگراست.

۶ـ گزینه «۲» بردارهای $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{c}$ باهم موازی‌اند، بنابراین ضرب خارجی آنها برابر با صفر می‌شود.

$$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{a} + \vec{b}\times\vec{c} = 0$$

ضرب خارجی بردار $\vec{a}$ در خودش برابر با صفر است، زیرا $\vec{a}$ با خودش موازی است. پس داریم:

$$0 - \vec{a}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{a} + \vec{b}\times\vec{c} = 0$$

طبق ویژگی ضرب خارجی داریم: $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$ در نتیجه:

$$-\vec{a}\times\vec{c} + \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} - \vec{a}\times\vec{b} = (0,-1,3) - (-2,0,1) = (2,-1,2)$$

۷ـ گزینه «۳» از گزینه‌ها پیداست که مقدار حد وجود دارد، پس کافی است روی یک مسیر مثلاً مسیر $y = x$ مقدار حد را حساب کنیم. با جایگذاری $y = x$ و استفاده از هم‌ارزی‌ها داریم:

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x^2) - x\sin x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1 - \frac{x^4}{2} - x.x)^{\frac{1}{x^2}}$$

این حد دارای فرم مبهم 1^∞ است. بنابراین به این‌صورت آن را حل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}(1 - x^2 - \frac{x^4}{2})^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}(-x^2 - \frac{x^4}{2})} = \lim_{x\to 0} e^{-1-\frac{x^2}{2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

۸ـ گزینه «۲» بردار گرادیان f را در نقطه $(1,1,1)$ به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z) = (\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}y^{\sqrt{3}}, \sqrt{3}y^{\sqrt{3}-1}x^{\sqrt{2}}, \sqrt{3})$$

در نقطه‌ی $(1,1,1)$ داریم:

$$\vec{\nabla} f = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$$

حالا با استفاده از فرمول کسینوس‌های هادی، اگر α زاویه با محور xها باشد داریم:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+3+3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

۹ـ گزینه «۳» از جمله سؤالاتی که در سالیان اخیر موردنظر طراح رشته عمران است! مرزهای ناحیه‌ی D به‌صورت $x^2 + y^2 = 2$ ، $x = 0$ و $y = 0$ هستند.

اگر در معادلات مرزهای این ناحیه جای x و y را عوض کنیم، ناحیه تغییری نمی‌کند، پس در انتگرال دوگانه با تبدیل x به y و y به x مقدار انتگرال تغییری نمی‌کند:

$$\begin{cases} I = \iint_D \frac{2e^x + 3e^y}{e^x + e^y}dxdy \\ I = \iint_D \frac{2e^y + 3e^x}{e^y + e^x}dxdy \end{cases}$$

بنابراین با جمع کردن دو انتگرال داریم:

$$I + I = \iint_D \frac{5e^x + 5e^y}{e^x + e^y}dxdy = \iint_D 5\,dxdy = 5\times(\text{مساحت } D) \Rightarrow 2I = 5(\frac{2\pi}{4}) \Rightarrow I = \frac{5\pi}{4}$$

۱۰ـ گزینه «۴» ابتدا المان طول قوس را به دست می‌آوریم:

$$ds=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt \Rightarrow ds=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1-2\cos t}\,dt=\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

حالا با جایگذاری معادلات پارامتری داده شده داریم:

$$I=\int_0^{2\pi}(t-\sin t+1-\cos t)(2\sin\frac{t}{2})dt=\int_0^{2\pi}[(2t\sin\frac{t}{2}-4\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}-2\sin\frac{t}{2}(2\cos^2\frac{t}{2}-1)]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(2t\sin\frac{t}{2}-4\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}-4\sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2})dt=(-4t\cos\frac{t}{2}+8\sin\frac{t}{2}-\frac{8}{3}\sin^3\frac{t}{2}-8\cos\frac{t}{2}+\frac{8}{3}\cos^3\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi}$$

$$=[-4(2\pi)(-1)+0-0-8(-1)+\frac{8}{3}(-1)^3]-[0+0-0-8+\frac{8}{3}]=8\pi+\frac{32}{3}$$

توجه کنید که برای حل انتگرال $\int_0^{2\pi}2t\sin\frac{t}{2}dt$ از روش جدول استفاده کرده‌ایم.

$2t$	$\sin\frac{t}{2}$
2	$-2\cos\frac{t}{2}$
0	$-4\sin\frac{t}{2}$

سؤالات رشته‌ی مکانیک

۱ـ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{n}{n^2+i^2}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{4}$
۲) $\dfrac{\pi}{2}$
۳) $\dfrac{1}{2}$
۴) 0

۲ـ مجموعه تمام مقادیر a که به‌ازای آن‌ها سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ همگرا می‌باشد، کدام است؟

۱) $[0,\frac{1}{e})$
۲) $[0,1)$
۳) $[0,\frac{1}{e}]$
۴) $\{0\}$

۳ـ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x(1+e^x)}\right)$ کدام است؟

۱) -1
۲) 0
۳) $\dfrac{1}{2}$
۴) 1

۴ـ اگر $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و $f(x)=(1+\sinh x)e^{x^2}$، آنگاه $(f^{-1})'''(1)$ (مشتق سوم تابع وارون f در نقطه $a=1$) کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۹

۵ـ مقدار $\int_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^4}$، کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$
۲) $\dfrac{\pi}{4}$
۳) $\dfrac{\pi}{2}$
۴) $\dfrac{\pi}{4}\sqrt{2}$

۶ـ مساحت ناحیه محدود به دو منحنی $r=2(1+\cos\theta)$ و $r=2(1+\sin\theta)$، کدام است؟

۱) $9\pi-2-8\sqrt{2}$
۲) $6\pi-8\sqrt{2}$
۳) $\dfrac{9\pi}{2}-1-4\sqrt{2}$
۴) $3\pi-4\sqrt{2}$

۷ـ ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=x+2y+3z$، بر اشتراک دو رویه $x-y+z=1$ و $x^2+y^2=1$، کدام است؟

۱) $3+\dfrac{21}{\sqrt{29}}$
۲) $3-\dfrac{21}{\sqrt{29}}$
۳) $3+\sqrt{29}$
۴) $2+\sqrt{29}$

۸ـ مقدار $\int_0^2\int_y^2 e^{x^2}dxdy+\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\dfrac{\sin y}{y}dydx$، کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{2}(e^4-1)+2$
۲) $\dfrac{1}{2}(e^4-1)$
۳) $\dfrac{1}{2}(e^4-1)-2$
۴) وجود ندارد.

۹ـ مساحت قسمتی از رویه $2x^{\frac{3}{2}}+2y^{\frac{3}{2}}-z=0$ که بالای مربع $[0,1]\times[0,1]$ قرار دارد، کدام است؟

۱) $\dfrac{4}{1215}(10^{\frac{5}{2}}-9^{\frac{5}{2}}+2^{\frac{5}{2}}-1)$
۲) $\dfrac{4}{1215}(10^{\frac{5}{2}}-9^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{5}{2}}+1)$
۳) $\dfrac{4}{1215}(19^{\frac{5}{2}}+1)$
۴) $\dfrac{4}{1215}(19^{\frac{5}{2}}-2\times10^{\frac{5}{2}}+1)$

۱۰ـ اگر $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ تابعی همواره ناصفر و دارای مشتق پیوسته باشد کـه $\|\nabla\varphi\|^2=4\varphi$ و $\operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi)=10\varphi$، آنگـاه مقـدار انتگـرال $\iint_S\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma$ که در آن S کره یکه به مرکز مبدأ و $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ مشتق جهتی φ در جهت بردار قائم یکه رو به خارج S می‌باشد، کدام است؟

۱) 4π
۲) 6π
۳) 8π
۴) 12π

پاسخنامه رشته‌ی مکانیک

۱ـ گزینه «۱» قبل از هر چیزی ابتدا توجه کنید که چون $n\to\infty$، پس $\frac{n}{n^2+i^2}\to 0$ و لذا $\sin(\frac{n}{n^2+i^2})\sim\frac{n}{n^2+i^2}$، بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(\frac{n}{n^2+1^2})+\sin(\frac{n}{n^2+2^2})+\cdots+\sin(\frac{n}{n^2+n^2})]=\lim_{n\to\infty}[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}]=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}]$$

$$\Rightarrow \text{حاصل حد}=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})]=\int_0^1 f(x)\,dx$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}]=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\left[tg^{-1}x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

۲ـ گزینه «۱» سؤال خیلی سخت نیست، اما کمی وحشت اولیه، طبیعی است! ابتدا توجه کنید؛ عبارت داده شده در توان a، خودش سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ را نمایش می‌دهد که می‌دانیم یک سری واگرا می‌باشد و دارای حد ∞ است. بنابراین برای همگرایی سری اصلی لازم است؛ a عددی باشد که وقتی به توان بی‌نهایت می‌رسد، برابر با صفر شود. (چون همان‌طور که می‌دانیم شرط لازم برای همگرایی هر سری این است که حد جمله‌ی عمومی صفر شود)

با این توضیحات، واضح است؛ a نمی‌تواند برابر با یک و یا بزرگتر از یک باشد، پس $0<a<1$، که البته در این حالت فقط شرط لازم برای همگرایی سری برقرار می‌شود. اما باید دید سری شرط کافی برای همگرایی را هم دارد؟ برای این منظور از آزمون رابه استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})=\lim_{n\to+\infty}n(1-\frac{a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}}{a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}})=\lim_{n\to+\infty}n(1-\frac{a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n+1}}}{a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}})=\lim_{n\to+\infty}n(1-a^{\frac{1}{n+1}})$$

همان‌طور که می‌بینید، با حالت ابهام «$\infty\times 0$»، روبه‌رو هستیم، بنابراین داریم:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{n\to+\infty}(\frac{1-a^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n}})=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}$$

$$\text{حاصل حد}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{-1}{(n+1)^2}a^{\frac{1}{n+1}}Lna}{-\frac{1}{n^2}}\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{+\frac{1}{n^2}a^{\frac{1}{n+1}}Lna}{-\frac{1}{n^2}}=-a^{\frac{1}{+\infty}}Lna=-a^{0}Lna=-Lna$$

بر طبق آزمون رابه، شرط همگرایی این است که $-Lna>1$ باشد و برای این منظور باید $Lna<-1$ و لذا با شرط $a<e^{-1}$ سری همگراست.

روش دیگر: اگر دانشجو هم‌ارزی $Lnn\sim 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ را بداند، می‌تواند همگرایی سری معادل $\sum_{n=1}^{\infty}a^{Lnn}$ را بررسی کند. با توجه به رابطه‌ی لگاریتمی $a^{Lnn}=n^{Lna}$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^{Lnn}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{Lna}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-Lna}}$$

با یک P سری برخورد داریم که می‌دانیم برای $P>1$ همگراست:

$$-Lna>1\Rightarrow Lna<-1\Rightarrow a<\frac{1}{e}$$

۳ـ گزینه «۲» این حد خیلی واضح است و اصلاً حالت مبهمی در آن رخ نمی‌دهد. به وضوح وقتی $x\to\infty$ میل می‌کند، داریم: $\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$ در نتیجه:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2x}-\frac{1}{x(1+e^x)})=\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}=0-0=0$$

احتمالاً در صورت سؤال اشتباه تایپی رخ داده یا سؤال بیش از حد ساده است.

۴ـ گزینه «۲» فرض کنیم $y=f(x)$ باشد. در این صورت داریم:

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$y'(f^{-1})''(y)=\frac{-f''(x)}{(f'(x))^2}$$

البته $y'=f'(x)$ است و با جایگذاری آن در رابطه بالا داریم:

$$(f^{-1})''(y)=\frac{-f''(x)}{(f'(x))^3}$$

حالا یک بار دیگر از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$y'(f^{-1})'''(y)=-\frac{f'''(x)(f'(x))^3-3(f'(x))^2(f''(x))^2}{(f'(x))^6}$$

با جایگذاری $y'=f'(x)$ و ساده کردن عبارات داریم:

$$(f^{-1})'''(y)=\frac{-f'''(x)f'(x)+3(f''(x))^2}{(f'(x))^5}$$

از ضابطه $y=(1+\sinh x)e^{x^2}$ با کمی دقت می‌بینیم که به‌ازای $y=1$ مقدار $x=0$ به دست می‌آید.

حالا باید مقادیر $f'(0)$، $f''(0)$ و $f'''(0)$ را حساب کنیم. راحت‌تریم که از بسط مک لورن استفاده کنیم:

$$f(x)=(1+\sinh x)e^{x^2}=(1+x+\frac{x^3}{3!}+\cdots)(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots)=1+x+x^2+(1+\frac{1}{3!})x^3+\cdots$$

بنابراین داریم:

$$f'(0)=(x \text{ ضریب})=1$$

$$f''(0)=(x^2 \text{ ضریب})\times 2!=2$$

$$f'''(0)=(x^3 \text{ ضریب})\times 3!=(1+\frac{1}{3!})\times 3!=7$$

با جایگذاری این موارد در مشتق سوم تابع معکوس داریم:

$$(f^{-1})'''(1)=\frac{-(7)(1)+3(2)^2}{(1)^5}=5$$

۵ـ گزینه «۴» سؤال نسبتاً سختی برای روز آزمون است! ابتدا بر اساس درسنامه توابع بتا و گاما به سؤال جواب می‌دهیم:

روش اول: ابتدا از تغییرمتغیر $x^4=t$ استفاده می‌کنیم:

$$x^4=t\Rightarrow 4x^3dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{4x^3}$$

از طرفی $x=t^{\frac{1}{4}}$ و لذا $x^3=t^{\frac{3}{4}}$، بنابراین $dx=\frac{dt}{4t^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt$، و لذا انتگرال به صورت مقابل بازنویسی می‌شود:

$$\int_0^\infty\frac{\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt}{1+t}=\frac{1}{4}\int_0^\infty\frac{t^{-\frac{3}{4}}}{1+t}dt$$

از طرفی طبق فرمول می‌دانیم $\int_0^\infty\frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}}dt=\beta(m,n)$ اگر کمی به این فرمول و انتگرال $\int_0^\infty\frac{t^{-\frac{3}{4}}}{1+t}dt$ دقت کنید، می‌بینید که با فرض $m-1=-\frac{3}{4}$ و به عبارت دیگر $m=\frac{1}{4}$ و همچنین نظر به این که توان $1+t$ در مخرج کسر $\underline{1}$ است، پس $m+n=1$ و لذا $\frac{1}{4}+n=1$ و بنابراین $n=\frac{3}{4}$ می‌توانیم از فرمول استفاده کنیم؛ یعنی حاصل این انتگرال برابر با $\frac{1}{4}\beta(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ می‌شود. از طرفی طبق تعریف $\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ و این یعنی حاصل این انتگرال برابر با $\frac{1}{4}[\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})}]$ و یا به عبارت دیگر چون در مخرج $\Gamma(1)$ داریم که برابر با $\underline{1}$ می‌شود، حاصل برابر با $I=\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})$ است. از طرفی طبق فرمول می‌دانیم $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ است (که در این سؤال $\alpha=\frac{1}{4}$ می‌باشد)، بنابراین داریم:

$$I=\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{\sin(\pi\times\frac{1}{4})}=\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

البته اگر کسی این فرمول آخر را یادش رفته باشد، می‌تواند با استفاده از فرمول کلی $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ و استفاده از روش کلی، $\Gamma(\frac{1}{4})$ و $\Gamma(\frac{3}{4})$ را حساب کند.

روش دوم:

$$I=\int_{۰}^{\infty}\frac{dx}{۱+x^{۴}}=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{۱+x^{۴}}+\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{۱+x^{۴}}=I_{۱}+I_{۲}$$

در دومین انتگرال تغییر متغیر $t=\frac{۱}{x}$ را انجام می‌دهیم. پس $x=\frac{۱}{t}$ و $dx=-\frac{dt}{t^{۲}}$.

$x=۱\Rightarrow t=۱$

$x=\infty\Rightarrow t=۰$

$$I=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{۱+x^{۴}}+\int_{۱}^{۰}\frac{-\frac{۱}{t^{۲}}dt}{۱+\frac{۱}{t^{۴}}}=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{۱+x^{۴}}+\int_{۰}^{۱}\frac{t^{۲}}{۱+t^{۴}}dt=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{۱+x^{۴}}+\int_{۰}^{۱}\frac{x^{۲}}{۱+x^{۴}}dx=\int_{۰}^{۱}\frac{۱+x^{۲}}{۱+x^{۴}}dx$$

صورت و مخرج را بر $x^{۲}$ تقسیم می‌کنیم:

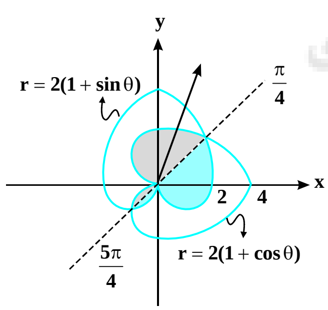
$$I=\int_{۰}^{۱}\frac{\frac{۱}{x^{۲}}+۱}{\frac{۱}{x^{۲}}+x^{۲}}dx=\int_{۰}^{۱}\frac{(۱+\frac{۱}{x^{۲}})}{(x-\frac{۱}{x})^{۲}+۲}dx$$

با تغییر متغیر $t=x-\frac{۱}{x}$ داریم: $(۱+\frac{۱}{x^{۲}})dx=dt$. در ضمن به ازای $۰<x<۱$ داریم $-\infty<t<۰$ در نتیجه:

$$I=\int_{-\infty}^{۰}\frac{dt}{t^{۲}+۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathrm{Arc\,tg}(\frac{t}{\sqrt{۲}})\Big|_{-\infty}^{۰}\Rightarrow I=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\frac{-\pi}{۲})=\frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\pi\sqrt{۲}}{۴}$$

روش سوم: همواره حاصل انتگرال‌هایی به فرم کلی $\int_{۰}^{\infty}\frac{dx}{۱+x^{n}}$ برابر با $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$ است. بنابراین حاصل این انتگرال برابر با $\frac{\pi}{۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\pi}{۴}\sqrt{۲}$ است.

۶ـ گزینه «۲» این دلوارها در $r=۰$ (مبدأ) و در زاویه $\theta=\frac{\pi}{۴}$ و $\theta=\frac{۵\pi}{۴}$ با هم برخورد می‌کنند. نواحی $S_{۱}$ و $S_{۲}$ تقارن دارند، پس $S_{۱}$ را حساب کرده و ۲ برابر می‌کنیم. $S_{۱}$ ناحیه درون دلوار $r=۲(۱+\cos\theta)$ در بازه‌ی $\frac{\pi}{۴}\le\theta\le\frac{۵\pi}{۴}$ است.



$$S_{۱}=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}}۴(۱+\cos\theta)^{۲}d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}}۴(۱+۲\cos\theta+\frac{۱+\cos۲\theta}{۲})d\theta$$

$$\Rightarrow S_{۱}=\frac{۱}{۲}[۶\theta+۸\sin\theta+\sin۲\theta]_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}}$$

$$=\frac{۱}{۲}[۶\times\frac{۵\pi}{۴}+۸\sin(\frac{۵\pi}{۴})+\sin(۲\times\frac{۵\pi}{۴})]-\frac{۱}{۲}[۶\times\frac{\pi}{۴}+۸\sin(\frac{\pi}{۴})+\sin۲\times\frac{\pi}{۴}]$$

$$=\frac{۱}{۲}[\frac{۲۴\pi}{۴}-۸\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱-۸\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۱]=\frac{۱}{۲}(۶\pi-۸\sqrt{۲})\Rightarrow S=۲S_{۱}=۶\pi-۸\sqrt{۲}$$

۷ـ گزینه «۳» از شرط اول داریم $z=۱-x+y$ و با جایگذاری آن در تابع f داریم:

$$f=x+۲y+۳(۱-x+y)=-۲x+۵y+۳$$

حالا ماکزیمم f را با در نظر گرفتن قید $g:x^{۲}+y^{۲}=۱$ به‌دست می‌آوریم.

تناسب لاگرانژ $\Rightarrow\frac{f_{x}}{g_{x}}=\frac{f_{y}}{g_{y}}\Rightarrow\frac{-۲}{۲x}=\frac{۵}{۲y}\Rightarrow y=-\frac{۱۰}{۴}x$

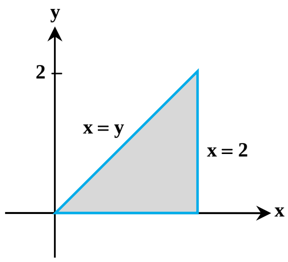
پس $y=-\frac{۵}{۲}x$ است و با جایگذاری در g داریم:

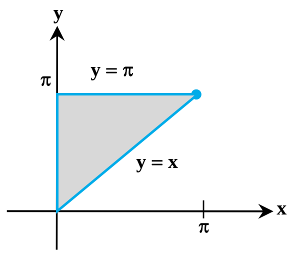
$$x^{۲}+\frac{۲۵}{۴}x^{۲}=۱\Rightarrow x^{۲}=\frac{۴}{۲۹}\Rightarrow x=\pm\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$$

پس نقاط $(\pm\frac{۲}{\sqrt{۲۹}},\mp\frac{۵}{\sqrt{۲۹}})$ نقاط اکسترموم هستند. با جایگذاری این نقاط در f داریم:

$$f=-۲x+۵y+۳=\pm\frac{۴}{\sqrt{۲۹}}\pm\frac{۲۵}{\sqrt{۲۹}}+۳=\pm\sqrt{۲۹}+۳$$

بیشترین مقدار f برابر با $\sqrt{۲۹}+۳$ است.





۸ـ گزینه «۱» انتگرال دوگانه‌ی $I_1 = \int_0^2 \int_y^2 e^{x^2} dxdy$ با این ترتیب قابل حل نیست.

با تعویض ترتیب متغیرها داریم:

$$0 \le x \le 2 \quad , \quad 0 \le y \le x$$

و در نتیجه:

$$I_1 = \int_0^2 \int_0^x e^{x^2} dydx = \int_0^2 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

برای انتگرال $I_2 = \int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dydx$ هم با تعویض ترتیب متغیرها داریم:

$$0 \le y \le \pi \quad , \quad 0 \le x \le y$$

پس خواهیم داشت:

$$I_2 = \int_0^{\pi} \int_0^{y} \frac{\sin y}{y} dxdy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} ydy = \int_0^{\pi} \sin ydy = -\cos y \Big|_0^{\pi} = 2 \Rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}(e^4 - 1) + 2$$

۹ـ گزینه «۴» المان سطح را حساب می‌کنیم:

$$z = 2x^{\frac{3}{2}} + 2y^{\frac{3}{2}}$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dydx = \sqrt{1 + (3\sqrt{x})^2 + (3\sqrt{y})^2}\, dydx \Rightarrow d\sigma = \sqrt{1 + 9x + 9y}\, dydx$$

ناحیه‌ی D به صورت $[0,1]\times[0,1]$ داده شده است، بنابراین داریم $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 1$:

$$S = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + 9x + 9y}\, dydx = \int_0^1 \frac{2}{27}(1 + 9x + 9y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 dx = \frac{2}{27} \int_0^1 [(10 + 9x)^{\frac{3}{2}} - (1 + 9x)^{\frac{3}{2}}] dx$$

$$\frac{2}{9 \times 27} \times \frac{2}{5} [(10 + 9x)^{\frac{5}{2}} - (1 + 9x)^{\frac{5}{2}}]_0^1 = \frac{4}{1215} [19^{\frac{5}{2}} - 2 \times 10^{\frac{5}{2}} + 1]$$

۱۰ـ گزینه «۳» می‌دانیم منظور از $\frac{\partial \phi}{\partial n}$، مشتق جهتی ϕ در راستای بردار $\vec{n}$ یعنی $\vec{\nabla}\phi.\vec{n}$ می‌باشد. بنابراین برای محاسبه انتگرال موردنظر از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$I = \iint_S \frac{d\phi}{\partial n} d\sigma = \iint_S \vec{\nabla}\phi.\vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{\nabla}\phi)\, dv = \iiint_V \nabla^2 \phi\, dv$$

از طرفی توجه کنید که داریم:

$$\operatorname{div}(\phi\vec{\nabla}\phi) = \vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\phi + \phi \operatorname{div}(\vec{\nabla}\phi) = |\vec{\nabla}\phi|^2 + \phi\nabla^2\phi = 4\phi + \phi\nabla^2\phi$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$4\phi + \phi\nabla^2\phi = 10\phi \Rightarrow \phi\nabla^2\phi = 6\phi \Rightarrow \nabla^2\phi = 6$$

در نتیجه داریم:

$$I = \iiint_V 6dv = 6 \times \text{حجم کره واحد} = 6 \times \frac{4\pi}{3} = 8\pi$$

سؤالات رشته‌های ریاضی و آمار

۱ــ اگر z عددی مختلط و ناصفر باشد که $z+\frac{۱}{z}=۲\cos\alpha$، آن‌گاه $z^n+\frac{۱}{z^n}$ کدام است؟

۱) $۲\cos^n\alpha$ ۲) $۲n\cos\alpha$ ۳) $۲^n\cos\alpha$ ۴) $۲\cos(n\alpha)$

۲ــ اگر $(n\in\mathbb{N})$ $a_n=\frac{\Gamma(n+\frac{۱}{۲})}{\Gamma(n)}\frac{۱}{\sqrt{n}}$، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) ∞

۳ــ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳^x+۳^{۲x})^{\frac{۱}{x}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۴ــ مقدار $\int_۰^\infty e^{-x^۳}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}\Gamma(\frac{۱}{۲})$ ۲) $\frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۳})$ ۳) $۲\Gamma(\frac{۱}{۲})$ ۴) $\frac{۱}{۳}\Gamma(\frac{۱}{۳})$

۵ــ طول منحنی تابع $f(x)=\int_۰^x\sqrt{\cosh(t)}\,dt$ بر بازه $[۰,۲]$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}(e-\frac{۱}{e})$ ۲) $۲(e-\frac{۱}{e})$ ۳) $\sqrt{۲}(e+\frac{۱}{e})$ ۴) $۲(e+\frac{۱}{e})$

۶ــ اگر معادله $e^x\cos(z+y)-xy-z^۲=۰$ متغیر x را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از دو متغیر مستقل y و z تعریف کند، مقدار $\frac{\partial x}{\partial z}$ در نقطه متناظر با $\left|\begin{array}{l}y=-۱\\ z=۱\end{array}\right.$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۷ــ صفحه مماس بر رویه S در نقطه دلخواه (a,b,c) واقع بر آن به صورت زیر است. اگر بدانیم رویه شامل نقطه $(۱,۲,۳)$ است، معادله دکارتی رویه کدام است؟

$$(a+c)(x-a)-(b+c)(y-b)+(a-b)(z-c)=۰$$

۱) $x^۲-y^۲+۲xz-۲yz+۹=۰$ ۲) $x^۲-y^۲+xz-yz+۶=۰$

۳) $۲x^۲-۲y^۲+۲xz-yz+۶=۰$ ۴) $۲x^۲-۲y^۲+۳xz-۲yz+۹=۰$

۸ــ مقدار انتگرال $\int_۰^۱\int_{\sqrt[۳]{y}}^۱\sqrt{x^۴+۱}\,dxdy$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۶}$ ۳) $\frac{\sqrt[۳]{۹}-۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۲}-۱}{۶}$

۹ــ اگر V ناحیه محدود به دو کره $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ و S سطح خارجی ناحیه V باشد، شار گذرنده از سطح S توسط نیروی $\vec{F}(x,y,z)=(۵x^۳+۱۲xy^۲,y^۳+e^y\sin z,۵z^۳+e^y\cos z)$ کدام است؟

۱) ۳۷۱π ۲) ۳۷۲π ۳) ۳۷۳π ۴) ۳۷۴π

پاسخنامه رشته‌های ریاضی و آمار

۱- گزینه «۴» ساده‌ترین راه برای حل این مسأله تبدیل عدد مختلط به فرم قطبی آن است. اما در ابتدا باید عدد z را از معادله داده شده به دست آوریم. بدین منظور داریم:

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Rightarrow z^2-2z\cos\theta+1=0 \Rightarrow z=\frac{\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}}{1}=\cos\theta\pm\sqrt{-\sin^2\theta} \Rightarrow z=\cos\theta\pm i\sin\theta=e^{\pm i\theta}$$

$$z^n+\frac{1}{z^n}=e^{\pm in\theta}+e^{\mp in\theta}=(\cos n\theta\pm i\sin n\theta)+(\cos n\theta\mp i\sin n\theta)=2\cos n\theta$$

۲- گزینه «۲» ابتدا دنباله داده شده را بر حسب تابع مستقیمی از n می‌نویسیم. برای این کار از این خاصیت تابع گاما که $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha!$ استفاده می‌کنیم:

$$a_n=\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n)\sqrt{n}}=\frac{(n-\frac{1}{2})!}{(n-1)!\sqrt{n}}$$

برای محاسبه این حد کافی است از هم‌ارزی استرلینگ استفاده کنیم:

$$L=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\frac{1}{2})!}{(n-1)!\sqrt{n}}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}(n)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(\frac{n}{e})^n}{\sqrt{2\pi}(n)^{-1+\frac{1}{2}}(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{-\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}}=1$$

۳- گزینه «۳» این سؤالی بسیار ساده از کاربرد هم‌ارزی توابع نمایی در بی‌نهایت است:

$$L=\lim_{x\to\infty}(3^x+3^{2x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}$$

حالا توجه داشته باشید که وقتی $x\to\infty$، رشد 9^x بسیار سریع‌تر از 3^x است. در نتیجه داریم:

$$L=\lim_{x\to\infty}(9^x)^{\frac{1}{x}}=9$$

۴- گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها، با تغییر متغیر $x^3=t$ انتگرال داده شده را به فرم استاندارد تابع گاما تبدیل می‌کنیم:

$$t=x^3 \Rightarrow dt=3x^2dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{3t^{\frac{2}{3}}} \quad , \quad \begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x\to\infty\Rightarrow t=\infty\end{cases} \Rightarrow I=\int_0^\infty e^{-x^3}dx=\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{3t^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}\int_0^\infty t^{-\frac{2}{3}}e^{-t}dt$$

از مقایسه انتگرال به دست آمده با فرم استاندارد تابع گاما که به صورت $\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt=\Gamma(\alpha)$ تعریف می‌شود، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{3}\int_0^\infty t^{-\frac{2}{3}}e^{-t}dt=\frac{1}{3}\int_0^\infty t^{\frac{1}{3}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$$

۵- گزینه «۱» ابتدا با استفاده از فرمول مشتق‌گیری از انتگرال مشتق $f(x)$ را برحسب x محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=y=\int_0^x\sqrt{\cosh(t)}dt \Rightarrow y'=1\times\sqrt{\cosh x}\Rightarrow 1+y'^2=1+\cosh x=2\cosh^2(\frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow L=\int_0^2\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^2\sqrt{2\cosh^2(\frac{x}{2})}\,dx=\int_0^2\sqrt{2}\cosh(\frac{x}{2})dx=2\sqrt{2}\sinh(\frac{x}{2})\Big|_0^2$$

$$=2\sqrt{2}[\sinh\frac{2}{2}-\sinh 0]=2\sqrt{2}\sinh 1=2\sqrt{2}\frac{e-e^{-1}}{2}=\sqrt{2}(e-\frac{1}{e})$$

۶- گزینه «۳» فرض می‌کنیم $F(x,y,z)=e^x\cos(z+y)-xy-z^۲=۰$. ابتدا مقدار x متناظر با $(y,z)=(-۱,۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$e^x\cos(۱-۱)+x-۱=۰ \;\Rightarrow e^x+x-۱=۰ \;\Rightarrow x=۰$$

با استفاده از رابطه مشتق ضمنی داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}}=-\frac{-e^x\sin(z+y)-۲z}{e^x\cos(z+y)-y}=\frac{e^۰\sin(۱-۱)+۲}{e^۰\cos(۱-۱)+۱}=\frac{۲}{۲}=۱$$

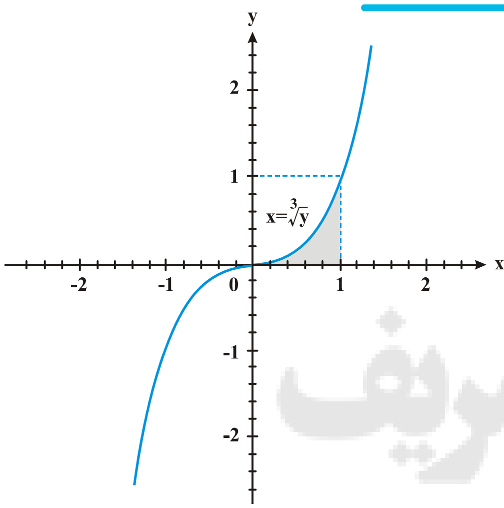
۷- گزینه «۱» با توجه به معادله صفحه مماس و این که بردار نرمال صفحه مماس بر رویه، همان بردار گرادیان آن در نقطه تماس است، خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}f(a,b,c)=\left(a+c,-(b+c),a-b\right) \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}f(x,y,z)=(x+z,-y-z,x-y)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z)=\int(x+z)dx+\int(-y-z)dy+\int(۰)dz=\frac{۱}{۲}x^۲+zx-\frac{۱}{۲}y^۲-zy+C$$

$$f(۱,۲,۳)=\frac{۱}{۲}+۳-\frac{۴}{۲}-۶+C=۰ \;\Rightarrow C=\frac{۹}{۲} \;\Rightarrow f(x,y,z)=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{۲}y^۲+xz-yz+\frac{۹}{۲}=۰$$

۸- گزینه «۴» با توجه به این که تابع زیر انتگرال فقط تابع x است، dy را به داخل می‌آوریم و ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم. با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که اگر در راستای محور y ها حرکت کنیم، از خط $y=۰$ وارد ناحیه شده و از منحنی $x=\sqrt[۳]{y}$ که معادل $y=x^۳$ است، خارج می‌شویم. در نتیجه خواهیم داشت:



$$۰\le y\le ۱\;,\;\sqrt[۳]{y}\le x\le ۱ \;\Rightarrow\; ۰\le x\le ۱\;,\;۰\le y\le x^۳$$

$$\Rightarrow I=\int_۰^۱\int_۰^{x^۳}\sqrt{x^۴+۱}\,dydx=\int_۰^۱ x^۳\sqrt{x^۴+۱}\,dx=\frac{۱}{۴}\int_۰^۱(x^۴+۱)^{\frac{۱}{۲}}۴x^۳dx$$

$$=\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳}(x^۴+۱)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۶}(۲\sqrt{۲}-۱)$$

۹- گزینه «۲» شار عبوری میدان $\vec{F}$ از سطح S در جهت $\vec{n}$ برابر $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ است و چون ناحیه بسته است، از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\mathrm{div}\vec{F})dv=\iiint_V(۱۵x^۲+۱۲y^۲+۳y^۲+e^y\sin z+۱۵z^۲-e^y\sin z)dv=\iiint_V ۱۵(x^۲+y^۲+z^۲)dv$$

با توجه به وجود عامل $x^۲+y^۲+z^۲$ و این‌که سطح S مربوط به فضای بین دو کره به شعاع ۱ و ۲ است، از مختصات کروی برای حل انتگرال کمک می‌گیریم. در این حالت با توجه به این‌که محدودیتی برای θ و φ تعیین نشده است و در واقع تمام سطح بین دوکره مدنظر است، خواهیم داشت:

$$۱\le\rho\le ۲\;,\;۰\le\theta\le ۲\pi\;,\;۰\le\varphi\le\pi$$

$$I=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_۱^۲ ۱۵\rho^۲\times\rho^۲\sin\varphi\, d\rho d\varphi d\theta=۳\int_۰^{۲\pi}d\theta\int_۰^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_۱^۲ ۵\rho^۴d\rho=۳\times ۲\pi\times ۲\times(۲^۵-۱)=۳۷۲\pi$$