رشته مهندسی مواد ــ سراسری ۹۱

۱ــ حد $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$ در صورت وجود، برابر است با:

۱) $\ln\sqrt{2}$　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) ۱　　۴) وجود ندارد.

۲ــ فرض کنید $\sinh c=\frac{3}{4}$ و $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+1})=c$. در این صورت مقدار x برحسب $\ln 2$ و $\ln 3$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)$　　۲) $\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2$　　۳) $\ln 3-\ln 2$　　۴) $\ln 3-2\ln 2$

۳ــ در مورد معادله‌ی $xe^x-2e^x+1=0$ کدام گزاره صحیح است؟

۱) دقیقاً یک ریشه دارد.　　۲) حداکثر دارای یک ریشه است.　　۳) دقیقاً دو ریشه دارد.　　۴) حداقل دارای سه ریشه است.

۴ــ اگر $0<a<b$ ثابت باشند، آنگاه مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{b-a}$　　۲) $\frac{1}{b-a}\ln\frac{a}{b}$　　۳) $\frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a}$　　۴) $\frac{\ln b-\ln a}{(b-a)^2}$

۵ــ اگر $x=\cosh t$ و $t>0$، آنگاه مقدار t برحسب x کدام است؟

۱) $t=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$　　۲) $t=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$　　۳) $t=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$　　۴) $t=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

۶ــ اگر D ناحیه درون قرص دایره $x^2+y^2\le 1$ باشد، آنگاه مقدار $\iint\limits_D(2-x^3-3y^5)dA$ کدام است؟

۱) -6π　　۲) $+4\pi$　　۳) -2π　　۴) 2π

۷ــ فرض کنید S مرز ناحیه‌ی محدود به مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$ و صفحه‌ی $x=2$، بردار $\vec{n}$، قائم یکانی بر S به سمت خارج و $\vec{F}(x,y,z)=(3x+\tan yz)\vec{i}+(y+xz)\vec{j}+(2z+e^{xy})\vec{k}$، در این صورت کدام گزینه مقدار $\iint\limits_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ را نشان می‌دهد؟

۱) $\frac{16\pi}{3}$　　۲) $\frac{32\pi}{3}$　　۳) 16π　　۴) 32π

۸ــ مقدار انتگرال $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dxdydz$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{3}$　　۲) $\frac{\pi}{6}$　　۳) $\frac{3\pi}{8}$　　۴) $\frac{3\pi}{4}$

پاسخنامه رشته مهندسی مواد ــ سراسری ۹۱

۱ــ گزینه «۳» روش اول: حد مجموعی داریم که جملات آن به فرم $\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ هستند. با توجه به آن‌که جملات n^2 و k هم‌درجه نیستند این حد مجموع به صورت ریمانی نیست. برای حل آن می‌توانیم از قضیه ساندویچ استفاده کنیم. می‌دانیم هر یک از جملات مجموع فوق کوچکتر از $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و بزرگتر از $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ می‌باشد بنابراین مجموع فوق بزرگتر از $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ و کوچکتر از $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ می‌باشد.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})\le\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}})\Rightarrow 1\le \text{مقدار حد}\le 1$$

بنابراین طبق قضیه ساندویچ حاصل حد خواسته شده برابر ۱ است.

روش دوم: اگر اصرار داشته باشیم که این حد مجموع را با روش ریمانی و تبدیل به انتگرال حل کنیم، باید ابتدا $\frac{1}{n}$ را فاکتور گرفته و از مجموع خارج کنیم. سپس جملاتی را که درجه‌ای کمتر از سایر جملات دارند حذف کنیم تا همه‌ی جملات صورت هم درجه شوند و همچنین همه‌ی جملات مخرج، هم‌درجه شوند. (طبق متن درس)

پس می‌توانیم $f(\frac{k}{n})$ را تشخیص داده و ضابطه‌ی $f(x)$ را پیدا کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{k}{n^2})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+k}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+0}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1}}$$

$$f(\frac{k}{n})=1 \Rightarrow f(x)=1 \Rightarrow \text{جواب حد}=\int_0^1(1)\,dx=1$$

۲ـ گزینه «۴» یادآوری می‌کنیم که ضابطه‌ی معکوس تابع $y=\sinh(x)$ به این صورت است: $\sinh^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

طبق فرض $\sinh c=\frac{3}{4}$ پس $\sinh^{-1}(\frac{3}{4})=c$ یعنی $\ln(\frac{3}{4}+\sqrt{(\frac{3}{4})^2+1})=c$. حالا معادله‌ی خواسته شده را حل می‌کنیم:

$$\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+1})=c=\ln(\frac{3}{4}+\sqrt{(\frac{3}{4})^2+1}) \Rightarrow e^x+\sqrt{e^{2x}+1}=\frac{3}{4}+\sqrt{(\frac{3}{4})^2+1} \Rightarrow e^x=\frac{3}{4}$$

بنابراین با $\ln$ گرفتن از طرفین داریم:

$$\ln e^x=\ln\frac{3}{4} \Rightarrow x=\ln 3-\ln 4 \Rightarrow x=\ln 3-2\ln 2$$

۳ـ گزینه «۳» اگر فرض کنیم $f(x)=xe^x-2e^x+1$؛ آنگاه خواهیم داشت:

$$f'(x)=e^x+xe^x-2e^x=(x-1)e^x$$

با توجه به ضابطه‌ی $f'(x)=(x-1)e^x$ متوجه می‌شویم که $f'(x)$ در بازه‌ی $(-\infty,1)$ منفی است و در بازه‌ی $(1,\infty)$ مثبت است. پس $f(x)$ در بازه‌ی $(-\infty,1)$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $[1,\infty)$ اکیداً صعودی است. پس $f(x)$ در هر کدام از این دو بازه حداکثر یک ریشه خواهد داشت. برای اطمینان از وجود ریشه، به علامت $f(x)$ در دو سرِ بازه دقت می‌کنیم.

در بازه‌ی $[1,+\infty)$ داریم: $f(+\infty)=+\infty>0\ ,\ f(1)=1-e<0$

بنابراین f بر $[1,+\infty)$ دقیقاً یک ریشه دارد و در بازه‌ی $(-\infty,1]$ داریم: $f(-\infty)=1>0\ ,\ f(1)=1-e<0$

پس f بر $(-\infty,1]$ دقیقاً یک ریشه دارد، بنابراین f در مجموع دقیقاً دو ریشه دارد.

تذکر: استفاده از قضیه‌ی مقدار میانی برای $+\infty$ یا $-\infty$ ایرادی ندارد. اگر $f(a)<0$ و $f(\infty)>0$ باشد، معلوم است $f(x)$ در بازه‌ی $[a,\infty)$ حداقل یک ریشه دارد.

۴ـ گزینه «۳» با استفاده از قاعده‌ی تفکیک کسرها داریم:

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{A}{x+a}-\frac{B}{(x+b)} \Rightarrow A(x+b)-B(x+a)=1 \Rightarrow (A-B)x+(Ab-Ba)=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A-B=0\\ Ab-Ba=1\end{cases}\xrightarrow{A=B} Ab-Aa=1 \Rightarrow A=\frac{1}{b-a},B=\frac{1}{b-a}$$

بنابراین حاصل انتگرال به صورت مقابل است: $I=\int_0^\infty\frac{\frac{1}{b-a}}{x+a}dx-\int_0^\infty\frac{\frac{1}{b-a}}{x+b}dx=\frac{1}{b-a}\int_0^\infty\frac{dx}{x+a}-\frac{1}{b-a}\int_0^\infty\frac{dx}{x+b}=\frac{1}{b-a}[\ln(x+a)-\ln(x+b)]$

$$\frac{1}{b-a}[\ln(x-a)-\ln(x+b)]_0^\infty=\frac{1}{b-a}[\ln(\frac{x+a}{x+b})]_0^\infty=\frac{1}{b-a}[\ln\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x+b})-\ln(\frac{a}{b})]=\frac{1}{b-a}[\ln 1-\ln(\frac{a}{b})]=\frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a}$$

البته تفکیک این کسر برای داوطلبانی ارائه شده که فرمول زیر را به خاطر ندارند، وگرنه رابطه‌ی زیر می‌تواند حفظ شود:

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b})$$

یا حتی با جایگذاری ریشه‌ی مخرج در کسر اصلی می‌توان صورت کسرها را پیدا کرد.

۵ـ گزینه «۲» از مبحث توابع هیپربولیک، فرمول مقابل را داریم: $\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

و با توجه به اینکه $x=\cosh t$، لذا $t=\cosh^{-1}x$ می‌باشد.

دقت کنید در صورتی که فرمول از خاطر شما رفته باشد و حداقل فرمول $\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ در ذهنتان باشد، می‌توانید از معادله‌ی زیر مقدار t را حساب کنید:

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{۲}\Rightarrow ۲x=e^t+e^{-t}\Rightarrow e^t+\frac{۱}{e^t}=۲x\Rightarrow (e^t)^۲-(۲x)e^t+۱=۰$$

که یک معادله‌ی درجه دوم برحسب e^t می‌باشد که با حل آن به راحتی مقدار t برحسب x تعیین می‌شود.

۶ـ گزینه «۴» توابع $x^۳$ و $۳y^۵$ فرد می‌باشند. با توجه به اینکه ناحیه D یک ناحیه متقارن است، یعنی تبدیل x به $-x$ و تبدیل y به $-y$ معادله‌ی $x^۲+y^۲=۱$ را تغییر نمی‌دهد. بنابراین حاصل انتگرال‌های این توابع روی ناحیه D صفر خواهد شد و لذا:

$$\iint_D(۲-x^۳-۳y^۵)dxdy=\iint_D ۲dxdy=۲\iint_D dxdy=۲\times(\text{مساحت ناحیه } D)=۲\pi$$

ناحیه D درون دایره‌ای به شعاع واحد است و لذا مساحت آن برابر π خواهد بود.

۷ـ گزینه «۳» با توجه به قضیه دیورژانس، می‌توان چنین نوشت:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dv$$

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(۳x+\tan yz)+\frac{\partial}{\partial y}(y+xz)+\frac{\partial}{\partial z}(۲z+e^{xy})=۳+۱+۲=۶$$

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dv=۶\iiint_D dv=۶\times(\text{حجم ناحیه } D)=۶(\frac{۸\pi}{۳})=۱۶\pi$$

ناحیه‌ی D مخروطی با ارتفاع $x=۲$ و قاعده آن دایره‌ی $y^۲+z^۲=۴$ می‌باشد و لذا حجم آن از رابطه $V=\frac{۱}{۳}(۴\pi)(۲)=\frac{۸\pi}{۳}$ بدست می‌آید.

۸ـ گزینه «۲» با توجه حدود انتگرال‌ها می‌توان نتیجه گرفت که ناحیه انتگرال‌گیری یک هشتم اول از کره‌ی واحد است. بنابراین:

$$\int_۰^۱\int_۰^{\sqrt{۱-z^۲}}\int_۰^{\sqrt{۱-y^۲-z^۲}}dx\,dy\,dz=\frac{۱}{۸}\,(\text{حجم کره‌ای به شعاع واحد})=\frac{۱}{۸}(\frac{۴}{۳}\pi)=\frac{\pi}{۶}$$

رشته مهندسی مواد ـ سراسری ۹۲

۱ـ حاصل انتگرال $\int\frac{dx}{\sin^۴x+\cos^۴x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{۲}})+C$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{۲}})+C$
۳) $\sqrt{۲}\arctan(\frac{\tan ۲x}{\sqrt{۲}})+C$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\arctan(\frac{\tan ۲x}{\sqrt{۲}})+C$

۲ـ سری توانی تابع $f(x)=\int_۰^x\frac{\ln(۱+t)}{t}dt$ ، $(|t|<۱)$ و بازه‌ی همگرایی آن کدام است؟

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}x^n}{n^۲}$ ، $-۱\le x\le ۱$
۲) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}x^n}{n}$ ، $-۱\le x\le ۱$
۳) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}x^{n+۱}}{n^۲}$ ، $-۱< x< ۱$
۴) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}x^{n+۱}}{n^۲}$ ، $-۱< x< ۱$

۳ـ خم $y=x^{\frac{۱}{۳}}$ ، $۰\le x\le ۱$ حول محور y دوران کرده است. مساحت رویه‌ی دوار حاصل کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲۷}[(۱۰)^{\frac{۳}{۲}}-۱]$
۲) $\frac{۲\pi}{۲۷}[(۱۰)^{\frac{۳}{۲}}-۱]$
۳) $\frac{۲\pi}{۹}[(۱۰)^{\frac{۳}{۲}}-۱]$
۴) $\frac{\pi}{۹}[(۱۰)^{\frac{۳}{۲}}-۱]$

۴ـ اگر z عددی مختلط باشد، آنگاه جواب‌های معادله‌ی $z^{۲n}+۱=۰$ کدام است؟

۱) $e^{\frac{\pi+۲K\pi}{۲n}i}$ ، $K=۰,۱,۲,۳,\dots,(n-۱)$
۲) $e^{\frac{\pi+۲K\pi}{۲n}i}$ ، $K=۰,۱,۲,۳,\dots,(۲n-۱)$
۳) $e^{\frac{+\pi+۲K\pi}{n}i}$ ، $K=۰,۱,۲,۳,\dots,(n-۱)$
۴) جواب ندارد.

۵ـ مقدار $\int_0^\infty \int_0^x (1+x^2+y^2)^{-2}dydx$ در صورت وجود، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{16}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) وجود ندارد. (واگراست)

۶ـ حجم ناحیه‌ی توپر محصور بین سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

۷ـ معادله‌ی برداری خم فضایی C به صورت $r(t)=(a\cos t)\vec{i}+(a\sin t)\vec{j}+bt\vec{k}$، $0\le t\le 2\pi$ است. به ازای کدام b، خمیدگی (انحناء) خم برابر $\frac{1}{2a}$ می‌شود؟ ($a>0$، $b>0$ ثابت)

۱) $b=\frac{a}{2}$ ۲) $b=a$ ۳) $b=2a$ ۴) امکان‌پذیر نیست.

۸ـ نقاطی از رویه‌ی $(y+z)^2+(z-x)^2=16$ که خط عمود بر رویه در آن نقاط موازی صفحه‌ی yz می‌باشد، کدام است؟

۱) نقاط دو خط $x=4-y=z$ و $x=-4-y=z$

۲) نقاط فصل مشترک $\begin{cases} x=4-y=z \\ x=-4-y=z \end{cases}$

۳) نقاط صفحه $x-z=0$

۴) نقاط فصل مشترک $x-z=0$ با رویه

۹ـ مقادیر ماکزیمم M و مینیمم m تابع $f(x,y)=xy$ در ناحیه‌ی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ کدام است؟

۱) $M=ab$ و $m=-ab$

۲) $M=\frac{ab}{2}$ و $m=\frac{-ab}{2}$

۳) $M=\frac{ab}{4}$ و $m=\frac{-ab}{4}$

۴) $M=(\max\{a,b\})$ و $m=-(Max\{a,b\})^2$

پاسخنامه رشته مهندسی مواد ـ سراسری ۹۲

۱ـ گزینه «۴» ابتدا با استفاده از اتحاد مربع دو جمله و همچنین رابطه‌ی $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ تابع زیر انتگرال را به این شکل می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{1}{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin 2x\cos^2 x}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}=\frac{1}{\cos^2 2x+\sin^2 2x-\frac{1}{2}\sin^2 2x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x}=\frac{1}{\cos^2 2x}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}tg^2 2x}\right)$$

حالا با فرض $u=\frac{tg2x}{\sqrt{2}}$ داریم $du=\frac{2dx}{\sqrt{2}\cos^2 2x}$ بنابراین:

$$I=\int\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}tg^2 2x}\right)\left(\frac{dx}{\cos^2 2x}\right)=\int\left(\frac{1}{1+u^2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}du\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}Arctg(u)+c=\frac{\sqrt{2}}{2}Arctg\left(\frac{tg2x}{\sqrt{2}}\right)+c$$

۲ـ گزینه «۱» ابتدا از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$$

از طرفی بسط تیلور $\ln(1+x)$ برابر است با:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

با جای‌گذاری بسط فوق در رابطه $f'(x)$ داریم:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n}\xrightarrow{\text{ازطرفین انتگرال می‌گیریم}} f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n}}{n^{2}}$$

برای یافتن بازه همگرایی با توجه به گزینه‌ها کافیست که همگرایی سری فوق را در $x=1$ و $x=-1$ بررسی کنیم:

$$x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2}}$$

شرط لازم و کافی برای همگرایی سری متناوب فوق آنست که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ نزولی باشد و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2}}=0$ باشد و از آنجایی که این دو شرط برقرار است، سری فوق به ازای $x=1$ همگراست. به ازای $x=-1$ به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^{2}}$ که این سری هم همگراست. پس بازه‌ی همگرایی سری برابر است با: $-1\le x\le 1$

۳ـ گزینه «۱» ابتدا خم داده شده را به صورت پارامتری می‌نویسیم: $y=t\,,x=t^{3}\quad,\quad 0\le t\le 1$

طبق متن درس، سطح حادث از دوران خم فوق حول محور yها برابر است با:

$$S=2\pi\int_{0}^{1}t^{3}\sqrt{(x'_t)^{2}+(y'_t)^{2}}\,dt=2\pi\int_{0}^{1}t^{3}\sqrt{1+9t^{4}}\,dt$$

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$u=1+9t^{4}\quad,\quad du=36t^{3}dt\quad,\quad 0\le t\le 1\Rightarrow 1\le u\le 10$$

$$S=2\pi\int_{1}^{10}\sqrt{u}\frac{du}{36}=\frac{\pi}{18}[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}]_{1}^{10}=\frac{\pi}{27}[10^{\frac{3}{2}}-1]$$

۴ـ گزینه «۲» روش اول: برای عدد -1 داریم $\theta=\pi$ و $r=1$ در نتیجه:

$$z^{2n}+1=0\Rightarrow z^{2n}=-1\ \Rightarrow\ z^{2n}=e^{i\pi}$$

$$z=e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{2n}}\ ,\ k=0,1,2,\dots,2n-1$$

باید توجه داشت که z^{2n} دارای $2n$ جواب می‌باشد به همین دلیل مقدار k از صفر تا $2n-1$ می‌باشد.

روش دوم: کافیست به ازای $n=1$ جواب‌های معادله را در گزینه‌های داده شده چک کنیم:

$$z^{2}+1=0\Rightarrow z^{2}=-1\Rightarrow z=\pm i$$

با قرار دادن $n=1$ در گزینه‌ها داریم:

گزینه ۱ $\Rightarrow k=0\Rightarrow z=i$

گزینه ۲ $\Rightarrow k=0,1\Rightarrow z=i,-i$

گزینه ۳ $\Rightarrow k=0\Rightarrow z=0$

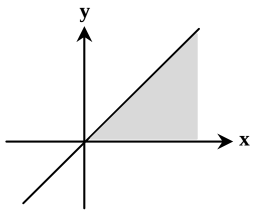
تنها گزینه ۲ است که به ازای $n=1$ جواب‌های $z=\pm i$ را به دست می‌دهد.

۵ـ گزینه «۳» برای حل انتگرال دوگانه داده شده از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم، لذا:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow x^{2}+y^{2}=r^{2}\ ,\ dxdy=rdrd\theta$$

ناحیه انتگرال‌گیری در مختصات قطبی چنین است با:

$$\begin{cases} y=۰ \\ y=x \\ ۰\le x\le\infty \end{cases}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{matrix} ۰\le r\le\infty \\ ۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴} \end{matrix}$$

بنابراین انتگرال داده شده برابر است با:

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۰}^{\infty}(۱+r^{۲})^{-۲}r\,dr\,d\theta$$

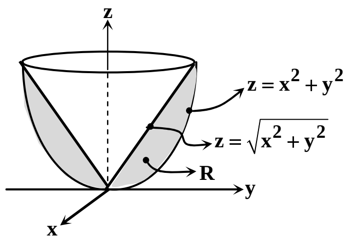
از تغییرمتغیر استفاده می‌کنیم لذا:

$$۱+r^{۲}=u\Rightarrow rdr=du\ ,\begin{cases} r=۰\Rightarrow u=۱ \\ r=\infty\Rightarrow u=\infty \end{cases}$$

با جایگذاری تغییرمتغیر و کران‌های فوق در انتگرال داریم:

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۱}^{\infty}u^{-۲}du\,d\theta=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}-\frac{۱}{u}\Big|_{۱}^{\infty}d\theta=(۰+۱)\times\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۴}$$

۶ـ گزینه «۴» حجم ناحیه موردنظر به صورت زیر نوشته می‌شود:



$$V=\iiint_R dv$$

برای حل از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم، لذا:

$$V=\iiint_R r\,dz\,dr\,d\theta$$

معادلات سهمی‌گون و مخروط در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\Rightarrow z=r \\ z=x^{۲}+y^{۲}\Rightarrow z=r^{۲} \end{cases}\xrightarrow{\text{یافتن محل تلاقی}} r^{۲}=r\Rightarrow r(r-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases} r=۰ \\ r=۱ \end{cases}\Rightarrow ۰\le r\le ۱$$

تصویر این شکل بر صفحه‌ی xoy یک دایره است پس $۰\le\theta\le ۲\pi$ است. حجم ناحیه R برابر است با:

$$V=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}\int_{r^{۲}}^{r}r\,dz\,dr\,d\theta\Rightarrow$$

$$V=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}rz\Big|_{r^{۲}}^{r}dr\,d\theta=\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{۱}(r^{۲}-r^{۳})dr\,d\theta=\int_{۰}^{۲\pi}(\frac{r^{۳}}{۳}-\frac{r^{۴}}{۴})\Big|_{۰}^{۱}d\theta\Rightarrow V=\frac{۱}{۱۲}\times ۲\pi=\frac{\pi}{۶}$$

توضیح: از معادله‌ی رویه‌ها، کران‌های z به صورت $z=r$ و $z=r^{۲}$ به‌دست می‌آیند، اما از کجا تشخیص می‌دهیم که کدام‌یک از آن‌ها کران بالا و کدام کران پایین است؟ برای این‌کار می‌توانید به حدود r توجه کنید: $۰\le r\le ۱$ است. یک مقدار دلخواه از آن مثلاً $r=\frac{۱}{۲}$ را انتخاب کنیم. واضح است که $r^{۲}$ از r کوچکتر می‌شود. پس $r^{۲}\le z\le r$ است.

۷ـ گزینه «۲» خمیدگی (انحناء) خم فضایی $\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ برابر است با:

$$\kappa=\frac{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^{۳}}$$

بنابراین برای $\vec{R}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(a\sin t)\vec{j}+bt\vec{k}$ داریم:

$$\vec{R}'(t)=(-a\sin t)\vec{i}+(a\cos t)\vec{j}+b\vec{k}$$

$$\vec{R}''(t)=(-a\cos t)\vec{i}+(-a\sin t)\vec{j}$$

ضرب خارجی $\vec{R}'$ و $\vec{R}''$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}'\times\vec{R}''=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & ۰ \end{vmatrix}=(ab\sin t)\vec{i}-(ab\cos t)\vec{j}+a^{۲}\vec{k}$$

بنابراین اندازه ضرب خارجی برابر است با:
$$\Rightarrow |\vec{R}'\times\vec{R}''|=\sqrt{a^{2}b^{2}+a^{4}}=a^{2}\sqrt{b^{2}+a^{2}}$$

همچنین اندازه $\vec{R}'(t)$ را حساب می‌کنیم:
$$|\vec{R}'(t)|=\sqrt{a^{2}+b^{2}}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در فرمول انحناء داریم:
$$\kappa=\frac{a\sqrt{b^{2}+a^{2}}}{\sqrt{(a^{2}+b^{2})^{3}}}=\frac{a}{a^{2}+b^{2}}\Rightarrow\frac{a}{a^{2}+b^{2}}=\frac{1}{2a}\Rightarrow 2a^{2}=a^{2}+b^{2}\Rightarrow a^{2}=b^{2}\Rightarrow a=b$$

تذکر: منحنی $\vec{R}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ مارپیچ ارشمیدس است و طبق متن درس، انحنای آن $\kappa=\frac{a}{a^{2}+b^{2}}$ است. بهتر است انحنای منحنی‌های معروف را به خاطر بسپارید.

۸ـ گزینه «۴» بردار هادی خط عمود بر رویه که برابر با بردار گرادیان رویه می‌باشد را به دست می‌آوریم:

بردار هادی خط عمود بر رویه: $\vec{u}=\vec{\nabla}f=(2(x-z)\,,\,2(y+z)\,,\,2(y+z)+2(z-x))\Rightarrow\vec{u}=(x-z,y+z,y+2z-x)$

برای آن‌که این خط با صفحه yoz موازی باشد باید بر بردار نرمال صفحه yoz یعنی $\vec{n}=\vec{i}$ عمود باشد، لذا:
$$\vec{u}.\vec{n}=0\Rightarrow\vec{u}.\vec{n}=\vec{u}.\vec{i}=x-z=0\Rightarrow z=x$$

بنابراین نقاط فصل مشترک صفحه $z=x$ و رویه داده شده نقاط موردنظر مسئله می‌باشد و گزینه ۴ صحیح است.

۹ـ گزینه «۲» تنها نقطه بحرانی درون این ناحیه، $(0,0)$ است زیرا در این نقطه داریم $f_x=0$ و $f_y=0$. با محاسبه‌ی f در این نقطه به مقدار $f(0,0)=0$ می‌رسیم. حالا کافیست نقاط اکسترمم تابع بر روی مرز ناحیه داده شده یعنی $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$ را بیابیم:
$$\frac{x^{2}}{a^{2}}=1-\frac{y^{2}}{b^{2}}\Rightarrow\frac{x^{2}}{a^{2}}=\frac{b^{2}-y^{2}}{b^{2}}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^{2}-y^{2}}$$

با جایگذاری این عبارت در رابطه $f(x,y)=xy$ داریم:
$$f(y)=\pm\frac{a}{b}y\sqrt{b^{2}-y^{2}}$$

نقاط اکسترمم تابع تک‌متغیره فوق را محاسبه می‌کنیم:
$$f'(y)=0\Rightarrow\sqrt{b^{2}-y^{2}}-\frac{y^{2}}{\sqrt{b^{2}-y^{2}}}=0\Rightarrow b^{2}-y^{2}=y^{2}\Rightarrow y^{2}=\frac{b^{2}}{2}\Rightarrow y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$$

با جایگذاری این نقاط در $f(y)$ داریم:
$$f(\pm\frac{b}{\sqrt{2}})=\pm\frac{a}{b}\times\frac{b}{\sqrt{2}}\times\sqrt{b^{2}-\frac{b^{2}}{2}}=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\times b\frac{\sqrt{2}}{2}=\pm\frac{ab}{2}$$

بنابراین ماکزیمم و مینیمم تابع در ناحیه داده شده برابرند با:
$$M=\frac{ab}{2}\ ,\ m=-\frac{ab}{2}$$

رشته مهندسی مواد ــ سراسری ۹۳

۱ــ مشتق تابع $f(x)=x^x$ ، $x>0$ ، کدام است؟

۱) $f'(x)=x^x(-1+\ln x)$ ۲) $f'(x)=x^x(1+\ln x)$ ۳) $f'(x)=x^x\ln x$ ۴) $f'(x)=x^x(1-\ln x)$

۲ــ اگر $z=3+\sqrt{3}i$ ، آنگاه $\operatorname{Arg}(\bar{z})^3$ کدام است؟

۱) π ۲) $-\pi$ ۳) $-\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۳ــ قاعده‌ی جسمی یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است که طول هر ساق آن ۱۲ واحد است. اگر هر مقطع عرضی عمود بر یکی از این ساق‌ها یک نیم قرص باشد، آنگاه حجم جسم برابر کدام است؟

۱) 73π ۲) 144π ۳) 146π ۴) 72π

۴ــ بازه همگرایی سری توان $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2+1}$ کدام است؟

۱) $[-1,+1]$ ۲) $[-1,+1)$ ۳) $(-1,+1]$ ۴) $(-1,+1)$

۵ــ با فرض $w=\ln(x^2+y^2+2z)$ و $x=s+t$ و $y=s-t$ و $z=2st$ ، مقدار $\frac{\partial w}{\partial s}$ در نقطه $(2,0,2)$ عبارتست از:

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۶ــ مقدار انتگرال $\iint_R \arctan(\frac{y}{x})dxdy$ که در آن R قطاع طوقی $\frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x$ و $1\le x^2+y^2\le 4$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{16}$ ۳) $\frac{\pi^2}{16}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

۷ــ مقدار انتگرال $\iint_D 2xy\,dA$ که در آن D ناحیه محصور به دو منحنی $y=x^2$ و $y=2-x^2$ می‌باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۰ ۴) ۲

۸ــ انحنای خم $\begin{cases}2x=t^2+2t\\2y=t^2-2t\end{cases}$ در $t=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخنامه رشته مهندسی مواد ــ سراسری ۹۳

۱ــ گزینه «۲»

$$y=x^x\Rightarrow \ln y=\ln(x^x)=x\ln x\xrightarrow{\text{مشتق گیری از طرفین}}\frac{y'}{y}=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1\Rightarrow y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

توجه: مشتق تابع $y=u^v$ به این صورت است: $y'=u^v(v'\ln u+\frac{u'}{u}v)$

۲ــ گزینه «۳» روش اول:

$$z=3+\sqrt{3}i\Rightarrow \operatorname{Arg}(z)=\tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\pi}{6}$$

حال یادآوری می‌کنیم که $\operatorname{Arg}(\bar{z})=-\operatorname{Arg}(z)$ و $\operatorname{Arg}(z^n)=n.\operatorname{Arg}(z)$

پس می‌توان نوشت:

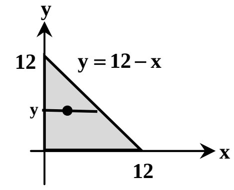
$$\operatorname{Arg}(\bar{z}^3)=-\operatorname{Arg}(z^3)=-3\operatorname{Arg}(z)=-\frac{3\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$$

روش دوم:

$$z=3+\sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \\ \theta=tg^{-1}(\frac{y}{x})=tg^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\pi}{6}\end{cases} \Rightarrow z=re^{i\theta}=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \bar{z}=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \bar{z}^3=(2\sqrt{3})^3e^{-i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow Arg(\bar{z}^3)=-\frac{\pi}{2}$$

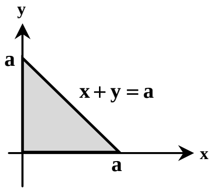
۳ــ گزینه «۴» قاعده جسم را در شکل نشان داده‌ایم.



به ازای هر $0\le y\le 12$: مقطع عرضی این شکل نیم دایره‌ای است با قطرِ $x=12-y$. پس مساحت این نیم‌دایره برابر است با $S(y)=\frac{\pi}{2}(\frac{12-y}{2})^2$. بنابراین خواهیم داشت:

$$V=\int_0^{12}s(y)dy=\int_0^{12}\frac{\pi}{2}(\frac{12-y}{2})^2dy=\frac{\pi}{8}\int_0^{12}(12^2-2(12)y+y^2)dy=\frac{\pi}{8}(12^2y-12y^2+\frac{1}{3}y^3)\Big|_0^{12}=\frac{\pi}{8}(12^3-12^3+\frac{12^3}{3})=72\pi$$

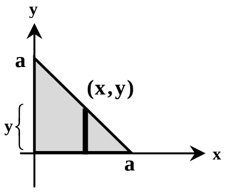
$$V=\int_0^{12}s(y)dy=\int_0^{12}\frac{\pi}{2}(\frac{12-y}{2})^2dy=\frac{\pi}{8}\int_0^{12}(12^2-2(12)y+y^2)dy=\frac{\pi}{8}(12^2y-12y^2+\frac{1}{3}y^3)\Big|_0^{12}=\frac{\pi}{8}(12^3-12^3+\frac{12^3}{3})=72\pi$$



روش دوم: (حل حالت کلی با دو فرمول مختلف:) می‌توانیم مسأله را در حالت کلی‌تری حل کنیم. مطابق شکل فرض کنید طول هر کدام از ساق‌های مثلث، a باشد. معادله‌ی خطی که از $(a,0)$ و $(0,a)$ می‌گذرد به صورت $x+y=a$ است.

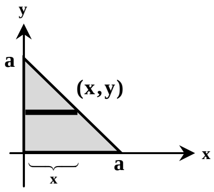
حال می‌توانیم مسأله را برحسب متغیر x یا برحسب متغیر y حل کنیم.

فرمول اول: در هر نقطه‌ی $0\le x\le a$ یک برش عرضی مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم، طبق صورت سؤال نیم‌دایره‌ای به قطر y به دست می‌آید. (دقت کنید که ما فقط قاعده‌ی شکل را رسم کرده‌ایم)



$$S(x)=\frac{1}{2}\pi(\frac{y}{2})^2=\frac{1}{8}\pi(a-x)^2 \Rightarrow V=\int_0^a S(x)dx=\frac{\pi}{8}\int_0^a(a-x)^2dx=-\frac{\pi}{24}(a-x)^3\Big|_0^a=\frac{\pi}{24}a^3$$

فرمول دوم: در هر نقطه‌ی $0\le y\le a$ یک برش طولی مطابق شکل زیر درنظر می‌گیریم. طبق صورت سؤال نیم‌دایره‌ای به قطر x خواهیم داشت:



$$S(y)=\frac{1}{2}\pi(\frac{x}{2})^2=\frac{1}{2}\pi(\frac{a-y}{2})^2=\frac{\pi}{8}(a-y)^2 \Rightarrow V=\int_0^a S(y)dy=\frac{\pi}{8}\int_0^a(a-y)^2dy$$

$$\Rightarrow V=-\frac{\pi}{24}(a-y)^3\Big|_0^a=\frac{\pi}{24}a^3$$

در این مثال $a=12$ است پس $V=72\pi$ به دست می‌آید.

۴ــ گزینه «۱» طبق گزینه‌ها نیازی به محاسبه‌ی R نداریم اما محاسبه‌ی آن ساده است:

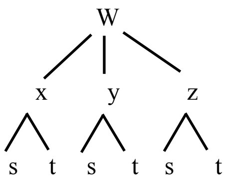
$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|(-1)^n|}{n^2+1}}=1 \Rightarrow R=1$$

پس به ازای $-1<x<1$ سری همگراست و باید لبه‌های بازه را بررسی کنیم.

به ازای $x=1$ سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ همگراست زیرا دنباله $\frac{1}{n^2+1}$ نزولی و همگرا به صفر است. به ازای $x=-1$ هم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ به‌دست می‌آید که همگراست زیرا یک سری p با $p=2$ است. پس جواب $[-1,1]$ است.

توجه: با نگاه به گزینه‌ها مشخص می‌شود که همه آن‌ها بازه‌ی $(-1,1)$ را ناحیه همگرایی سری می‌دانند و اختلاف بر سر لبه‌های آن است در نتیجه فقط بررسی همگرایی در $x=\pm1$ کافی است.

۵ــ گزینه «۳» درخت متغیرها را نشان داده‌ایم. از قاعده زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم:



$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

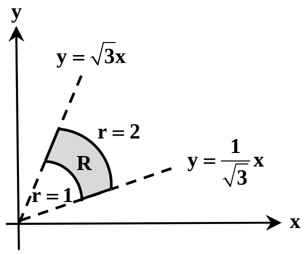
$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{۲x}{x^۲+y^۲+۲z}(۱)+\frac{۲y}{x^۲+y^۲+۲z}(۱)+\frac{۲}{x^۲+y^۲+۲z}$$

اکنون در نقطه‌ی داده شده داریم $(x,y,z)=(۲,۰,۲)$؛ بنابراین $s+t=۲$ و $s-t=۰$ که از این‌جا خواهیم داشت $s=t=۱$ پس در این نقطه می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{۴}{۴+۰+۴}+\frac{۰}{۴+۰+۴}+\frac{۲}{۴+۰+۴}(۲)=\frac{۴}{۸}+\frac{۴}{۸}=۱$$

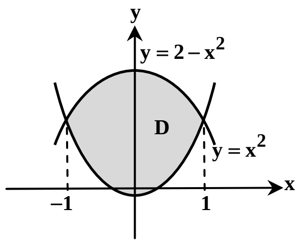
۶ــ گزینه «۳» روی خط $y=\sqrt{۳}x$ داریم $\theta=\frac{\pi}{۳}$ و روی خط $y=\frac{x}{\sqrt{۳}}$ داریم $\theta=\frac{\pi}{۶}$.

شرط $۱\le x^۲+y^۲\le ۴$ نیز کران‌های r را به صورت $۱\le r\le ۲$ معین کرده است. بنابراین انتگرال داده شده را در مختصات قطبی به این شکل حل می‌کنیم.



$$\iint_R \arctan\left(\frac{y}{x}\right)dxdy=\iint_R \theta\, r\, dr\, d\theta=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\int_{۱}^{۲}\theta r\, dr\, d\theta=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\theta\left(\frac{r^۲}{۲}\right)\Bigg|_{۱}^{۲}d\theta=\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\frac{۳}{۲}\theta\, d\theta=\frac{۳}{۴}\theta^۲\Bigg|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}=\frac{۳}{۴}\left(\frac{\pi^۲}{۹}-\frac{\pi^۲}{۳۶}\right)=\frac{\pi^۲}{۱۶}$$

۷ــ گزینه «۳» ناحیه D را در شکل مقابل نشان داده‌ایم.



محل‌های برخورد دو منحنی به سادگی مشخص می‌شوند:

$$(۲-x^۲=x^۲\ \Rightarrow\ x^۲=۱\ \Rightarrow\ x=\pm۱)$$

در تمام ناحیه D داریم: $-۱\le x\le ۱$ و اگر از پایین به بالا حرکت کنیم $y=x^۲$ مرز ورودی و $y=۲-x^۲$ مرز خروجی است، پس $x^۲\le y\le ۲-x^۲$.

اگر از نصف کردن ناحیه انتگرال‌گیری صرف نظر کنیم داریم:

$$\iint_D ۲xy\, dy\, dx=\int_{-۱}^{۱}\int_{x^۲}^{۲-x^۲}۲xy\, dy\, dx=\int_{-۱}^{۱}۲x\left(\frac{(۲x-x^۲)^۲}{۲}-\frac{(x^۲)^۲}{۲}\right)dx=۰$$

از آن‌جا که تابع انتگرالده تابعی فرد است و باندها قرینه یکدیگرند مقدار انتگرال صفر است.

روش کوتاه: تابع $f(x,y)=۲xy$ نسبت به هر دو متغیر فرد است. ناحیه D نسبت به محور y ها تقارن دارد پس داریم:

$$\iint_D f(x,y)dydx=۰$$

در واقع مقدار f در نیمه راستِ D مثبت و در نیمه سمت چپ D منفی است.

۸ــ گزینه «۴» معادله‌ی پارامتری $\vec{R}(t)$ به این صورت است:

$$\vec{R}(t)=(x(t),y(t))=\left(\frac{t^۲+۲t}{۲},\frac{t^۲-۲t}{۲}\right)$$

حال می‌توانیم انحنا را از فرمول $\kappa=\frac{|R'\times R''|}{|R'|^۳}$ به‌دست آوریم.

همچنین می‌توان از حالت خاص این فرمول که به شکل $\kappa=\frac{|x_t y_{tt}-y_t x_{tt}|}{(x_t^۲+y_t^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ است برای منحنی‌های پارامتری در صفحه xoy استفاده کرد. با استفاده

از مشتق‌گیری نسبت به t داریم:

$$x_t=\frac{۲t+۲}{۲}=t+۱\ \Rightarrow\ x_{tt}=۱$$

$$y_t=\frac{۲t-۲}{۲}=t-۱\ \Rightarrow\ y_{tt}=۱$$

به ازای $t=۱$ داریم $x_t=۲$ و $x_{tt}=۰$ و $y_t=۰$ و $y_{tt}=۱$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\kappa=\frac{|۲-۰|}{(۴+۰)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

رشته مهندسی مواد ــ سراسری ۹۴

۱ــ فرض کنید $f(x)=e^x p(x), p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$. در این صورت $f^{(n)}(0)$ کدام است؟

۱) $c_0+c_1+2c_2$
۲) $c_0+c_1+c_2$
۳) $c_0+nc_1+2n(n-1)c_2$
۴) $c_0+nc_1+n(n-1)c_2$

۲ــ اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد، آیا می‌توانیم داشته باشیم $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t.\cos^n t dt = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$ اگر پاسخ مثبت است، ثابت a کدام است؟

۱) بلی، $a=2^{-n}$
۲) بلی، $a=2^{1-n}$
۳) بلی، $a=2^{-1-n}$
۴) خیر

۳ــ ریشه‌های معادله مختلط $z^2-(5+i)z+8+i=0$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}3-2i\\2-i\end{cases}$
۲) $\begin{cases}3-2i\\2+i\end{cases}$
۳) $\begin{cases}3+2i\\2-i\end{cases}$
۴) $\begin{cases}3+2i\\2+i\end{cases}$

۴ــ حاصل جمع سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n+1}$، کدام است؟

۱) $|x|<1\ ,\ \ln(1-x^2)$
۲) $|x|\le 1\ ,\ \ln(1+x^2)$
۳) $|x|\le 1\ ,\ x\ne 0\ ,\ \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$
۴) $\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\ ,\ x\ne 0,1$ و ۱ به ازای $x=0$

۵ــ فاصله همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^x x^n}{n^2+1}$، کدام است؟

۱) $(0,+1)$
۲) $(-1,0)$
۳) $(-1,+1)$
۴) $[-1,+1]$

۶ــ فرض کنیم $W=f(x,y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته و $\begin{cases}x=2u+v\\y=u-v\end{cases}$. در این صورت عبارت $5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ برابر با کدام مورد زیر است؟

۱) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$
۲) $\frac{2\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$
۳) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$
۴) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$

۷ــ کدام مورد برای تابع $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$، نادرست است؟

۱) تابع f در $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ ماکزیمم مطلق دارد.
۲) تابع f در $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ نقطه زینی دارد.
۳) تابع f در $(0,1)$ ماکزیمم مطلق دارد.
۴) تابع f در $(0,0)$ مینیمم مطلق دارد.

۸ــ مساحت بخشی از مخروط $z^2=x^2+y^2$ که بین صفحات $z=0$ و $x+2z=3$ واقع شده، کدام است؟

۱) $\pi\sqrt{3}$
۲) $\pi\sqrt{6}$
۳) $2\pi\sqrt{3}$
۴) $2\pi\sqrt{6}$

۹ــ انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\csc\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$ برابر با کدام است؟

۱) $\int_0^1\int_0^y f(x,y)dxdy$
۲) $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$
۳) $\int_0^1\int_0^x f(x,y)dydx$
۴) $\int_0^1\int_x^1 f(x,y)dydx$

۱۰ــ اگر مثلث C با رئوس $(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$ از نقطه $(1,1,1)$ در جهت عقربه ساعت دیده شود، آنگاه مقدار انتگرال $\oint_C xydx+yzdy+zxdz$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
۴) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

پاسخنامه رشته مهندسی مواد ــ سراسری ۹۴

۱ــ گزینه «۴» روش اول: بسط مک لورن $f(x)$ را می‌نویسیم. ضریب x^n در بسط مک لورن $f(x)$ برابر با $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ است.

$$f(x)=e^x(c_0+c_1x+c_2x^2)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}+\cdots)(c_0+c_1x+c_2x^2)$$

وقتی جملات دو پرانتز در هم ضرب می‌شوند، فقط در سه تا از آن‌ها x^n به‌وجود می‌آید:

$$\text{جملات شامل } x^n=c_0\frac{x^n}{n!}+c_1x\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+c_2x^2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}=(\frac{c_0}{n!}+\frac{c_1}{(n-1)!}+\frac{c_2}{(n-2)!})x^n$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{c_0}{n!}+\frac{c_1}{(n-1)!}+\frac{c_2}{(n-2)!}\Rightarrow f^{(n)}(0)=c_0+c_1n+c_2n(n-1)$$

روش دوم: با استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتز برای محاسبهٔ مشتقِ n اُم $f=uv$ داریم:

$$f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(i)}v^{(n-i)}$$

با به کار بردن این قاعده برای تابعِ $f(x)$ داریم: $u=c_0+c_1x+c_2x^2$ و $v=e^x$.

همه‌ی مشتق‌های مرتبه‌ی بالاتر v برابر با e^x هستند. در مورد u می‌دانیم که $u^{(3)}=u^{(4)}=\cdots=0$ پس داریم:

$$f^{(n)}(x)=\binom{n}{0}(c_0+c_1x+c_2x^2)e^x+\binom{n}{1}(c_1+2c_2x)e^x+\binom{n}{2}(2c_2)e^x+0+0+\cdots$$

با جایگذاری $x=0$ در تساوی فوق داریم:

$$f^{(n)}(0)=c_0+nc_1+\frac{n(n-1)}{2}(2c_2)=c_0+nc_1+n(n-1)c_2$$

۲ــ گزینه «۱» روش اول: با توجه به گزینه‌ها می‌توانیم مسأله را در حالت $n=1$ حل کنیم.

$$n=1\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt\Rightarrow[\frac{\sin^2 t}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}=a[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\frac{1}{2}=a$$

پس به ازای $n=1$ باید $a=2^{-1}$ به‌دست آید. گزینه‌ی (۱) صحیح است. در ضمن با به‌دست آوردن مقدار $a=2^{-1}$، گزینه‌ی (۴) هم رد می‌شود.

روش دوم: با استفاده از اتحاد مثلثاتیِ $\sin 2t=2\sin t\cos t$ داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^n dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}\sin 2t)^n dt=2^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n 2t\,dt$$

با تغییر متغیر روبرو داریم:

$$\begin{cases}2t=\frac{\pi}{2}-x\\ 2dt=-dx\Rightarrow dt=\frac{-1}{2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{if}\quad t=0\rightarrow x=\frac{\pi}{2}\\ \text{if}\quad t=\frac{\pi}{2}\rightarrow x=\frac{-\pi}{2}\end{cases}$$

بنابراین:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n 2t\,dt=\frac{-1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}}\sin^n(\frac{\pi}{2}-x)dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\frac{1}{2}(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt$$

در نتیجه داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2^{-n}\cos^n t\,dt\Rightarrow a=2^{-n}$$

روش سوم: می‌توانیم انتگرال‌های داده شده را با استفاده از تابع بتا حل کنیم و از تقسیم آن‌ها برهم a را به دست آوریم. البته این کار وقت‌گیر و طولانی است. یادآوری می‌کنیم که:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

در انتگرالِ $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^n t\,dt$ داریم:

$$\begin{cases}2x-1=n\\ 2y-1=n\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{n+1}{2}\Rightarrow I=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\Gamma(n+1)}$$

در انتگرالِ $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt$ داریم:

$$\begin{cases}2x-1=0\\ 2y-1=n\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{n+1}{2}\Rightarrow J=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\Gamma(\frac{n+2}{2})}$$

حالا داریم:

$$I=aJ \Rightarrow a=\frac{I}{J}=\frac{2\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n+2}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(n+1)}=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}$$

اگر n زوج باشد داریم $n=2k$ پس:

$$a=\frac{\Gamma(\frac{2k+1}{2})\Gamma(k+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2k+1)}=\frac{\frac{2k-1}{2}\times\frac{2k-3}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})k!}{\Gamma(\frac{1}{2})\ (2k)!}=$$

$\Gamma(\frac{1}{2})$ از صورت و مخرج ساده می‌شود و در صورت کسر این جایگذاری را انجام می‌دهیم:

$$k!=k\times(k-1)\times\cdots\times2\times1=\frac{2k}{2}\times\frac{2k-2}{2}\times\cdots\times\frac{4}{2}\times\frac{2}{2}$$

با این جایگذاری خواهیم داشت:

$$a=\frac{(\frac{1}{2})^{2k-1}(2k)!}{(\frac{1}{2})(2k)!}=(\frac{1}{2})^{2k}=(\frac{1}{2})^{n}=2^{-n}$$

اگر n فرد باشد قرار می‌دهیم $n=2k+1$ و باز هم به نتیجه‌ی مشابهی می‌رسیم.

۳ـ گزینه «۳» روش اول: مجموع ریشه‌های معادله‌ی $az^2+bz+c=0$ برابر است با $-\frac{b}{a}$ در این مثال داریم:

$$-\frac{b}{a}=-\frac{-(5+i)}{1}=5+i$$

پس مجموع ریشه‌ها $5+i$ است و فقط گزینه (۳) می‌تواند درست باشد.

روش دوم: معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta=(5+i)^2-4(8+i)=-8+6i$$

با کمی دقت می‌بینیم که:

$$\Delta=-8+6i=-9+6i+1=(3i+1)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=3i+1$$

در نتیجه:

$$z=\frac{5+i\pm(3i+1)}{2}=3+2i\ ,\ 2-i$$

۴ـ گزینه «۳» با توجه به بسط مک لورنِ تابع $f(x)=Ln(1+x)$ داریم:

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\ :\ |x|\le1$$

اگر در تساوی فوق به جای xها قرار دهیم x^2، خواهیم داشت:

$$Ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\cdots\ :\ |x|\le1$$

حال با تقسیم طرفینِ تساوی فوق بر x^2 داریم:

$$\frac{Ln(1+x^2)}{x^2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^6}{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n+1}$$

توجه کنید که این سری هم در بازه‌ی $-1\le x\le1$ همگراست. به ازای $x=\pm1$ به سری متناوب $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ می‌رسیم که همگراست. البته برای آن‌که تقسیم بر x^2 تعریف شده باشد باید $x\ne0$ باشد، پس $-1\le x\le1$ و $x\ne0$ است.

۵ـ گزینه «۴» ابتدا باید اشاره کنیم که در صورت سؤال یک اشتباه تایپی رخ داده و باید به صورت زیر اصلاح شود:

فاصلهٔ همگرایی سریِ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2+1}$، کدام است؟

روش اول: یک سری توانی حول $x_0=0$ داریم پس ناحیه‌ی همگرایی باید به مرکز $x_0=0$ باشد. گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. حالا کافیست $x=1$ و $x=-1$ را بررسی کنیم.

$$\begin{cases} \text{if } x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\sim\sum\frac{1}{n^2} : \text{سری نوع } P \text{ با } P=2>1 \text{ پس همگرا} \\ \text{if } x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1} : (\lim_{n\to\infty} a_n=0 \text{ و که نزولی است } a_n=\frac{1}{n^2+1} \text{ یک سری متناوب همگرا با جمله عمومی}) \end{cases}$$

و همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، تنها گزینه‌ای که هم شامل $+1$ و هم -1 می‌باشد، گزینهٔ (۴) است.

روش دوم: بدون توجه به گزینه‌ها شعاع همگرایی سری را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2+1}}=1 \Rightarrow R=1$$

پس ناحیه‌ی همگرایی به صورت $(-۱,۱)=(۰-۱,۰+۱)$ است حالا نقاط $x=\pm ۱$ را مانند روش اول امتحان می‌کنیم و متوجه می‌شویم ناحیه همگرایی $[-۱,۱]$ است.

۶ـ گزینه «۱» ابتدا u و v را برحسبِ x و y به دست می‌آوریم، برای این‌کار باید دستگاه زیر را حل کنیم:

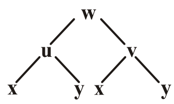
$$\begin{cases} x=۲u+v \\ y=u-v \end{cases} +$$
$$x+y=۳u \Rightarrow u=\frac{۱}{۳}(x+y) \Rightarrow u_x=\frac{۱}{۳}=u_y$$

با جای‌گذاری مقدار u در دومین معادله، یعنی $y=u-v$، داریم:

$$y=\frac{۱}{۳}(x+y)-v \Rightarrow v=\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳}y-y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۲}{۳}y \Rightarrow v=\frac{۱}{۳}x-\frac{۲}{۳}y \Rightarrow v_x=\frac{۱}{۳}\ ,\ v_y=\frac{-۲}{۳}$$

حال به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای، مشتقاتِ جزئی مرتبهٔ اولِ w را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} w_x=w_u u_x+w_v v_x=\frac{۱}{۳}w_u+\frac{۱}{۳}w_v \\ w_y=w_u u_y+w_v v_y=\frac{۱}{۳}w_u-\frac{۲}{۳}w_v \end{cases}$$



به‌طور مشابه مشتقات جزئی مرتبهٔ دومِ w را به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} w_{xx}=\frac{۱}{۳}(w_{uu}u_x+w_{uv}v_x)+\frac{۱}{۳}(w_{vu}u_x+w_{vv}v_x)=\frac{۱}{۹}w_{uu}+\frac{۲}{۹}w_{uv}+\frac{۱}{۹}w_{vv} \\ w_{xy}=\frac{۱}{۳}(w_{uu}u_y+w_{uv}v_y)+\frac{۱}{۳}(w_{vu}u_y+w_{vv}v_y)=\frac{۱}{۹}w_{uu}-\frac{۱}{۹}w_{uv}-\frac{۲}{۹}w_{vv} \\ w_{yy}=\frac{۱}{۳}(w_{uu}u_y+w_{uv}v_y)-\frac{۲}{۳}(w_{vu}u_y+w_{vv}v_y)=\frac{۱}{۹}w_{uu}-\frac{۴}{۹}w_{uv}+\frac{۴}{۹}w_{vv} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$۵\frac{\partial^۲ w}{\partial x^۲}+۲\frac{\partial^۲ w}{\partial x\partial y}+۲\frac{\partial^۲ w}{\partial y^۲}=۵w_{xx}+۲w_{xy}+۲w_{yy}=(\frac{۵}{۹}w_{uu}+\frac{۱۰}{۹}w_{uv}+\frac{۵}{۹}w_{vv})+(\frac{۲}{۹}w_{uu}-\frac{۲}{۹}w_{uv}-\frac{۴}{۹}w_{vv})+(\frac{۲}{۹}w_{uu}-\frac{۸}{۹}w_{uv}+\frac{۸}{۹}w_{vv})$$
$$=w_{uu}+w_{vv}=\frac{\partial^۲ w}{\partial u^۲}+\frac{\partial^۲ w}{\partial v^۲}$$

۷ـ گزینه «۲» با فرض $x^۲+y^۲=t$، ضابطهٔ f به صورت $f(t)=te^{-t}$ در می‌آید. البته $t\geq ۰$ است، پس رفتار f را در $۰\leq t<\infty$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(t)=e^{-t}-te^{-t}=(۱-t)e^{-t} \xrightarrow{f'(t)=۰} t=۱$$:نقطهٔ بحرانی

با توجه به جدول تغییرات f داریم:

t	۰		۱		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	۰	$-$	
$f(t)$	۰	$\nearrow$	$\frac{۱}{e}$	$\searrow$	۰
	min مطلق		max مطلق		

در نتیجه $f(x\ ,\ y)$ در نقاطی که $t=۱$ باشد یعنی نقاطی که روی دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ واقعند، دارای ماکزیمم مطلق است. پس گزینه‌های (۱) و (۳) صحیح هستند. اما گزینهٔ (۲) نادرست است چراکه $(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ روی دایرهٔ مذکور قرار دارد، پس تابع f در این نقطه دارای ماکزیمم مطلق است و نه نقطهٔ زینی.

همچنین تابع f در $t=۰$ دارای می‌نیمم است یعنی در نقطه‌ای که $x^۲+y^۲=۰$ باشد (یعنی $(۰,۰)$)، در این نقطه داریم $f(۰)=۰$ که کمترین مقدار f است.

۸ـ گزینه «۴» چون معادله‌ی مخروط به صورت $z=f(x,y)$ داده شده بهتر است صفحه‌ی تصویر را همان صفحه‌ی xoy درنظر بگیریم. می‌دانیم که مساحت رویه از فرمول $\iint_S dS=\iint_R \sqrt{۱+z_x^۲+z_y^۲}\,dA$ به دست می‌آید.

$$\sqrt{۱+z_x^۲+z_y^۲}=\sqrt{۱+(\frac{x}{z})^۲+(\frac{y}{z})^۲}=\sqrt{\frac{z^۲+x^۲+y^۲}{z^۲}}=\sqrt{\frac{۲(x^۲+y^۲)}{x^۲+y^۲}}=\sqrt{۲}$$

پس:

$$\text{مساحت سطح}=\iint_R \sqrt{۲}\,dA=\sqrt{۲}\times(\text{مساحت}R)$$

حالا ببینیم تصویر این سطح بر صفحه‌ی xoy یعنی ناحیه‌ی R چه شکلی است؟

رویه‌ها را برخورد می‌دهیم:

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^۲+y^۲} \\ x+۲z=۳ \end{cases} \Rightarrow x+۲\sqrt{x^۲+y^۲}=۳ \Rightarrow ۲\sqrt{x^۲+y^۲}=۳-x \Rightarrow ۴(x^۲+y^۲)=۹-۶x+x^۲ \Rightarrow ۳x^۲+۶x+۴y^۲=۹$$

$$\Rightarrow \frac{(x+۱)^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۳}=۱$$

ناحیه‌ی R یک بیضی با شعاع‌های ۲ و $\sqrt{۳}$ است. مساحت این بیضی برابر است با $۲\sqrt{۳}\,\pi$:

$$\text{مساحت سطح}=\sqrt{۲}\times۲\sqrt{۳}\,\pi=۲\pi\sqrt{۶}$$

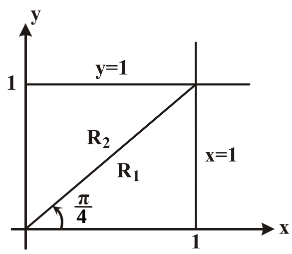
۹ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه در مختصات قطبی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$، هر کدام از نواحی انتگرال‌گیری را جداگانه رسم می‌کنیم. در اولین انتگرال داریم $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$ و $۰\le r\le\sec\theta$. این ناحیه را با $R_۱$ نشان می‌دهیم:

$$R_۱:\begin{cases} r=\sec\theta=\frac{۱}{\cos\theta}\Rightarrow r\cos\theta=۱\Rightarrow x=۱\quad,\quad r=۰\Rightarrow(۰,۰)\ \text{نقطه‌ی مبدأ} \\ ۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

پس ناحیه‌ی $R_۱$ در بازه‌ی $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$ قرار دارد و حالا ناحیه‌ی $R_۲$ را بررسی می‌کنیم:

$$R_۲:\begin{cases} r=\csc\theta=\frac{۱}{\sin\theta}\Rightarrow r\sin\theta=۱\Rightarrow y=۱\quad,\quad r=۰\Rightarrow(۰,۰)\ \text{نقطه‌ی مبدأ} \\ \frac{\pi}{۴}\le\theta\le\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

با رسم $R_۱$ و $R_۲$ در صفحه xoy می‌بینیم که $R_۱\cup R_۲$ یک مربع در ناحیه‌ی $۰\le x\le۱$ و $۰\le y\le۱$ است.

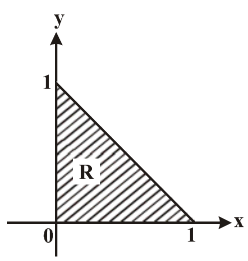


بنابراین مجموع انتگرال‌های داده شده برابر است با: $\int_۰^۱\int_۰^۱ f(x\,,\,y)\,dx\,dy$

۱۰ـ گزینه «۲» صفحه‌ای که مثلث C بر آن واقع است که از نقاط $(۱\,,\,۰\,,\,۰)$، $(۰\,,\,۱\,,\,۰)$ و $(۰\,,\,۰\,,\,۱)$ می‌گذرد. پس معادله‌ی آن به صورت $x+y+z=۱$ است. بنابراین داریم $z=۱-x-y$.

یادآوری می‌کنیم که معادله‌ی صفحه‌ای که از نقاط $(A,۰,۰)$ و $(۰,B,۰)$ و $(۰,۰,D)$ می‌گذرد به صورت $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{D}=۱$ است.

با توجه به توضیحات مسأله، C در جهت ساعتگرد پیموده می‌شود، بنابراین بنا به قضیهٔ استوکس داریم:



$$I=\oint_C \underbrace{xy}_{P}\,dx+\underbrace{yz}_{Q}\,dy+\underbrace{xz}_{R}\,dz=$$

$$=\iint_A[(y-۰)(-۱)+(z-۰)(-۱)+(۰-x)]dA=\iint_A(-y-z-x)\,dA\xrightarrow{z=۱-x-y}$$

$$I=\iint_A(-y-۱+x+y-x)dA=\iint_A dA=A\ \text{مساحت ناحیهٔ}=\frac{۱}{۲}(۱\times۱)=\frac{۱}{۲}$$

که در آن A تصویر مثلث C در صفحهٔ xoy است:

رشته مهندسی نفت ــ سراسری ۹۱

۱ــ اگر x عددی اصم (گنگ) باشد حاصل حد $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}(\cos!\pi x)^m$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ∞

۲ــ اگر $\frac{d}{dx}f(x)=g(x)$, $\frac{d}{dx}g(x)=f(x^2)$، آنگاه $\frac{d^2}{dx^2}(f(x^3))$ برابر است با:

۱) $f(x^6)$ ۲) $3x^2g(x^3)$ ۳) $f(x^6)+g(x^3)$ ۴) $9x^4f(x^6)+6xg(x^3)$

۳ــ مقدار انتگرال معین $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^4 x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

۴ــ اگر دو استوانه دوار، هر یک به شعاع ۳ یکدیگر را در زاویه‌ای قائمه قطع کنند، حجم ناحیه مشترک واقع در یک هشتم اول آن‌ها چند برابر r^3 است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

۵ــ مقدار سری $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ چقدر است؟

۱) $-\frac{\pi}{4}$ ۲) $-\text{Ln}2$ ۳) $\text{Ln}2$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۶ــ انحنای منحنی $y=x\text{Ln}x$ در نقطه (e,e) کدام است؟

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{e5^{\frac{3}{2}}}$ ۳) $\frac{5}{e^{\frac{3}{2}}}$ ۴) $\frac{e}{5^3}$

۷ــ معادله صفحه مماس بر کره $x^2+y^2+z^2=14$ در نقطه $p(1,2,3)$ کدام است؟

۱) $x+y+z=6$ ۲) $3x+2y+z=10$ ۳) $x+2y+3z=14$ ۴) $2x+3y+2z=614$

۸ــ مشتق جهتی (سویی) تابع $f(x,y,z)=\text{Ln}(x^2+y^2+z^2)$ در نقطه $(1,1,1)$ در جهتی که با سه محور مختصات زوایای حاده مساوی می‌سازد، کدام مقدار زیر است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۹ــ مقدار انتگرال $\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3\frac{e^{x^2-x}}{x+1}dxdy$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}(e^3-e)$ ۲) $\frac{1}{2}(e^3-e)$ ۳) $\frac{1}{4}(e+e^3)$ ۴) $\frac{1}{2}(e^3+e)$

۱۰ــ هرگاه D ناحیه محدود به منحنی بسته و هموار C باشد و مقدار $\int_C \vec{F}.\vec{dR}$ مساحت ناحیه D باشد، $\vec{F}(x,y)$ کدام است؟

۱) $y\vec{i}-2x\vec{j}$ ۲) $y\vec{i}-x\vec{j}$ ۳) $y\vec{i}+2x\vec{j}$ ۴) $y\vec{i}+x\vec{j}$

پاسخنامه رشته مهندسی نفت ــ سراسری ۹۱

۱ــ گزینه «۲»

$$L=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(\cos n!\pi x)^m$$

می‌دانیم $-1\le\cos u\le 1$، از طرفی با توجه به اینکه n عددی اصم (گنگ) است حاصلضرب $(n!x)$ نمی‌تواند عدد صحیح باشد بنابراین داریم:

$$\cos(n!x\pi)\neq\pm1\Rightarrow|\cos(n!x\pi)|<1\Rightarrow\lim_{m\to\infty}(\cos(n!x\pi))^m=0$$

جواب اولین حد، صفر می‌شود پس در ادامه داریم:

$$\Rightarrow L=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(\cos(n!x\pi))^m=\lim_{n\to\infty}0=0$$

۲ـ گزینه «۴» با توجه به داده‌های صورت سؤال داریم:

$$\frac{df(x)}{dx}=g(x)\Rightarrow f'(x)=g(x) \qquad (1)$$

$$\frac{dg(x)}{dx}=f(x^2)\Rightarrow g'(x)=f(x^2) \qquad (2)$$

حالا به محاسبه‌ی مشتقِ دوم $f(x^3)$ می‌پردازیم.

با استفاده از قاعده‌ی مشتق ترکیب، می‌دانیم که مشتقِ $f(u)$ برابر است با $u'f'(u)$ پس:

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}f(x^3)=3x^2f'(x^3)\overset{(1)}{=}3x^2g(x^3)$$

حالا مشتق دوم را حساب می‌کنیم. از قاعده‌ی مشتق حاصل‌ضرب استفاده می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x^3)\right)=\frac{d}{dx}(3x^2g(x^3))=6xg(x^3)+3x^2(3x^2g'(x^3))$$

$$\overset{(2)}{=}6xg(x^3)+3x^2(3x^2f(x^6))=6xg(x^3)+9x^4f(x^6)$$

۳ـ گزینه «۴» می‌دانیم که $\sec^2 x=1+tg^2x$، همچنین با انتخاب $u=tgx$ داریم $du=(1+tg^2x)dx$. با توجه به این مطالب داریم:

$$\int \sec^4 x\,dx=\int \sec^2 x.\sec^2 x\,dx=\int (1+tg^2x)\underbrace{(1+tg^2x)dx}_{du}=\int (1+u^2)du=u+\frac{u^3}{3}+c=tgx+\frac{tg^3x}{3}+c$$

حالا با جایگذاری کران‌ها داریم:

$$I=[tgx+\frac{tg^3x}{3}]_0^{\frac{\pi}{4}}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

۴ـ گزینه «۱» محل برخورد استوانه‌های $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ناحیه‌ی D ناحیه‌ی درون این دو استوانه باشد. تصویر D بر صفحه‌ی xoy دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ است. پس در این ناحیه $-a\le x\le a$ و $-\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2}$ است. کران‌های z هم از معادله‌ی $x^2+z^2=a^2$ به صورت $-\sqrt{a^2-x^2}\le z\le\sqrt{a^2-x^2}$ به دست می‌آیند.

با توجه به آن‌که $\pm x$ و $\pm y$ و $\pm z$ معادله‌ی استوانه‌ها را تغییر نمی‌دهند، پس ناحیه‌ی D نسبت به همه‌ی صفحات متقارن است. حجم واقع در $\frac{1}{8}$ اول را حساب کرده و ۸ برابر می‌کنیم.

$$\text{حجم}\ I=\iiint dxdydz\Rightarrow I=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}dxdydz=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\sqrt{a^2-z^2}\,dydz$$

$$=\int_0^a \sqrt{a^2-z^2}\,y]_0^{\sqrt{a^2-z^2}}dz=\int_0^a(a^2-z^2)dz=a^2z-\frac{z^3}{3}]_0^a\Rightarrow I=a^3-\frac{a^3}{3}=\frac{2}{3}a^3$$

۵ـ گزینه «۴» با توجه به وجود اعداد فرد در مخرج کسرها، می‌توان حدس زد که از بسط مک‌لورن arctgx استفاده شده است.

طبق فرمول داریم:

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$$

حالا با جایگذاری $x=1$ خواهیم داشت:

$$x=1\Rightarrow\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

بنابراین مقدار سری برابر $\frac{\pi}{4}$ است.

۶ـ گزینه «۲» انحنای منحنی $y=f(x)$ از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$\kappa=\frac{|f''(x)|}{[1+(f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$$

مقادیر $f'(x)$ و $f''(x)$ را در نقطه‌ی $x=e$ حساب می‌کنیم:

$$f(x)=xLnx\Rightarrow f'(x)=Lnx+x(\frac{1}{x})=Lnx+1\Rightarrow f'(e)=Lne+1=2$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f''(e)=\frac{1}{e}$$

مقادیر به دست آمده را در فرمول جایگذاری می‌کنیم:

$$\kappa=\frac{|f''(x)|}{[1+(f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{e}}{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{e}}{5^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{e5^{\frac{3}{2}}}$$

۷ــ گزینه «۳» با محاسبه‌ی مشتق‌های جزئی، بردار گرادیان را به دست می‌آوریم:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=14$$

$$\vec{\nabla}f=(f_x,f_y,f_z)=(2x,2y,2z)=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$$

$$p=(1,2,3)\Rightarrow\vec{\nabla}f=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$$

معادله صفحه مماس بر منحنی f در نقطه $p_0(x_0,y_0,z_0)$ عبارت است از:

$$f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)+f_z(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow 2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0\Rightarrow(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0\Rightarrow x+2y+3z-14=0\Rightarrow x+2y+3z=14$$

۸ــ گزینه «۲» وقتی یک بردار، زاویه‌های یکسانی با محورهای مختصات می‌سازد به این معناست که مؤلفه‌های آن با هم برابرند. یعنی برداری به صورت $\vec{v}=a\vec{i}+a\vec{j}+a\vec{k}$ است.

برای محاسبه‌ی مشتق سوئی. ابتدا بردار گرادیان را حساب می‌کنیم.

$$\vec{\nabla}f=(f_x,f_y,f_z)=(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\ ,\ \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\ ,\ \frac{2z}{x^2+y^2+z^2})$$

در نقطه‌ی $(1,1,1)$ داریم: $\vec{\nabla}f=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. حال می‌توانیم مشتق سوئی در جهت $\vec{v}$ را حساب کنیم:

$$\text{مشتق سوئی}=\frac{\vec{\nabla}f.\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}a}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{3}a}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۹ــ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. تابع زیر انتگرال به صورت $f(x)$ است پس ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم.

$$I=\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3\frac{e^{(x^2-x)}}{x+1}dxdy$$

با توجه به شکل می‌توان ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کرد:

$$I=\int_1^3\int_1^{x^2}\frac{e^{(x^2-x)}}{x+1}dydx=\int_1^3\frac{e^{(x^2-x)}}{x+1}y]_1^{x^2}dx=\int_1^3\frac{e^{x^2-x}}{x+1}(x^2-1)dx\ \Rightarrow I=\int_1^3 e^{x^2-x}(x-1)dx$$

که این انتگرال قابل حل نیست.

توضیح: در صورت سؤال اشتباه تایپی رخ داده است. $\frac{e^{x^2-2x}}{x+1}$ مورد نظر بوده است و جواب آن $I=\int_1^3 e^{x^2-2x}(x-1)dx=\frac{1}{2}e^{x^2-2x}\Big|_1^3=\frac{1}{2}(e^3-e^{-1})$ می‌باشد.

۱۰ــ گزینه «۳» با توجه به نکات گفته شده داریم:

$$\int_c F.dR=\int(F.T)ds=\oint(\text{curl}F.n)ds=\oint(\nabla\times F).ndx=\int pdx+Qdy+Rdz$$

اما تابع F، یک تابع دو متغیره است بنابراین:

$$Rdz=0\ \Rightarrow\int F.d_R=\int pdx+Qdy=\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y})dxdy$$

که $F=(p,Q)$

$$\int F.dR=\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y})dxdy=\iint dxdy\ \Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=1\Rightarrow p=y\ ,\ \ Q=2x\ \Rightarrow F(x,y)=y\hat{i}+2x\hat{j}$$

رشته مهندسی نفت ـ سراسری ۹۲

۱ـ فرض کنید تابع $y=f(x)$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=\frac{1}{x}$ و $f(2)=9$، مقدار حد $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{f(x)}-3}{x-2}$ در صورت وجود، برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۲ـ فرض کنید $f'(x)=2x^3-x$. مشتق تابع $y=f(x^2)$ به ازای $x=-1$ برابر کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

۳ـ مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۴ـ فاصله همگرایی سری $x+\frac{a-b}{2!}x^2+\frac{(a-b)(a-2b)}{3!}x^3+\cdots$ کدام است؟ (a و b ثابت‌های مثبت‌اند).

۱) $[-b,b)$ ۲) $(-b,b]$ ۳) $[-\frac{1}{b},\frac{1}{b})$ ۴) $(-\frac{1}{b},\frac{1}{b}]$

۵ـ فصل مشترک صفحه‌های $2x+y-4z-16=0$ و $x-2y+3z+2=0$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{x-4}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$ ۲) $\frac{x-4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1}$ ۳) $\frac{x}{2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+2}{1}$ ۴) $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1}$

۶ـ زاویه بین استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ و کره $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ در نقطه $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۷ـ فرض کنید رویه‌ی S بخشی از صفحه $3x+4y+12z=1$ است که داخل استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ قرار دارد. مساحت رویه برابر کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{5}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{13\pi}{5}$ ۴) $\frac{13\pi}{3}$

۸ـ حاصل انتگرال برداری $\oint_C \vec{F}.\vec{ds}$ کدام است که در آن منحنی C دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع یک بوده و $\vec{F}(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$ می‌باشد؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 2π

۹ـ رابطه‌ی بین ثابت‌های b،a و c کدام است، به طوری که انتگرال $\int_A^B \vec{F}.\vec{dR}$ مستقل از مسیر باشد که در آن $\vec{F}(x,y,z)=(ay^2+2czx)\vec{i}+y(bx+cz)\vec{j}+(ay^2+cx^2)\vec{k}$.

۱) $c=b=a$ ۲) $c=b=2a$ ۳) $c=2b=a$ ۴) $c=2b=2a$

پاسخنامه رشته مهندسی نفت ـ سراسری ۹۲

۱ـ گزینه «۱» با جایگذاری $x=2$ در تابع مورد نظر به فرم مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{f(x)}-3}{x-2}=\frac{\sqrt{f(2)}-3}{2-2}=\frac{\sqrt{9}-3}{0}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام فوق از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{f(x)})'}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{4\times 3}=\frac{1}{12}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲ـ گزینه «۲» برای محاسبه مشتق $f(x^2)$ از قاعده‌ی مشتق ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$y=f(x^2)\Rightarrow y'=2xf'(x^2)$$

با توجه به اینکه $f'(x)=2x^3-x$ است، داریم:

$$f'(x^2)=2(x^2)^3-x^2=2x^6-x^2$$

با جایگذاری رابطه فوق در y' داریم:

$$y'=2x(2x^6-x^2)=4x^7-2x^3 \Rightarrow y'(-1)=4(-1)^7-2(-1)^3=-4+2=-2$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳ـ گزینه «۴» می‌دانیم که $\int_a^b f'(x)dx=f(x)\big|_a^b$ البته این تساوی به شرطی برقرار است که تابع $f(x)$ در بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد. تابع $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. پس برای استفاده از فرمول فوق باید بازه‌های $(-1,0)$ و $(0,1)$ را از هم جدا کنیم:

$$I=\int_{-1}^{+1}f'(x)dx=\int_{-1}^{0}f'(x)dx+\int_{0}^{1}f'(x)dx=f(x)\big|_{-1}^{0}+f(x)\big|_{0}^{1}=f(0^-)-f(-1)+f(1)-f(0^+)$$

با توجه به ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ می‌بینیم که:

$$f(0^-)=\frac{1}{1+2^{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=1 \quad , \quad f(0^+)=\frac{1}{1+2^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$f(1)=\frac{1}{1+2^1}=\frac{1}{3} \quad , \quad f(-1)=\frac{1}{1+2^{-1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

در نتیجه:

$$I=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-0=\frac{2}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴ـ گزینه «۴» جمله عمومی سری را می‌توان به صورت $\dfrac{(a-b)(a-2b)\cdots(a-nb)}{(n+1)!}x^{n+1}$ در نظر گرفت، در این صورت وقتی $n\to\infty$، جمله عمومی هم‌ارز $\dfrac{(-b)(-2b)\cdots(-nb)}{(n+1)!}x^{n+1}$ یا $\dfrac{(-1)^n b^n}{n+1}x^{n+1}$ است (برای توضیح بیشتر دقت کنید که گزینه‌ها هم به a بستگی ندارند و می‌توانید حالت $a=0$ را در نظر بگیرید. در واقع از هر پرانتز که به صورت $(a-nb)$ است فقط $-nb$ باقی می‌ماند). شعاع همگرایی برابر است با:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{b^n}{n+1}}}=\frac{1}{b}\Rightarrow |x|<\frac{1}{b}\Rightarrow -\frac{1}{b}<x<\frac{1}{b}$$

در نقاط مرزی، سری به صورت زیر در می‌آید:

$x=\dfrac{-1}{b}\Rightarrow -\dfrac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow$ یک سری مثبت واگرا　　,　　$x=\dfrac{1}{b}\Rightarrow \dfrac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}\Rightarrow$ یک سری متناوب همگرا

◆ ◆ ◆ ◆

۵ـ گزینه «۱» بردار هادی فصل مشترک دو صفحه داده شده از حاصلضرب خارجی بردارهای نرمال آن‌ها بدست می‌آید:

$$\begin{matrix}\vec{n}_1=(2,1,-4)\\ \vec{n}_2=(1,-2,3)\end{matrix}\Rightarrow \vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-4\\1&-2&3\end{vmatrix}=(-5,-10,-5)=(1,2,1)$$

برای یافتن یک نقطه روی فصل مشترک کافیست مثلاً $y=0$ قرار دهیم و دو مؤلفه‌ی دیگر را از معادلات صفحات بیابیم،

$$\begin{cases}2x-4z-16=0\\x+3z+2=0\end{cases}\Rightarrow z=-2, x=4$$

بنابراین معادله فصل مشترک دو صفحه به این صورت است:

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶ـ گزینه «۳» برای یافتن زاویه موردنظر کافیست زاویه بین بردارهای گرادیان دو رویه را در نقطه $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ بیابیم، لذا:

استوانه: $\vec{\nabla}f=(2x,2y,0)\Rightarrow\vec{\nabla}f=(1,\sqrt{3},0)$

کره: $\vec{\nabla}g=(2x-2,2y,2z)\Rightarrow\vec{\nabla}g=(-1,\sqrt{3},0)$

از طرفی برای محاسبه زاویه بین دو بردار فوق داریم:

$$\vec{\nabla}f.\vec{\nabla}g=|\vec{\nabla}f||\vec{\nabla}g|\cos\theta\Rightarrow(1,\sqrt{3},0).(-1,\sqrt{3},0)=2\times2\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷ــ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

معادله‌ی $x^۲+y^۲=۱$ نشان می‌دهد تصویر S بر صفحه‌ی xoy درون دایره‌ی واحد است. مساحت رویه S برابر است با: $S=\iint_S d\sigma=\iint_D \frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA$

برای $g(x,y,z):۳x+۴y+۱۲z-۱=۰$ داریم: $\vec{\nabla}g(x,y,z)=(۳,۴,۱۲)\to|\vec{\nabla}g|=\sqrt{۹+۱۶+۱۴۴}=۱۳, |\vec{\nabla}g.\vec{k}|=۱۲$

چون تصویر سطح بر روی صفحه xoy درون دایره $x^۲+y^۲=۱$ است، لذا داریم:

$$S=\iint_S d\sigma=\iint_D \frac{۱۳}{۱۲}dA=\frac{۱۳}{۱۲}(\text{مساحت دایره به شعاع ۱})=\frac{۱۳}{۱۲}\times\pi(۱)^۲=\frac{۱۳\pi}{۱۲}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸ــ گزینه «۴» **روش اول:** طبق متن درس برای میدان برداری $\vec{F}=(-\frac{y}{x^۲+y^۲}\,،\,\frac{x}{x^۲+y^۲})$ حاصل انتگرال $\oint_C \vec{F}.d\vec{s}$ روی مرز بسته‌ی c، در صورتی‌که نقطه‌ی (۰ ، ۰) درون مرز قرار بگیرد برابر با ۲π است. پس جواب این سؤال ۲π است.

روش دوم: دایره داده شده را به صورت $x=\cos\theta, y=\sin\theta\,(۰\le\theta\le۲\pi)$ پارامتری می‌کنیم. لذا حاصل انتگرال برداری داده شده برابر است با:

$$\oint_c \vec{F}.d\vec{s}=\oint_c \frac{-y}{x^۲+y^۲}dx+\frac{x}{x^۲+y^۲}dy$$

$$\Rightarrow \oint_c \vec{F}.d\vec{s}=\int_۰^{۲\pi}\frac{(-\sin\theta)(-\sin\theta)+(\cos\theta)(\cos\theta)}{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta}d\theta=\int_۰^{۲\pi}d\theta=۲\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹ــ گزینه «۲» برای اینکه انتگرال داده شد مستقل از مسیر باشد باید تابع برداری $\vec{F}$ پایستار باشد یعنی $\text{curl}\vec{F}=۰$ باشد:

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ ay^۲+۲czx & y(bx+cz) & ay^۲+cx^۲\end{vmatrix}=۰\Rightarrow\begin{cases}۲ay=cy\\ ۲cx=۲cx\\ by=۲ay\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a=c\\ b=۲a\end{cases}\Rightarrow c=b=۲a$$

◆ ◆ ◆ ◆

رشته مهندسی نفت ــ سراسری ۹۳

۱ــ اگر $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{۲x+۳}{۲x+۸}\right)^x$ مقدار A کدام است؟

۱) ۰ ۲) $e^{-\frac{۵}{۲}}$ ۳) $e^{\frac{۲}{۵}}$ ۴) $+\infty$

۲ــ مقدار عبارت $\frac{(۱+i)^{۱۵}}{(۱-i)^{۱۳}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) ۳

۳ــ بازه همگرایی تابع $f(x)=\sum\limits_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{n(\ln n)^۲}(x-۲)^n$ کدام است؟

۱) $[۱,۳]$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $(۱,۳)$

۴ــ مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $r(\theta)=\sin\theta$ حول محور x ها کدام است؟

۱) $۱۶\pi^۲$ ۲) $۸\pi^۲$ ۳) $۴\pi^۲$ ۴) $۳۲\pi^۲$

۵ــ فرض کنید $x=\ln(e^x+e^y)$، در این صورت $A=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ و $B=\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}-\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}$ کدام است؟

۱) $A=۱$ و $B=۰$ ۲) $A=۱$ و $B=۱$ ۳) $A=۰$ و $B=۱$ ۴) $A=۰$ و $B=۰$

۶ــ اگر منحنی حرکت یک ذره در فضا به صورت $\vec{R}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t\vec{k}$ باشد، انحنای آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{t}{۲}$ ۳) $\frac{t}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۷ـ کم‌ترین مقدار تابع $f(x,y)=3x-2y+1$ تحت شرایط $9x^2+4y^2=18$ در کدام نقطه اتفاق می‌افتد؟

۱) $(-2,3)$ ۲) $(1,-\frac{3}{2})$ ۳) $(2,-3)$ ۴) $(-1,\frac{3}{2})$

۸ـ مقدار $I=\iint_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2}\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$، کدام است؟

۱) 2π ۲) -2π ۳) -4π ۴) 4π

۹ـ حاصل انتگرال $I=\int_0^2\int_y^2 e^{\frac{2y}{x}}dxdy$، کدام است؟

۱) $\frac{e^2+1}{2}$ ۲) e^2-1 ۳) $\frac{e^2-1}{2}$ ۴) e^2+1

۱۰ـ فرض کنید S سطح ناحیه‌ی محصور بین صفحات $0\le x\le 5$، $0\le y\le 2$ و $0\le z\le 3$ باشد. اگر

$$\vec{F}(x,y,z)=(x^2-yz)\vec{i}+(y^3-zx)\vec{j}+(z^2-xy)\vec{k}$$

مقدار انتگرال روی سطح میدان برداری $\vec{F}$ بر سطح S (یعنی $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$)، کدام است؟

۱) ۲۵۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۳۰۰

پاسخنامه رشته مهندسی نفت ـ سراسری ۹۳

۱ـ گزینه «۲» واضح است که $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{2x+8}=1$ است پس حد داده شده فرم مبهم 1^∞ دارد. بهتر است با تقسیم صورت بر مخرج حد را به فرم $(1+u)^v$ درآوریم و آنگاه از هم ارزی $(1+u)^v\simeq e^{uv}$ استفاده کنیم.

$$A=\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+8})^x=\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+8-5}{2x+8})^x=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{5}{2x+8})^x=\lim_{x\to\infty}e^{-(\frac{5}{2x+8})(x)}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{5x}{2x}}=e^{-\frac{5}{2}}$$

توجه: می‌توانید از رابطه‌ی مقابل هم استفاده کنید:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{Ax^k+B}{Ax^k+D})^{Ex^k}=e^{\frac{(B-D)E}{A}}$$

در مثال بالا:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+8})^x=e^{\frac{(3-8)(1)}{2}}=e^{-\frac{5}{2}}$$

۲ـ گزینه «۲» برای عدد مختلط $z=1+i$ داریم $x=1$ و $y=1$ پس $\theta=tg^{-1}(\frac{1}{1})=\frac{\pi}{4}$ و $r=|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ برای عدد مختلط $w=1-i$ داریم $x=1$ و $y=-1$. پس $\theta=tg^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ و $r=|w|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. حال با استفاده از نمایش قطبی اعداد مختلط محاسبات را به پیش می‌بریم.

$$\frac{(1+i)^{15}}{(1-i)^{13}}=\frac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{15}}{(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^{13}}=\frac{2e^{i\frac{15\pi}{4}}}{e^{-i\frac{13\pi}{4}}}=2e^{i\frac{28\pi}{4}}=2e^{i7\pi}=2(\cos 7\pi+i\sin 7\pi)=-2$$

۳ـ گزینه «۱» ابتدا این نکته را یادآور شویم که برای چند جمله‌ای‌ها و جملات با رشد لگاریتمی داریم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$. (برای مثال $\sqrt[n]{n^2+1}$ و $\sqrt[n]{\ln(n)}$ و $\sqrt[n]{\frac{n^3+1}{\ln(n)}}$ همگی همگرا به یک هستند.)

حالا شعاع همگرایی سری را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n(\ln(n))^2}}=1\Rightarrow R=1$$

بنابراین $1+2>x>-1-2$ یعنی $3>x>1$ ولازم است دو سر بازه را جداگانه در سری قرار داده همگرایی را بررسی کنیم. به ازای $x=1$ سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln(n))^2}$ به‌دست می‌آید که یک سری متناوب همگراست. زیرا دنباله‌ی $\frac{1}{n(Lnn)^2}$ نزولی و هگرا به صفر است. پس با توجه به گزینه‌ها فقط گزینه (۱) می‌تواند درست باشد.

روش کوتاه: سری داده شده حول $x_0=2$ است. پس بازه‌ی همگرایی باید به مرکز $x_0=2$ باشد پس گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست هستند حال با جایگذاری $x=1$ در سری می‌بینیم که در $x=1$ همگراست پس گزینه (۱) درست است و (۴) رد می‌شود.

۴ـ گزینه «۱» منحنی $r(\theta)=4\sin\theta$ دایره‌ای به قطر ۴ است که مرکز آن نقطه $(0,2)$ روی محور yها قرار دارد. یک دور کامل از این دایره در محدوده $0\le\theta\le\pi$ طی می‌شود. مساحت حاصل از دوران $r=f(\theta)$ حول محور xها برابر است با $S=2\pi\int_0^{\pi}y\sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)}d\theta$ که البته در آن $y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$ است.

$$S=2\pi\int_0^{\pi}4\sin\theta.\sin\theta\sqrt{16\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta=8\pi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sqrt{16}d\theta=32\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta=32\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)d\theta$$

$$=16\pi(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta)\Big|_0^{\pi}=16\pi(\pi)=16\pi^2$$

۵ـ گزینه «۱» ابتدا $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ را به‌دست آوریم.

$$z=\ln(e^x+e^y)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y}\ \text{و}\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^y}{e^x+e^y}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{e^x(e^x+e^y)-e^x(e^x)}{(e^x+e^y)^2}=\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^y(e^x+e^y)-e^ye^y}{(e^x+e^y)^2}=\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$$

حال می‌توانیم مقادیر A و B را به‌دست آوریم.

$$A=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^x+e^y}{e^x+e^y}=1\qquad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}-\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)}=0$$

۶ـ گزینه «۴» برای منحنی $\vec{R}(t)$ انحنا به این صورت به‌دست می‌آید:

$$\kappa=\frac{|\vec{R}'\times\vec{R}''|}{|\vec{R}'|^3}$$

در این تست:

$$\vec{R}(t)=(\cos t,\sin t,t)\qquad\vec{R}'(t)=(-\sin t,\cos t,1)\qquad\vec{R}''(t)=(-\cos t,-\sin t,0)$$

$$\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-\sin t&\cos t&1\\-\cos t&-\sin t&0\end{vmatrix}=\sin t\vec{i}-\cos t\vec{j}+(\sin^2t+\cos^2t)\vec{k}=(\sin t,-\cos t,1)$$

$$\kappa=\frac{|\vec{R}'\times\vec{R}''|}{|\vec{R}'|^3}=\frac{\sqrt{\sin^2t+\cos^2t+1}}{(\sqrt{\sin^2t+\cos^2t+1})^3}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3}=\frac{1}{2}$$

۷ـ گزینه «۴» داریم $f(x)=3x-2y+1$ و $g(x,y)=9x^2+4y^2=18$. برای یافتن اکسترمم‌های مقید (مشروط) تابع f از دستگاه لاگرانژ به این شکل استفاده کنیم: (λ ضریب لاگرانژ است.)

$$\begin{cases}f_x=\lambda g_x\\f_y=\lambda g_y\\g(x,y)=18\end{cases}\Rightarrow\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}\Rightarrow\lambda=\frac{3}{18x}=\frac{-2}{8y}\Rightarrow y=\frac{-36x}{24}=-\frac{3}{2}x\xrightarrow{\text{جایگذاری در قید } g}9x^2+4(\frac{9}{4})x^2=18$$

$$\Rightarrow18x^2=18\Rightarrow x=\pm1,y=\mp\frac{3}{2}$$

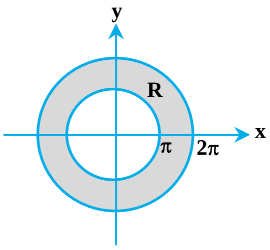
دو نقطه اکسترمم مقید برای $f(x,y)$ یافتیم که عبارتند از: $A(۱,-\frac{۳}{۲})$ و $B(-۱,\frac{۳}{۲})$. مقدار f را در این دو نقطه حساب می‌کنیم:

$$f(A)=۳+۳+۱=۷ \qquad f(B)=-۳-۳+۱=-۵$$

پس کم‌ترین مقدار f تحت شرط داده شده -۵ است و در نقطه‌ی $B(-۱,\frac{۳}{۲})$ رخ می‌دهد.

۸ــ گزینه «۳» ناحیه انتگرال‌گیری ناحیه بین دو دایره به مرکز مبدأ و شعاع‌های π و ۲π است بنابراین حل انتگرال در دستگاه قطبی ساده‌تر خواهد بود. به‌وضوح $۰\le\theta\le ۲\pi$ و کران‌های r نیز از شعاع دایره‌ها به‌دست می‌آیند: $\pi\le r\le ۲\pi$.

ژاکوبین دستگاه قطبی هم r است.



$$I=\iint_R \frac{\sin\sqrt{x^۲+y^۲}}{\sqrt{x^۲+y^۲}}dydx=\int_۰^{۲\pi}\int_\pi^{۲\pi}\frac{\sin(r)}{r}r\,dr\,dt=\int_۰^{۲\pi}\int_\pi^{۲\pi}\sin(r)\,dr\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}[-\cos(r)]_\pi^{۲\pi}d\theta$$

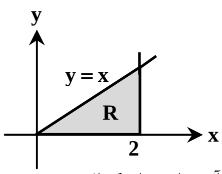
$$=\int_۰^{۲\pi}(-۱-۱)d\theta=-۲(۲\pi)=-۴\pi$$

توجه: در ناحیه انتگرال‌گیری داریم $\pi^۲\le x^۲+y^۲\le ۴\pi^۲$

بنابراین $\pi\le\sqrt{x^۲+y^۲}\le ۲\pi$ پس $\sin(\sqrt{x^۲+y^۲})$ در این ناحیه همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر است. به عبارتی تابع جلوی انتگرال همواره کمتر یا مساوی صفر است پس جواب انتگرال الزاماً منفی خواهد بود.

از این استدلال می‌توانستیم گزینه های (۱) و (۴) را رد کنیم. توجه به علامت انتگرالده گاه باعث حل انتگرال می‌شود.

۹ــ گزینه «۲» ابتدا توجه شما را به یک نکته مهم جلب می‌کنیم. طبق متن درس، برای همه توابع متعالی مانند نسبت‌های مثلثاتی و معکوس آن‌ها و توابع نمایی؛ انتگرال $\int f(\frac{y}{x})dx$ مشکل یا لاینحل است.



اما انتگرال $\int f(\frac{y}{x})dy$ به آسانی حل می‌شود زیرا وقتی y متغیر باشد برای $u=\frac{y}{x}$ داریم $u'_y=\frac{۱}{x}$ که ثابت است و می‌توان آن را در انتگرالده ضرب و تقسیم کرد. در این تست نیز برای تابع $e^{\frac{۲y}{x}}$ ترتیب مناسب آن است که dy در وسط و dx بیرون باشد.

پس احتیاج به تعویض ترتیب متغیرها داریم. خطوط $x=y$ و $x=۲$ را رسم کرده و به شرط $۰\le y\le ۲$ نیز توجه می‌کنیم. ناحیه انتگرال‌گیری معلوم می‌شود. حال ابتدا کران‌های x را می‌نویسیم: $۰\le x\le ۲$ و سپس با حرکت از پایین به بالا روی ناحیه R می‌بینیم $y=۰$ کران پایین و $y=x$ کران بالای y است.

$$I=\iint_R e^{\frac{۲y}{x}}dydx=\int_۰^۲\int_۰^x e^{\frac{۲y}{x}}dydx=\int_۰^۲\frac{x}{۲}e^{\frac{۲y}{x}}\Big|_۰^x dx=\int_۰^۲\frac{x}{۲}(e^۲-e^۰)dx=\frac{e^۲-۱}{۲}\int_۰^۲ xdx=\frac{e^۲-۱}{۲}\frac{x^۲}{۲}\Big|_۰^۲=e^۲-۱$$

۱۰ــ گزینه «۴» S یک سطح بسته است. در واقع S پوسته خارجی یک مکعب است. بنابراین می‌توان از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کرد و انتگرال روی سطح S را به انتگرال سه گانه روی ناحیه درون S تبدیل کرد. ناحیه درون S را D می‌نامیم.

$$\vec{F}(x,y,z)=(\underbrace{x^۲-yz}_{M},\underbrace{y^۲-zx}_{N},\underbrace{z^۲-xy}_{P})$$

$$\operatorname{div}F=M_x+N_y+P_z=۲x+۲y+۲z$$

ناحیه D مکعبی با مرزهای $۰\le x\le ۵$ و $۰\le y\le ۲$ و $۰\le z\le ۳$ است.

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_D \operatorname{div}F dzdydx=\int_۰^۵\int_۰^۲\int_۰^۳ ۲(x+y+z)dz\,dy\,dx=\int_۰^۵\int_۰^۲ ۲(xz+yz+\frac{z^۲}{۲})\Big|_۰^۳ dy\,dx=\int_۰^۵\int_۰^۲ ۲(۳x+۳y+\frac{۹}{۲})dy\,dx$$

$$=\int_۰^۵ ۲(۳xy+۳\frac{y^۲}{۲}+\frac{۹}{۲}y)\Big|_۰^۲ dx=\int_۰^۵ ۲(۶x+۶+۹)dx=۲\int_۰^۵(۶x+۱۵)dx=۲(\frac{۶x^۲}{۲}+۱۵x)\Big|_۰^۵=۲(۷۵+۷۵)=۳۰۰$$

رشته مهندسی نفت ـ سراسری ۹۴

۱ـ اگر $x(t)=\cos t+\ln\tan\frac{t}{۲}$ ، $y(t)=\sin t$ و $\frac{\pi}{۶}\le t\le\frac{\pi}{۳}$ ، معادلات پارامتری یک خم در صفحه باشند، آنگاه المان طول قوس خم کدام است؟

۱) $ds=۲\sin\frac{t}{۲}dt$ ۲) $ds=\cot t\,dt$ ۳) $ds=-\cot t\,dt$ ۴) $ds=۲\cos\frac{t}{۲}dt$

۲ـ شیب خط مماس بر منحنی $(x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}=۲\sqrt{x+y}$ در نقطه $(۱,۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳ـ فرض کنیم $f(x,y,z)=xz^۲\sin^{-۱}(\frac{x}{y})+xy^۲\tan(\frac{xy}{z^۲})+xyz$ و مقادیر x و y و z طوری محدود شده که f و مشتقات جزئی آن تعریف شده باشند. در آن صورت مقدار $(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z})$ کدام است؟

۱) $xz^۲+zy^۲+xy^۲$ ۲) $xyz+z^۳y+yz$ ۳) $xyz f(x,y,z)$ ۴) $۳f(x,y,z)$

۴ـ معادلات پارامتری خط مماس بر خم حاصل از تقاطع رویه‌های زیر در نقطهٔ $(۱,۱,۳)$، کدام است؟

$S_۱: x^۲+y^۲+z^۲=۱۱$

$S_۲: x^۳+۳x^۲y^۲+y^۳+۴xy-z^۲=۰$

۱) $t\in\mathbb{R}, x=۱-۹۰t, y=۱+۹۰t, z=۳$ ۲) $t\in\mathbb{R}, x=۱-۹۰t, y=۱+۹۰t, z=۱+t$

۳) $t\in\mathbb{R}, x=۱+۹۰t, y=۱+۹۰t, z=۳$ ۴) $t\in\mathbb{R}, x=۱-۹۰t, y=۱-۹۰t, z=۱-t$

۵ـ فرض کنیم D ناحیه محدود بین کره $x^۲+y^۲+z^۲\le ۴a^۲$ و استوانه $x^۲+y^۲=a^۲$ باشد و S سطح ناحیه D، اگر $\vec F=(\sqrt{۳}x+y\sin z)\vec i+(\sqrt{۳}y+x\sin z)\vec j+(\sqrt{۳}z+xy\cos xy)\vec k$ یک میدان برداری باشد. در آن صورت شار رو به بیرون از سطح S توسط $\vec F$ کدام است؟

۱) $۳۶\sqrt{۳}\,\pi a^۳$ ۲) $۳۶\pi a^۳$ ۳) $۱۲\sqrt{۳}\,\pi a^۳$ ۴) $۱۲\pi a^۳$

پاسخنامه رشته مهندسی نفت ـ سراسری ۹۴

۱ـ گزینه «۲» با توجه به فرمول طول قوس داریم: $ds=\sqrt{(x'(t))^۲+(y'(t))^۲}\,dt$، بنابراین:

$$\begin{cases} x(t)=\cos t+\mathrm{Ln}(\tan\frac{t}{۲}) \to x'(t)=-\sin t+\dfrac{\frac{۱}{۲}\sec^۲\frac{t}{۲}}{\tan\frac{t}{۲}}=-\sin t+\frac{۱}{۲}\dfrac{\left(\dfrac{۱}{\cos^۲\frac{t}{۲}}\right)}{\left(\dfrac{\sin\frac{t}{۲}}{\cos\frac{t}{۲}}\right)}=-\sin t+\dfrac{۱}{۲\sin\frac{t}{۲}\cos\frac{t}{۲}}=-\sin t+\dfrac{۱}{\sin t} \\ y(t)=\sin t \to y'(t)=\cos t \end{cases}$$

در نتیجه:

$$ds=\sqrt{(-\sin t+\frac{۱}{\sin t})^۲+(-\cos t)^۲}\,dt=\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲ t}-۲+\underbrace{\sin^۲ t+\cos^۲ t}_{۱}}\,dt=\sqrt{\csc^۲ t-۱}\,dt$$

از آنجا که $\frac{\pi}{۶}\le t\le\frac{\pi}{۳}$، پس $\cot t>۰$ و در نتیجه:

$$=\sqrt{\cot^۲ t}\,dt=|\cot t|\,dt=\cot t\,dt$$

۲ـ گزینه «۳» **روش اول:** ضابطهٔ تابع به صورت ضمنی بر حسب x و y بیان شده است، بنابراین برای محاسبهٔ مشتق باید ضابطهٔ داده شده را به صورت $f(x,y)=۰$ بنویسیم، داریم:

$$f(x,y)=(x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}-۲\sqrt{x+y}$$

در تابع f، تبدیل x به y و تبدیل y به x ضابطه‌ی تابع را عوض نمی‌کند یعنی $f(x,y)=f(y,x)$. طبق متن درس، برای چنین توابعی در نقاط (a,a) داریم $f_x(a,a)=f_y(a,a)$ پس: $\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(a,a)}{f_y(a,a)}=-۱$

البته با روش محاسبه‌ی مستقیم هم می‌توانیم مسأله را حل کنیم:

روش دوم: با توجه به فرمول مشتق ضمنی داریم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{\frac{3}{2}(2x)\sqrt{x^2+y^2}-2\frac{1}{2\sqrt{x+y}}}{\frac{3}{2}(2y)\sqrt{x^2+y^2}-2\frac{1}{2\sqrt{x+y}}}$$

می‌دانیم که مشتق تابع به ازای مختصات نقطهٔ تماس برابر است با شیب خط مماس، بنابراین شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(1,1)$ برابر است با:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3(1)\sqrt{1^2+1^2}-\frac{1}{\sqrt{1+1}}}{3(1)\sqrt{1^2+1^2}-\frac{1}{\sqrt{1+1}}}=-1$$

۳ــ گزینه «۴» ثابت می‌کنیم که تابع f همگن از درجهٔ ۳ است، برای این‌کار باید نشان دهیم که برای هر عدد حقیقی دلخواه و مثبت λ: $f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^3 f(x,y,z)$، داریم:

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=(\lambda x)(\lambda z)^2\sin^{-1}\frac{\lambda x}{\lambda y}+(\lambda x)(\lambda y)^2\tan\left(\frac{(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda z)^2}\right)+(\lambda x)(\lambda y)(\lambda z)$$

$$=\lambda^3 xz^2\sin^{-1}\frac{x}{y}+\lambda^3xy^2\tan\frac{xy}{z^2}+\lambda^3xyz=\lambda^3f(x,y,z)$$

طبق قضیهٔ اویلر برای توابع همگن داریم: $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z)$، که در آن f تابعی همگن از درجهٔ n است. همانگونه که در بالا مشاهده نمودید، f تابعی همگن از درجهٔ ۳ می‌باشد، در نتیجه بنا به قضیهٔ اویلر: $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=3f(x,y,z)$.

۴ــ گزینه «۱» بردار هادی خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه‌های $f(x,y,z)=0$ و $g(x,y,z)=0$ در نقطهٔ $p_0(x_0,y_0,z_0)$ برابر است با: $\vec\nabla f(p_0)\times\vec\nabla g(p_0)$، در نتیجه:

$$\begin{cases}f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-11\Rightarrow\vec\nabla f=(2x,2y,2z)\Rightarrow\vec\nabla f(1,1,3)=(2,2,6)\\ g(x,y,z)=x^3+3x^2y^2+y^3+4xy-z^2\Rightarrow\vec\nabla g=(3x^2+6xy^2+4y,\ 6x^2y+4x+3y^2,\ -2z)\Rightarrow\vec\nabla g(1,1,3)=(13,13,-6)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\vec\nabla f(1,1,3)\times\vec\nabla g(1,1,3)=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\2&2&6\\13&13&-6\end{vmatrix}=-90\vec i+90\vec j+0\vec k$$

تنها گزینه‌ای که بردارِ هادی‌اش $(-90,90,0)$ است، گزینهٔ (۱) می‌باشد.

۵ــ گزینه «۲» میزان شار رو به بیرون سطح S توسط $\vec F$ برابر است با: $\iint_S\vec F.\vec n ds$، با توجه به قضیهٔ دیورژانس داریم: $\iint_S\vec F.\vec nds=\iiint_T div\vec F dV$.

بنابراین:

$$div\vec F=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=\sqrt3+\sqrt3+\sqrt3=3\sqrt3\Rightarrow \text{شار}=\iiint_T 3\sqrt3\,dV=3\sqrt3\,(T_{\text{حجم}})$$

که در آن T حجم بین کره و استوانهٔ داده شده است. برای محاسبهٔ این حجم از انتگرال سه‌گانه استفاده می‌کنیم:

$$T_{\text{حجم}}=\iiint_R^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dzdA=\qquad 2\iint_R\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dA$$

$$\iint_R\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dA$$

که در آن R ناحیهٔ محصور بین دوایر متحدالمرکز $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+y^2=4a^2$ می‌باشد. به کمک دستگاه قطبی داریم:

$$T_{\text{حجم}}=2\int_0^{2\pi}\int_a^{2a}\sqrt{4a^2-r^2}\,rdrd\theta=2(2\pi)(-\frac12)(\frac23)(4a^2-r^2)^{\frac32}\Big|_{r=a}^{r=2a}=4\pi\sqrt3\,a^3$$

بنابراین شار بیرون از سطح S توسط $\vec F$ برابر است با:

$$3\sqrt3(T_{\text{حجم}})=3\sqrt3(4\pi\sqrt3a^3)=36\pi a^3$$

رشته مهندسی صنایع سیستم ـ سراسری ۹۱

۱ـ در صفحه مختلط مکان هندسی z هایی که به ازای آن، $\operatorname{Re}(\frac{1}{z}+2i)\le\frac{\operatorname{Im}(z-\bar{z})}{|z|^2}$ برابر است با:

۱) $z=bi$ که $b\in R$ و $b>0$
۲) $z=a$ که $a\in R$ و $a<0$
۳) $z=a+bi$ که $a,b\in R$ و $a\le b$ و $(a,b)\neq(0,0)$
۴) $z=a+bi$ که $a,b\in R$ و $a\le 2b$ و $(a,b)\neq(0,0)$

۲ـ در مورد همگرایی $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ به ترتیب از راست به چپ داریم:

۱) همگرا ـ واگرا
۲) همگرا ـ همگرا
۳) واگرا ـ همگرا
۴) واگرا ـ واگرا

۳ـ بازه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1390}x^n$ کدام است؟

۱) $[-1,1)$
۲) $(-1,1)$
۳) $(-1,1]$
۴) فقط در $x=0$

۴ـ فرض کنید $f(x)=\frac{(x+2)^3(x^2+1)^4}{(x^3+1)^2}$، در این صورت مقدار $f'(1)$ چقدر است؟

۱) ۱۶۲
۲) ۸۱
۳) ۲۱۶
۴) ۳۲۴

۵ـ اگر $f(x)=1+\int_0^x\cos(t^2)dt$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ در این صورت $\lim_{x\to0}(f(x))^{g(x)}$ برابر است با:

۱) e
۲) $\frac{1}{e}$
۳) $\sqrt{e}$
۴) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

۶ـ کدام گزینه بسط تیلور تابع $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ در همسایگی صفر است؟

۱) $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(2n+1)x^n$
۲) $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n-1}$
۳) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n$
۴) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6}x^{n-1}$

۷ـ منحنی $y=\cos x$ را بر بازه $[0,\frac{\pi}{2}]$ حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{4}$
۲) $\frac{\pi^2}{8}$
۳) $\frac{\pi}{8}$
۴) $\frac{\pi}{4}$

۸ـ منحنی $3y-x^3=0$ را در بازهٔ $[0,1]$ حول محور x ها دوران می‌دهیم. مساحت جانبی شکل حاصل برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$
۲) $\frac{\pi}{9}(\sqrt{2}-1)$
۳) $\frac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$
۴) $\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$

۹ـ فرض کنید $f(x)$ تابع پیوسته‌ای بر $[0,2]$ باشد و $f(0)=0$ و $f(2)=2$. به علاوه به ازای هر $x\in[0,2]$ داریم $f'(x)>0$ و $\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$،

مقدار $\int_0^2 f^{-1}(y)dy$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{7}{3}$
۴) $\frac{11}{3}$

۱۰ـ فرض کنید $I_n=\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx$ برای $n\in N$، در این صورت $\lim_{n\to\infty}I_n$ برابر است با:

۱) ۰
۲) ۱-
۳) ۱
۴) وجود ندارد.

۱۱ـ اگر $\mu=\mu(r,s,t)$ و $r=2x+3y-z$ ،$s=-4x-y+z$ و $t=7x-2y-z$ آن‌گاه کدام رابطه‌ی زیر صحیح است؟

۱) $5\mu_x+\mu_y+\mu_z=0$
۲) $\mu_x+\mu_y-5\mu_z=0$
۳) $\mu_x+\mu_y+5\mu_z=0$
۴) $\mu_x+5\mu_y+\mu_z=0$

۱۲ـ حجم محصور بین رویهٔ $x^2+y^2=8z$ و صفحهٔ $z=1$ کدام است؟

۱) 2π
۲) π
۳) 3π
۴) 4π

۱۳ـ فرض کنید $f(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}\int_0^x\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}\,du\,dt$ مقدار $f(\pi)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) -1 ۳) 1 ۴) $\sqrt{2}$

۱۴ـ معادله صفحه مماس بر رویه $z=(\sin x)(\sin y)+\dfrac{2x}{\pi}$ در نقطه $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},2)$ کدام است؟

۱) $\pi z-2y=\pi$ ۲) $\pi z-2x=\pi$ ۳) $\pi z+2x-2y=2\pi$ ۴) $\pi z-2x-2y=0$

۱۵ـ مقدار انتگرال $I=\oint_C (e^{x^2}-y^3)dx+(\cos y+x^3)dy$ کدام است؟ در حالی که C دایره $x^2+y^2=1$ در جهت مثبت است.

۱) $\frac{2\pi}{4}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) 2π

۱۶ـ اگر $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^4-5y^4}{x^3+y^3} & , \quad x\neq -y\\ 0 & , \quad x=-y\end{cases}$، در این صورت $f_1(0,0)$ و $f_2(0,0)$ به ترتیب .... و .... می‌باشند.

۱) ۳ و ۵- ۲) ۳- و ۵ ۳) ۱۲ و ۱۵- ۴) وجود ندارد و وجود ندارد

۱۷ـ در صفحه xy کمترین فاصله مبدأ مختصات تا نقاط روی منحنی $x^2y=54$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{3}$

۱۸ـ حجم ناحیه محصور به رویه $(5x+2y+z)^2+(y-z+5)^2+(5z+3)^2=25$ برابر است با:

۱) $\frac{100\pi}{3}$ ۲) $\frac{20\pi}{3}$ ۳) $\frac{125\pi}{3}$ ۴) $\frac{500\pi}{3}$

۱۹ـ فرض کنید $\vec{F}=(3x+e^{y^2}+z,3y+\sin z^2,e^{\cos xy}-4z)$ و S سطح بسته‌ای باشد که استوانه‌ی توپر $\begin{cases}x^2+y^2\le 9\\ 0\le z\le 3\end{cases}$ را محدود می‌سازد.

مقدار $\oiint_S \vec{F}.ds$ برابر است با:

۱) 18π ۲) 6π ۳) 37π ۴) 54π

۲۰ـ انتگرال $\oint_C F.dr$ کدام است هرگاه $F=(-2y+e^{x^2},3x+\cos y^2,e^{z^2})$ و C منحنی فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحه $x+2y+z=7$ باشد و جهت این منحنی چنان باشد که تصویر آن روی صفحه xy جهتی خلاف عقربه‌های ساعت داشته باشد.

۱) 3π ۲) 2π ۳) 4π ۴) 5π

پاسخنامه رشته مهندسی صنایع سیستم ـ سراسری ۹۱

۱ـ گزینه «۴» با فرض $z=a+ib$، آنگاه $\bar{z}=a-ib$ و لذا داریم:

$$\frac{1}{z}+2i=\frac{1}{a+ib}+2i=\frac{a-ib}{a^2+b^2}+2i=\frac{a}{a^2+b^2}-i(\frac{b}{a^2+b^2}+2)\Rightarrow \mathrm{Re}(\frac{1}{z}+2i)=\frac{a}{a^2+b^2}\qquad (1)$$

$$z-\bar{z}=(a+ib)-(a-ib)=2ib\Rightarrow \mathrm{Im}(z-\bar{z})=2b$$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow |z|^2=a^2+b^2\Rightarrow \frac{\mathrm{Im}(z-\bar{z})}{|z|^2}=\frac{2b}{a^2+b^2}\qquad (2)$$

اگر قرار باشد نامساوی داده شده برقرار باشد، داریم:

$$\xrightarrow{(1),(2)}\frac{a}{a^2+b^2}\le\frac{2b}{a^2+b^2}\xrightarrow{(a,b)\neq(0,0)} a\le 2b$$

۲ـ گزینه «۳» هر کدام از سری‌ها را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

در مورد سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$، می‌دانیم $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ به ازای $p>1$، همگرا و به ازای $p\le 1$ واگراست. در این سری $p=1$ و لذا سری واگراست. اما برای

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ که یک سری متناوب است، با استفاده از آزمون لایب‌نیتز داریم: $a_n=\frac{1}{2n+1}$

۱) شرط اول برقرار است: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ ۲) شرط دوم نیز برقرار است زیرا دنباله‌ی $a_n=\frac{1}{2n+1}$ به وضوح نزولی است. (با افزایش n، مخرج کسر بزرگتر و مقدار a_n کوچک‌تر می‌شود).

پس این سری همگراست.

۳ـ گزینه «۲» ابتدا شعاع همگرایی سری را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{1390}}=1\Rightarrow R=1$$

بنابراین بازه همگرایی به صورت $|x|<1$ یعنی بازه $(-1,1)$ می‌باشد. دقت کنید نقاط $x=\pm1$ نمی‌توانند جزء بازه همگرایی باشند؛ چرا که به ازای آن‌ها بـه سری‌های $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{1390}$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{1390}(-1)^n$ می‌رسیم که حد جمله‌ی عمومی آن‌ها یعنی $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1390}$ صفر نمی‌شود پس واگرایند.

۴ـ گزینه «۳» باید از مشتق لگاریتمی استفاده کنیم، برای این منظور از طرفین ln می‌گیریم:

$$\ln f(x)=\ln[\frac{(x+2)^3(x^2+1)^4}{(x^3+1)^2}]\xrightarrow{\ln\frac{A}{B}=\ln A-\ln B}\ln f(x)=\ln(x+2)^3(x^2+1)^4-\ln(x^3+1)^2$$

$$\xrightarrow{\ln AB=\ln A+\ln B}\ln f(x)=\ln(x+2)^3+\ln(x^2+1)^4-\ln(x^3+1)^2$$

$$\xrightarrow{\ln A^n=n\ln A}\ln f(x)=3\ln(x+2)+4\ln(x^2+1)-2\ln(x^3+1)$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x+2}+\frac{4\times2x}{x^2+1}-\frac{2\times3x^2}{x^3+1}$$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)[\frac{3}{x+2}+\frac{8x}{x^2+1}+\frac{6x^2}{x^3+1}]\Rightarrow f'(1)=f(1)[\frac{3}{1+2}+\frac{8\times1}{1+1}-\frac{6\times1}{1+1}]=f(1)[1+4-3]\Rightarrow f'(1)=2f(1)$$

با توجه به این که $f(1)=\frac{(1+2)^3(1+1)^4}{(1+1)^2}=27\times4=108$، پس داریم: $f'(1)=2f(1)=2\times108=\mathbf{216}$.

۵ـ گزینه «۱» با قرار دادن $x=0$ در ضابطه توابع $f(x)$ و $g(x)$ به راحتی معلوم است با فرم $(1)^\infty$ روبه‌رو هستیم، بنابراین داریم:

$$\text{حاصل حد}=e^{\lim\limits_{x\to0}(f(x)-1)g(x)}$$

ابتدا حد توان را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}(f(x)-1)g(x)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos(t^2)dt}{x}=\frac{0}{0}$$

حالت ابهام $\frac{0}{0}$ است و با استفاده از هوپیتال و رعایت قاعده‌ی مشتق از انتگرال، داریم:

$$\lim_{x\to0}(\frac{\cos x^2}{1})=\cos(0)=1\Rightarrow\text{حاصل حد}=e^1=\mathbf{e}$$

۶ـ گزینه «۲» بسط تیلور تابع $\frac{1}{1-x}$ صفر (در واقع همان بسط مک‌لورن تابع) به صورت مقابل است:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

اگر از طرفین رابطه‌ی فوق مشتق بگیریم، داریم:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

می‌خواهیم یک‌بار دیگر از طرفین مشتق بگیریم تا درجه‌ی مخرج افزایش یابد. با توجه به گزینه‌ها، می‌خواهیم در سری ضریب n^2 ایجاد شود، پس ابتدا طرفین را در x ضرب می‌کنیم تا در داخل سری nx^n به‌وجود آید و با مشتق‌گیری از آن ضریب n^2 ایجاد شود.

بنابراین با ضرب x در طرفین داریم:

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

یک بار دیگر از طرفین رابطه‌ی فوق مشتق می‌گیریم:

$$\frac{1\times(1-x)^2-2(-1)(1-x)\times x}{(1-x)^4}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\Rightarrow\frac{(1-x)-2(-1)(x)}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\Rightarrow\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{n^2x^{n-1}}$$

۷ـ گزینه «۱» حجم حاصل از دوران منحنی $y=f(x)$ حول محور xها در بازه‌ی $[a,b]$ از رابطه $V=\pi\int_a^b y^۲dx$ حساب می‌شود.

$$V=\pi\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} y^۲dx=\pi\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۲ x\,dx=\pi\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+\cos ۲x}{۲}dx=\frac{\pi}{۲}\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}}(۱+\cos ۲x)dx=\frac{\pi}{۲}[x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x]_\circ^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$=\frac{\pi}{۲}[\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{۲}\sin(۲\times\frac{\pi}{۲})-(\circ+\circ)]=\frac{\pi^۲}{۴}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸ـ گزینه «۱» مساحت شکل حاصل از دوران منحنی $y=f(x)$ حول محور xها از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{S=۲\pi\int_a^b y\sqrt{+y'^۲}\,dx}}$$

در این سؤال $y=\frac{۱}{۳}x^۳$ و در نتیجه $y'=x^۲$ و $\circ\le x\le ۱$، بنابراین داریم:

$$S=۲\pi\int_\circ^۱\frac{۱}{۳}x^۳\sqrt{۱+(x^۲)^۲}=\frac{۲\pi}{۳}\int_\circ^۱ x^۳\sqrt{۱+x^۴}\,dx$$

با فرض $۱+x^۴=u$، آن‌گاه $۴x^۳dx=du$ و به عبارت دیگر $x^۳dx=\frac{du}{۴}$ و لذا داریم:

$$\text{حاصل انتگرال}=\frac{۲\pi}{۳}\int u^{\frac{۱}{۲}}(\frac{du}{۴})=\frac{\pi}{۶}\int u^{\frac{۱}{۲}}du=\frac{\pi}{۶}[\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}]\Rightarrow S=\frac{\pi}{۶}[\frac{۲}{۳}(۱+x)^{\frac{۳}{۲}}]_\circ^۱=\frac{\pi}{۶}(\frac{۲}{۳}(۱+۱)^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۲}{۳})$$

$$=\frac{\pi}{۶}(\frac{۲\times۲\sqrt{۲}}{۳}-\frac{۲}{۳})=\frac{۲\pi}{۱۸}(۲\sqrt{۲}-۱)=\mathbf{\frac{\pi}{۹}(۲\sqrt{۲}-۱)}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹ـ گزینه «۴» به طور کلی اگر $y=f(x)$ صعودی و $f(a)=c$ و $f(b)=d$ باشد، آن‌گاه:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_c^d f^{-۱}(y)dy=bd-ac$$

بنابراین در این تست داریم:

$$\underbrace{\int_\circ^۲ f(x)dx}_{\frac{۱}{۳}}+\int_\circ^۲ f^{-۱}(y)dy=۲\times۲-\circ\times\circ=۴\Rightarrow\int_\circ^۲ f^{-۱}(y)dy=۴-\frac{۱}{۳}=\mathbf{\frac{۱۱}{۳}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰ـ گزینه «۱»

می‌دانیم که $-۱\le\sin x\le ۱$ پس $-\frac{۱}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{۱}{x}$ (توجه داریم که در ناحیه‌ی انتگرال‌گیری، $x>\circ$ است) پس داریم:

$$\int_n^{n+۱}\frac{-۱}{x}dx\le\int_n^{n+۱}\frac{\sin x}{x}dx\le\int_n^{n+۱}\frac{۱}{x}dx\Rightarrow[-\ln x]_n^{n+۱}\le I_n\le[\ln x]_n^{n+۱}\Rightarrow\ln n-\ln(n+۱)\le I_n\le\ln(n+۱)-\ln n$$

$$\Rightarrow\ln(\frac{n}{n+۱})\le I_n\le\ln(\frac{n+۱}{n})$$

وقتی $n\to\infty$ آنگاه $\frac{n}{n+۱}$ و $\frac{n+۱}{n}$ هر دو به عدد یک میل می‌کند و $\ln(۱)=\circ$ است پس:

$$\circ\le\lim_{n\to\infty}I_n\le\circ$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty}I_n=\circ$

روش تستی: یک روش ساده‌تر زیبا استفاده از مفهوم «مقدار میانگین در انتگرال‌ها» می‌باشد، برای تابع پیوسته f در بازه بسته $[a,b]$ همواره داریم:

$$\boxed{\mathbf{\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)}}$$

که c متعلق به بازه $[a,b]$ می‌باشد. در این تست $a=n$، $b=n+۱$ و $f(x)=\frac{\sin x}{x}$، لذا داریم:

$$I_n=\int_n^{n+۱}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin c}{c}[(n+۱)-n]\Rightarrow\mathbf{I_n=\frac{\sin c}{c}}$$

از طرفی می‌دانیم $n<c<n+۱$ و لذا وقتی $n\to\infty$ آن گاه $c\to\infty$ و بنابراین $\lim_{c\to\infty}\frac{\sin c}{c}=\circ$ و در نتیجه حد I_n برابر **صفر** خواهد شد.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱ـ گزینه «۳» با توجه به گزینه‌ها واضح است باید مشتق μ نسبت به سه متغیر x ، y و z حساب شود.

$$\mu_x=\frac{\partial\mu}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial r}(۲)+\frac{\partial\mu}{\partial s}(-۴)+\frac{\partial\mu}{\partial t}(۷)$$

$$\mu_y=\frac{\partial\mu}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial r}(۳)+\frac{\partial\mu}{\partial s}(-۱)+\frac{\partial\mu}{\partial t}(-۲)$$

$$\mu_z=\frac{\partial\mu}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial\mu}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=\frac{\partial\mu}{\partial r}(-۱)+\frac{\partial\mu}{\partial s}(۱)+\frac{\partial\mu}{\partial t}(۱)$$

با توجه به ضرایب به دست آمده داریم:

$$\mu_x+\mu_y+۵\mu_z=۲(\frac{\partial\mu}{\partial r})+۳(\frac{\partial\mu}{\partial r})+۵(-۱)\frac{\partial\mu}{\partial r}=۰$$

۱۲ـ گزینه «۴» برای محاسبه حجم، از انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. محدوده‌ی تغییرات z، بین صفحه $z=۱$ و رویه $z=\frac{۱}{۸}(x^۲+y^۲)$ است. پس حدود z عبارتند از $z=\frac{۱}{۸}r^۲$ و $z=۱$.

از برخورد رویه‌ها به معادله‌ی $\frac{۱}{۸}(x^۲+y^۲)=۱$ می‌رسیم یعنی $x^۲+y^۲=۸$ که دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۸}$ است پس حدود انتگرال $۰\le\theta\le۲\pi$ و $۰\le r\le\sqrt{۸}$ به‌دست می‌آیند.

$$V=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\sqrt{۸}}\int_{\frac{۱}{۸}r^۲}^{۱}rdzdrd\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\sqrt{۸}}(r-\frac{۱}{۸}r^۳)drd\theta=\int_۰^{۲\pi}d\theta\int_۰^{\sqrt{۸}}(r-\frac{۱}{۸}r^۳)dr=\theta\Big|_۰^{۲\pi}\times(\frac{r^۲}{۲}-\frac{r^۴}{۳۲})\Big|_۰^{\sqrt{۸}}=۴\pi$$

۱۳ـ گزینه «۲» فرض کنید $g(t)=\int_۱^{\sin t}\sqrt{۱+u^۴}du$ باشد و $h(x)=\int_۰^{x}g(t)dt$ طبق صورت سؤال ما مشتق دومِ تابع $h(x)$ را می‌خواهیم $(f(x)=\frac{d^۲}{dx^۲}h(x))$ با توجه به ضابطه‌ی $h(x)$ داریم:

$$h'(x)=۱\times g(x)-۰\ \Rightarrow\ h'(x)=g(x)\ \Rightarrow\ h''(x)=g'(x)$$

با توجه به ضابطه‌ی $g(t)$ داریم:

$$g'(t)=\cos t\times\sqrt{۱+\sin^۴ t}-۰$$

پس با قراردادن x به جای t داریم:

$$g'(x)=\cos x\sqrt{۱+\sin^۲ x}$$

به این ترتیب:

$$h''(x)=g'(x)=\cos x\sqrt{۱+\sin^۲ x}\ \Rightarrow\ h''(\pi)=\cos\pi\sqrt{۱+\sin^۲\pi}=-۱$$

۱۴ـ گزینه «۲» معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه $F(x,y,z)=۰$ در نقطه‌ی $(x_۰,y_۰,z_۰)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$F'_x(x_۰,y_۰,z_۰)(x-x_۰)+F'_y(x_۰,y_۰,z_۰)(y-y_۰)+F'_z(x_۰,y_۰,z_۰)(z-z_۰)=۰$$

در معادله‌ی رویه باید همه‌ی متغیرها به یک سمت تساوی برده شوند:

$$F(x,y,z)=z-\sin x\sin y-\frac{۲x}{\pi}=۰$$

$$\left.\begin{aligned}&F'_x=-\cos x\sin y-\frac{۲}{\pi}\Rightarrow F'_x(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲},۲)=-\cos\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}-=-\frac{۲}{\pi}\\&F'_y=-\sin x\cos y\Rightarrow F'_y(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲},۲)=-\sin\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۲}=۰\\&F'_z=۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow(-\frac{۲}{\pi})(x-\frac{\pi}{۲})+(۰)(y-\frac{\pi}{۲})+۱(z-۲)=۰$$

معادله صفحه‌ی مماس به این صورت زیر نوشته می‌شود:

$$-\frac{۲}{\pi}x+۱+z-۲=۰\ \Rightarrow\ \pi z-۲x=\pi$$

۱۵ـ گزینه «۳» مرز C بسته است پس از قضیه‌ی گرین استفاده می‌کنیم.

$$I=\oint_C Pdx+Qdy=\iint_R(Q_x-P_y)dxdy=\iint_R(۳x^۲+۳y^۲)dxdy=۳\iint_R(x^۲+y^۲)dxdy$$

ناحیه‌ی R، درون دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبدأ مختصات می‌باشد، پس از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. لذا θ از ۰ تا ۲π و r از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند:

$$I=3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 rdrd\theta=3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 drd\theta=3\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^1 r^3du=(3\times 2\pi)\times[\frac{r^4}{4}]_0^1=3\times 2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{3\pi}{2}$$

۱۶ـ گزینه «۱» یادآوری می‌کنیم که در تابع $f(x,y)$ منظور از f_1 همان f_x است و منظور از f_2 همان f_y است.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3h^4}{h^3}-0}{h}=3\quad;\quad f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-5h^4}{h^3}}{h}=-5$$

۱۷ـ گزینه «۴» فاصله‌ی نقطه از صفحه xoy تا مبدأ مختصات برابر با $d=\sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد. برای راحتی در محاسبات ابتدا $f(x,y)=x^2+y^2$، در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادله‌ی $x^2y=54$ داریم $y=\frac{54}{x^2}$، پس f را بر حسب یک متغیر می‌نویسیم:

$$f=x^2+y^2=x^2+(\frac{54}{x^2})^2\Rightarrow f(x)=x^2+\frac{(54)^2}{x^4}\Rightarrow f'(x)=2x-\frac{(54)^2\times 4x^3}{x^8}=0$$

$$\Rightarrow 2x-\frac{(54)^2\times 4}{x^5}=0\Rightarrow 2x^6-(54)^2\times 4=0\Rightarrow x^6=\frac{(54)^2\times 4}{2}=\frac{(3^3\times 2)^2\times 4}{2}=3^6\times 2^3$$

$$\mathbf{x^2=18}\Rightarrow y=\frac{54}{x^2}=\frac{54}{18}=3\Rightarrow \mathbf{y^2=9}$$

بنابراین کمترین فاصله برابر است با:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{18+9}=\sqrt{27}=\mathbf{3\sqrt{3}}$$

۱۸ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $\begin{vmatrix}u=5x+2y+z\\ v=y-z+5\\ w=5z+3\end{vmatrix}$ برای ساده‌تر شدن معادله‌ی این رویه استفاده می‌کنیم. ژاکوبین این دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xyz}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}5&2&1\\0&1&-1\\0&0&5\end{vmatrix}=25\Rightarrow J_{uvw}=\frac{1}{25}$$

با این تغییر متغیر رویه موردنظر به صورت $u^2+v^2+w^2=25$ در می‌آید. رویه جدید کره‌ای به شعاع ۵ است که حجم آن برابر $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times 5^3$ است ولی این مقدار را باید در ژاکوبین ضرب کنیم که در این صورت جواب $\mathbf{\frac{1}{25}\times\frac{4}{3}\pi\times 5^3=\frac{20\pi}{3}}$ است.

۱۹ـ گزینه «۴» S یک سطح بسته است که درون آن استوانه‌ای به ارتفاع ۳ و شعاع ۳ قرار گرفته است، از قضیه دیورژانس می‌توانیم استفاده کنیم:

$$div\vec{F}=3+3-4=2\Rightarrow\iint_S\vec{F}.dS\iiint_V div\vec{F}dV=\iiint_V 2dV=2\times(\text{حجم استوانه})=2\times(9\pi\times 3)=\mathbf{54\pi}$$

۲۰ـ گزینه «۴» از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. منحنی C مرز قسمتی از صفحه‌ی $S:x+2y+z=7$ است.

$$curl\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ -2y+e^{x^2}&3x+\cos y^2&e^{z^2}\end{vmatrix}=5\vec{k}$$

صفحه تصویر را همان‌طور که در صورت سؤال گفته صفحه xoy در نظر می‌گیریم؛پس بردار قائم بر آن $\vec{n}=\vec{k}$ است. تصویر S بر صفحه xoy درون دایره $x^2+y^2=1$ است، این ناحیه را R می‌نامیم. بنابراین داریم:

$$\int_C\vec{F}.d\vec{r}=\iint_S curl\vec{F}.\vec{n}dS=\iint_R 5\vec{k}.\vec{k}dxdy=\iint_R 5dxdy=5\times(\text{مساحت دایره به شعاع یک})=\mathbf{5\pi}$$

رشته مهندسی صنایع سیستم ـ سراسری ۹۲ (مشترک با رشته MBA)

توضیح: دانشجویان گرامی در آزمون سراسری سال ۹۲ سؤالات ریاضی عمومی رشته مهندسی صنایع سیستم و رشته MBA مشترک بودند.

۱ـ مقدار $\int_0^1 e^{\sqrt{1-x}}dx$ ، کدام است؟

۱) ۱   ۲) $2(\frac{1}{e}-1)$ ۳) $2e-1$ ۴) ۲

۲ـ فرض کنید z_1,z_2,z_3,z_4 بر محیط دایره به شعاع ۴ و به مرکز مبدأ مختصات قرار دارند؛ و رئوس یک مربع را تشکیل می‌دهند. در این صورت مقدار کدام‌یک از عبارت‌های زیر با بقیه فرق دارد؟

۱) $z_1^4+z_2^4+z_3^4+z_4^4$ ۲) $z_1^3+z_2^3+z_3^3+z_4^3$ ۳) $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2$ ۴) $z_1+z_2+z_3+z_4$

۳ـ ظرفی به شکل نیم‌کره با شعاع ۴ سانتی‌متر را روی زمین قرار داده و درون آن تا ارتفاع ۳ سانتی‌متر از سطح زمین آب ریخته‌ایم. حجم آب داخل ظرف کدام است؟

۱) 9π ۲) 18π ۳) 27π ۴) 64π

۴ـ فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(1+e^{\frac{1}{x}})^{-1} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$ باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $f(x)$ در $x=0$، فقط پیوستگی چپ دارد.

۲) $f(x)$ در $x=0$، پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

۳) $f(x)$ در $x=0$، مشتق‌پذیر است.

۴) $f(x)$ در $x=0$، فقط پیوستگی راست دارد.

۵ـ اگر $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x)^\beta}{x^\alpha}dx$ باشد، به ازای کدام α و βهای زیر، I همگراست؟

۱) $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta=\frac{1}{4}$ ۲) $\alpha=2$ و $\beta=-\frac{1}{2}$ ۳) $\alpha=2$ و $\beta=\frac{1}{2}$ ۴) $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta=-\frac{3}{4}$

۶ـ حاصل $\lim_{x\to+\infty}(\frac{\sinh x-1}{\sinh x+1})^{3\cosh x-2}$ ، کدام است؟

۱) e^{-6} ۲) e^{-1} ۳) e^{-2} ۴) e^{-3}

۷ـ در میان تمام مستطیل‌های محیط بر مستطیلی مفروض با اضلاع ۲ و ۴، مقدار ماکزیمم مساحت کدام است؟

۱) ۱۳   ۲) ۱۶   ۳) ۱۷   ۴) ۱۸

۸ـ مقدار $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(3^n)}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $3\sqrt{3}\pi$ ۳) 3π ۴) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

۹ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\sin x+7\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$ ، کدام است؟

۱) $\frac{13\pi}{62}+\frac{1}{31}Ln\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{31\pi}{13}+\frac{1}{13}Ln\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{31\pi}{26}+\frac{1}{13}Ln\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{13\pi}{31}+\frac{1}{31}Ln\frac{3}{2}$

۱۰ـ فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با مشتقات جزئی پیوسته و $f(u,v)=g(x,y)$ باشد؛ که در آن $\begin{cases}u=3x^2+y\\ v=x+3y^2\end{cases}$ و همچنین $f_u(5,13)=5$ و $f_v(5,13)=10$ است. در این صورت مقدار $g_x(1,2)+g_y(1,2)$ کدام است؟

۱) ۱۴۵   ۲) ۱۵۰   ۳) ۱۶۰   ۴) ۱۶۵

۱۱ـ فرض کنید $f(x)=\int_0^{\frac{1}{x}}\sin(x^2t)dt$ باشد، مقدار $f'(\pi)$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{\pi^3}$ ۲) $\frac{4}{\pi^2}$ ۳) $\frac{2}{\pi^2}$ ۴) $-\frac{4}{\pi^2}$

۱۲ـ فرض کنید W رویه‌ی $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z>0\end{cases}$ و قائم واحد برون‌گرا روی W با $\vec{n}$ نمایش داده شود. اگر حجم ناحیه‌ی محدود به W و صفحه‌ی xoy در $\mathbb{R}^3$ برابر V و $\vec{F}=(e^{y^2+z^2},e^{x^2+z^2},4+2z+x^2+y^2)$ باشد، آن‌گاه مقدار $\iint_W \vec{F}.\vec{n}ds$ کدام است؟

۱) $V+4\pi$ ۲) $V+2\pi$ ۳) $2V+\frac{9\pi}{2}$ ۴) $2V+\frac{7\pi}{2}$

۱۳ـ کدام‌یک از بردارهای زیر، بر منحنی فصل مشترک دو رویه‌ی $x^2+\sin y+z^2=2$ و $2x^3-\cos y+z^3=4$ در نقطه‌ی $(1,\pi,1)$ مماس است؟

۱) $(-1,2,2)$ ۲) $(1,2,2)$ ۳) $(1,2,-2)$ ۴) $(1,-2,2)$

۱۴ـ مساحت بخشی از رویه‌ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ که توسط استوانه‌ی $x^2+y^2=ax$ بریده می‌شود، کدام است؟

۱) $4a^3(\pi-1)$ ۲) $2a^3(\pi-2)$ ۳) $a^3(2\pi-1)$ ۴) $2a^3(\pi-1)$

۱۵ـ مقدار $I=\iiint_W((x+y+2z)^2+(3y+5z)^2+z^2)dv$، کدام است در صورتی که ناحیه‌ی W به‌صورت $(x+y+2z)^2+(3y+5z)^2+z^2\le 1$، باشد.

۱) $\frac{2\pi}{5}$ ۲) $\frac{2\pi}{15}$ ۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{4\pi}{15}$

۱۶ـ مقدار $I=\oint_C (y+\sqrt[7]{9+\sin x})dx+(x+\sqrt[9]{7+\cos y})dy$ که در آن C منحنی بسته‌ی $x^8+y^8=1$ در جهت مثلثاتی می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) 0 ۴) 2π

۱۷ـ فرض کنید $f(x,y,z)=3x+2yz+2zx+5y+z^2$ باشد، ماکزیمم مقدار f در نقاط واقع بر فصل مشترک دو رویه‌ی $x+y+z=3$ و $2x+3y+3z^2=8$، کدام است؟

۱) $\frac{54}{4}$ ۲) 13 ۳) $\frac{57}{4}$ ۴) $\frac{59}{4}$

۱۸ـ اگر $f(x,y)$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد. مقدار $I=\int_1^2\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dydx$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

۱) $\int_0^1\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dxdy$ ۲) $\int_0^2\int_{2-y}^{1-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dxdy$ ۳) $\int_0^1\int_{2-y}^{1-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dxdy$ ۴) $\int_0^2\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dxdy$

۱۹ـ مقدار $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x}-e^{-6x}}{x}dx$، کدام است؟

۱) $Ln\frac{1}{3}$ ۲) $Ln2$ ۳) $Ln3$ ۴) $Ln\frac{1}{2}$

۲۰ـ فرض کنید S کره‌ای به شعاع R حول مبدأ مختصات باشد. در این صورت انتگرال‌های ناسره‌ی I و J به ترتیب .... و .... هستند.

$$I=\iiint_{S-\{(0,0,0)\}}\frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}Ln\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}\ ,\ J=\iiint_{S-\{(0,0,0)\}}\frac{Ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

۱) واگرا ـ واگرا ۲) همگرا ـ واگرا ۳) همگرا ـ همگرا ۴) واگرا ـ همگرا

پاسخنامه رشته مهندسی صنایع سیستم ـ سراسری ۹۲ (مشترک با رشته MBA)

۱ـ گزینه «۴» از تغییر متغیر $1-x=t^2$، نتیجه می‌شود $dx=-2tdt$. اگر $x=0$، آن‌گاه $t=1$ و اگر $x=1$، آن‌گاه $t=0$. لذا داریم:

$$\int_0^1 e^{\sqrt{1-x}}dx=\int_1^0 e^{\sqrt{t^2}}(-2tdt)=-\int_1^0 2te^t dt=2\int_0^1 te^t dt=2(te^t-e^t)\Big|_0^1=\mathbf{2}$$

تذکر: حاصل انتگرال آخر با استفاده از قاعده‌ی جزءبه جزء (روش جدول) محاسبه شده است.

روش تستی: اگر بخواهیم به تست کَلَکْ بزنیم! بدون حل این انتگرال نیز می‌توانیم به سؤال جواب دهیم. حداکثر مقدار تابع زیر انتگرال به ازای $x=0$ حاصل می‌شود، که مقدارش برابر با e است و حداقل آن نیز به ازای $x=1$ حاصل می‌شود که مقدارش برابر با ۱ است. بنابراین انتگرال کوچکتر از $\int_0^1 edx=e$ و بزرگتر از $\int_0^1 1dx=1$ است. به نظر شما کدام عدد از بین گزینه‌ها می‌تواند در چنین شرایطی صدق کند!؟ واضح است؛ فقط عدد ۲ که در گزینه (۴) داده شده می‌تواند در این محدوده قرار گیرد!! این سؤال هم از آن سؤالاتی بود که سر جلسه‌ی کنکور در حین خوردن کیک و ساندیس سازمان سنجش بدون دخالت خودکار و دست نیز می‌توانستید پاسخ دهید!!

۲ـ گزینه «۱» این سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: چون چهار نقطه‌ی z_1، z_2، z_3 و z_4 رئوس یک مربع هستند، بنابراین به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ با یکدیگر اختلاف زاویه دارند. از طرفی چون شعاع دایره برابر ۴ است، بنابراین برای چهار نقطه $r=4$ می‌باشد. نقاط موردنظر را به ترتیب $4e^{i\theta}$، $4e^{(\frac{\pi}{2}+\theta)i}$، $4e^{(\pi+\theta)i}$ و $4e^{(\frac{3\pi}{2}+\theta)i}$ در نظر می‌گیریم،

در این صورت داریم:

$$z_1+z_2+z_3+z_4=4e^{i\theta}(1+e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{\pi i}+e^{\frac{3\pi}{2}i})=4e^{i\theta}(1+i-1-i)=0$$

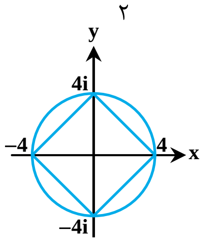
$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=16e^{2\theta i}(1+e^{\pi i}+e^{2\pi i}+e^{3\pi i})=16e^{2i\theta}(1-1+1-1)=0$$

$$z_1^3+z_2^3+z_3^3+z_4^3=64e^{3\theta i}(1+e^{\frac{3\pi}{2}i}+e^{3\pi i}+e^{\frac{9\pi}{2}i})=64e^{i3\theta}(1-i-1+i)=0$$

$$z_1^4+z_2^4+z_3^4+z_4^4=256e^{4\theta i}(1+e^{2\pi i}+e^{4\pi i}+e^{6\pi i})=256e^{i4\theta}(1+1+1+1)=1024e^{4\theta i}$$

دقت کنید در معادلات فوق از روابط زیر استفاده کردیم:

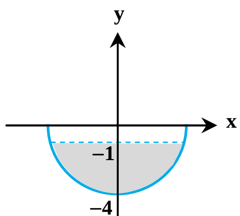
$$e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i\ ,\ e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1\ ,\ e^{\frac{3\pi}{2}i}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i\ ,\ e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$



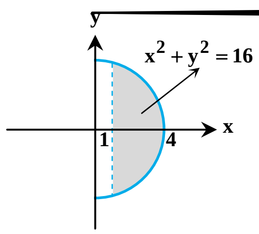
روش دوم (روش ساده‌تر): یک روش دیگر این است که چهار نقطه‌ی z_1، z_2، z_3 و z_4 را طوری در نظر بگیریم که در شرایط سؤال صدق کنند و از طرفی محاسبه‌ی مقادیر خواسته شده در گزینه‌ها راحت‌تر باشد. چون گفته شده این نقاط روی دایره‌ای به شعاع ۴ هستند، بنابراین می‌توانیم این نقاط را $z_1=4$، $z_2=-4$، $z_3=4i$ و $z_4=-4i$ در نظر بگیریم (دقت کنید بر اساس متن سؤال این نقاط باید رئوس یک مربع هم باشند). حالا می‌توانیم مقادیر گزینه‌ها را حساب کنیم که به راحتی مقادیر گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) برابر صفر به‌دست می‌آید.

تذکر مهم: در محاسبه‌ی مقادیر چهار گزینه (چه در روش اول و چه در روش دوم) پس از به‌دست آوردن مقدار سه گزینه می‌توان جواب را تعیین کرد و عملاً محاسبه‌ی گزینه‌ی چهارم لزومی ندارد. چون سؤال پرسیده «مقدار کدام گزینه با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟» این موضوع جهت صرفه‌جویی در وقت در روز آزمون در مورد این‌گونه سؤالات مدنظر شما قرار گیرد.

۳ـ گزینه «۳» مطابق شکل (۱)، می‌توانیم ظرف نیم‌کره را حاصل از دوران یک نیم‌دایره به شعاع ۴ حول محور y ها در نظر بگیریم. ولی از آنجا که معمولاً محور دوران محور x ها می‌باشد و در منحنی دوران یافته نیز y تابعی از x است، شکل را چرخانده ($\frac{\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی دوران داده‌ایم) و حجم حاصل از دوران نیم‌دایره به شعاع ۴، در شکل (۲) را محاسبه می‌کنیم.



شکل (۱)

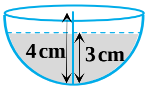


شکل (۲)

می‌دانیم حجم حاصل از دوران حول محور x ها از رابطه $V=\pi\int y^2dx$ به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\text{حجم}=\pi\int_1^4 y^2dx=\pi\int_1^4(16-x^2)dx=\pi(16x-\frac{x^3}{3})\Big|_1^4=\pi(64-\frac{64}{3}-16+\frac{1}{3})=\mathbf{27\pi}$$

حل غیر رسمی: در صورتی که داوطلب روش حل فوق را در روز آزمون به خاطر نیاورد! یک حل غیر رسمی به شکل زیر پیشنهاد می‌شود!!



می‌دانیم حجم کل نیم‌کره برابر $\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}$ است و چون $R=۴$، بنابراین حجم نیم‌کره کامل برابر با $\frac{۲}{۳}\pi\times ۴^{۳}=\frac{۱۲۸}{۳}\pi\simeq ۴۳\pi$ می‌باشد. اما سؤال گفته؛ تا شعاع ارتفاع ۳ سانتی‌متری آب ریخته‌ایم، یعنی فقط یک سانتی‌متر مانده تا حجم کل نیم‌کره پر شود. پس انتظار داریم در کمتر از $\frac{۳}{۴}$ حجم کل نیم‌کره پر شده باشد، یعنی $\frac{۳}{۴}\times ۴۳\pi\simeq ۳۳\pi$، کمترین و نزدیکترین عدد به ۳۳π، عدد ۲۷π است.

توضیح: ممکن است برای شما این سؤال پیش بیاید: چرا کمتر از $\frac{۳}{۴}$ حجم نیم‌کره، را باید به عنوان حجم آب پر شده تا شعاع ۳ سانتی‌متری در نظر گرفت؟ جواب این است، اگر شکل کاملاً همگن بود (مثلاً یک مکعب مربع) آن وقت می‌شد گفت دقیقاً به اندازه‌ی $\frac{۳}{۴}$ حجم آب پر شده، ولی در نیم کره چون در قسمت فوقانی سطح مقطع بیشتر است، بنابراین حجم آب به طور متفاوت قرار می‌گیرد و در یک سانتی‌متر بالایی، بیشتر از یک سانتی‌مترهای دیگر آب جای خواهد گرفت.

۴ـ گزینه «۴» ابتدا شرایط پیوستگی تابع را بررسی می‌کنیم، برای پیوستگی باید حد چپ و حد راست تابع با مقدار تابع (یعنی صفر) برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^{+}}(۱+e^{\frac{۱}{x}})^{-۱}=\dfrac{۱}{۱+e^{\frac{۱}{۰^{+}}}}=\dfrac{۱}{۱+e^{+\infty}}=\dfrac{۱}{+\infty}=۰\\[3ex] \lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^{-}}(۱+e^{\frac{۱}{x}})^{-۱}=\dfrac{۱}{۱+e^{\frac{۱}{۰^{-}}}}=\dfrac{۱}{۱+e^{-\infty}}=\dfrac{۱}{۱+۰}=۱\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=f(۰)=۰$$

بنابراین تابع موردنظر در نقطه‌ی $x=۰$ فقط از راست پیوسته است و بنابراین مشتق‌پذیر نیست.

۵ـ گزینه «۱» انتگرال موردنظر در $x=۰$ ناسره است، $\sin x$ هم‌ارز x است. بنابراین داریم:

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^{\beta}x}{x^{\alpha}}dx\sim\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{x^{\beta}}{x^{\alpha}}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dx}{x^{\alpha-\beta}}$$

برای همگرایی لازم است $\alpha-\beta<۱$ باشد که فقط گزینه (۱) این ویژگی را دارد.

۶ـ گزینه «۱» حد داده شده، حالت مبهم $(۱)^{\infty}$ است، بنابراین داریم:

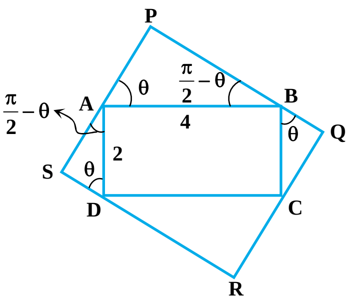
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sinh x-۱}{\sinh x+۱}\right)^{۳\cosh x-۲}=\lim_{x\to+\infty}e^{(۳\cosh x-۲)(\frac{\sinh x-۱}{\sinh x+۱}-۱)}=\lim_{x\to+\infty}e^{(۳\cosh x-۲)(\frac{-۲}{\sinh x+۱})}$$

توجه کنید که وقتی $x\to\infty$، خواهیم داشت $\lim\limits_{x\to\infty}\sinh x=\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\cosh x=\infty$ پس $\sinh x+۱\simeq\sinh x$ و $۳\cosh x-۲\simeq ۳\cosh x$ در نتیجه داریم:

$$\text{جواب حد}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-۶\cosh x+۴}{\sinh x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{-۶\,\text{cotgh}\,x}=\lim_{x\to+\infty}e^{-۶(\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}})}\simeq\lim_{x\to+\infty}e^{-۶(\frac{e^{x}}{e^{x}})}=\mathbf{e^{-۶}}$$

۷ـ گزینه «۴» می‌خواهیم مطابق شکل مساحت مستطیل PQRS ماکزیمم شود:

مساحت مستطیل PQRS برابر $PQ\times PS$ می‌باشد. اندازه‌ی PQ و PS را بر حسب اضلاع مستطیل ABCD به‌دست می‌آوریم:



$$PQ=PB+BQ=۴\sin\theta+۲\cos\theta$$
$$PS=PA+AS=۴\cos\theta+۲\sin\theta$$

بنابراین مساحت مستطیل PQRS برابر با مقدار زیر است:

$$PQ\times PS=(۴\sin\theta+۲\cos\theta)(۴\cos\theta+۲\sin\theta)=۱۶\cos\theta\sin\theta+۸\cos^{۲}\theta+۸\sin^{۲}\theta+۴\cos\theta\sin\theta=۸+۲۰\sin\theta\cos\theta=۸+۱۰\sin۲\theta$$

حداکثر مقدار فوق وقتی حاصل می‌شود که $\sin ۲\theta=۱$ باشد که در این صورت مساحت برابر **۱۸** خواهد بود.

۸ـ گزینه «۴» می‌دانیم بسط مک‌لورن Arctgx به‌صورت مقابل است:

$$\text{Arctg}x=x-\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۵}}{۵}-\cdots=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱}$$

اگر در بسط فوق به جای xها، $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ قرار دهیم، تقریباً به همان سری داده شده در صورت سؤال می‌رسیم:

$$\text{Arctg}\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^{۲n}(\frac{۱}{\sqrt{۳}})}{۲n+۱}\Rightarrow\frac{\pi}{۶}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{\sqrt{۳}(۲n+۱)۳^{n}}\Rightarrow\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\mathbf{(-۱)^{n}}}{\mathbf{(۲n+۱)۳^{n}}}=\frac{\pi\sqrt{۳}}{۶}$$

روش تستی: همیشه وقتی مجموع یک سری داده می‌شود، نگاهی به گزینه‌ها بیاندازید اگر اعداد داده شده در گزینه‌ها خیلی به هم نزدیک نباشند، می‌توانیم چند جمله‌ی اول سری را بنویسیم و حاصل حدودی سری را تخمین بزنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}=\frac{(-1)^0}{(2\times0+1)3^0}+\frac{(-1)^1}{(2\times1+2)3^1}+\frac{(-1)^2}{(2\times2+1)3^2}+\frac{(-1)^3}{(2\times3+1)3^3}+-\cdots=1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{7\times27}=\frac{8}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+-\cdots$$

به راحتی واضح است مجموع این سری عددی نزدیک به ۱ است. در گزینه‌ها تنها گزینه‌ای که مقدارش نزدیک به ۱ است، گزینه (۴) است.

۹ــ گزینه «۳» برای حل انتگرال‌هایی به‌صورت کلی $I=\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}dx$، باید صورت کسر را به‌صورت ترکیب خطی از جمله‌ی «مخرج کسر» و «مشتق مخرج کسر» بنویسیم. در واقع با این کار انتگرال به دو قسمت تقسیم می‌شود، که قسمت اول آن شامل ضریبی از عبارت مخرج کسر است و قسمت دوم ضریبی از مشتق عبارت مخرج کسر است. بنابراین حاصل این انتگرال‌ها (نوع معین)، شامل عباراتی است که قسمت اول آن ضریبی از اختلاف حدود پایین و بالای انتگرال است و قسمت دوم آن Ln مخرج کسر با ضریبی در پشت آن است که عبارت جلوی Ln با جایگذاری حدود بالا و پایین انتگرال به‌دست آمده است. مثلاً در این تست واضح است عبارت جلوی Ln باید از بین اعداد $\frac{3}{2}$ یا $\frac{2}{3}$ انتخاب شود (ممکن است علامت منفی پشت Ln ایجاد شده باشد و عبارت جلوی Ln معکوس شود) بنابراین یادتان باشد: اگر طراح در انتخاب این عدد اشتباه کند، شما به راحتی می‌توانید بدون حل تست، پاسخ صحیح را علامت بزنید!

اما حالا روش تشریحی حل سؤال را ارائه می‌کنیم: ابتدا ضرایب لازم برای نوشتن ترکیب خطی صورت کسر را به‌دست می‌آوریم.

$$5\sin x+7\cos x=A(2\sin x+3\cos x)+B(2\cos x-3\sin x)\Rightarrow 5\sin x+7\cos x=(2A-3B)\sin x+(3A+2B)\cos x$$

ضریب $\sin x$ در سمت چپ ۵ و ضریب $\cos x$ در سمت چپ ۷ است. بنابراین با متحد قرار دادن طرفین تساوی، دستگاه زیر را داریم:

$$\Rightarrow\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\begin{cases}2A-3B=5\\3A+2B=7\end{cases}\Rightarrow 4A+9A=10+21\Rightarrow 13A=31\Rightarrow A=\frac{31}{13}\ ,\ B=-\frac{1}{13}$$

حالا اگر قسمت سمت راست تساوی را جایگزین قسمت سمت چپ کنیم، داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\sin x+7\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{31}{13}(2\sin x+3\cos x)+\frac{-1}{13}(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}dx$$

$$=\frac{31}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\frac{-1}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{31}{13}(\frac{\pi}{2})+\frac{-1}{13}[\mathrm{Ln}(2\sin x+3\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{\frac{31\pi}{26}+\frac{1}{13}Ln\frac{3}{2}}$$

روش تستی: واضح است؛ کسر داده شده در مقابل انتگرال، همواره بزرگتر از ۲ و کوچکتر از ۳ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2dx=\pi<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\sin x+7\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}3dx=\frac{3\pi}{2}$$

در بین گزینه‌ها، فقط گزینه (۳) بزرگتر از π و کوچکتر از $\frac{3\pi}{2}$ می‌باشد.

توضیح: احتمالاً اکثر شما عزیزان می‌دانید چرا حاصل کسر بزرگتر از ۲ و کوچکتر از ۳ است، اما آن دسته از خوانندگان که احتمالاً نمی‌دانند، توجه کنند که $\sin x$ و $\cos x$ در بازه $(0,\frac{\pi}{2})$ هر دو مقادیر مثبت دارند و $4\sin x+6\cos x$، دو برابر مخرج کسر می‌باشد و این در حالی است که صورت کسر برابر $5\sin x+7\cos x$ است و این یعنی کسر بزرگتر از ۲ است و به همین ترتیب حاصل کسر کوچکتر از ۳ است، با استدلالی مشابه، معلوم است صورت کسر، کمتر از «سه برابرِ مخرج کسر» است.

تذکر: بهترین روش کلی و ساده‌ی حل این‌گونه انتگرال‌ها به‌صورتی است که در پاسخ به این تست (روش اول) خدمت شما ارائه گردید. ارائه روش‌های دیگر، سخت‌تر و وقت‌گیرتر از حل فوق است که توسط برخی دوستان ارائه گردیده است!!

۱۰ــ گزینه «۴» توجه کنید که به ازای $x=1$ و $y=2$ مقدار $u=5$ و $v=13$ به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}g_x(1,2)=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=5\times6x+10\times1=40\\g_y(1,2)=\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}=5\times1+10\times6y=125\end{cases}\Rightarrow g_x(1,2)+g_y(1,2)=40+125=\mathbf{165}$$

۱۱ـ گزینه «۴» استفاده از قاعده‌ی تعمیم مشتق‌گیری از انتگرال راه‌حل اصلی این تست است. اما با توجه به این که به‌دست آوردن حاصل انتگرال و بعد مشتق گرفتن از عبارت به‌دست آمده، کمی آسان‌تر است، لذا ابتدا این روش را ارائه می‌دهیم:

$$f(x)=\int_{0}^{\frac{1}{x}}\sin(x^2t)\,dt=\left[-\frac{1}{x^2}\cos x^2t\right]_{0}^{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x^2}\cos x^2\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\cos x^2(0)=-\frac{1}{x^2}\cos x+\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x^3}\cos x+(-\sin x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^3}\ \Rightarrow f'(\pi)=\frac{2}{\pi^3}\cos\pi+(-\sin\pi)\left(-\frac{1}{\pi^2}\right)-\frac{2}{\pi^3}=-\frac{2}{\pi^3}-\frac{2}{\pi^3}=-\frac{4}{\pi^3}$$

روش دیگر: طبق قاعده‌ی مشتق‌گیری از انتگرال عمل می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}\sin\left[x^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]-0+\int_{0}^{\frac{1}{x}}2tx\cos(tx^2)\,dt\ \Rightarrow f'(\pi)=\underbrace{\frac{-1}{\pi^2}\sin\pi}_{\text{صفر}}+\underbrace{\int_{0}^{\frac{1}{\pi}}2t\pi\cos(\pi^2t)\,dt}_{I}$$

حاصل انتگرال I را به طریق جزء به جزء به‌دست می‌آوریم:

مشتق	انتگرال
$2t\pi$ $\oplus$	$\cos\pi^2t$
2π $\ominus$	$\frac{1}{\pi^2}\sin\pi^2t$
0	$\frac{-1}{\pi^4}\cos\pi^2t$

$$\Rightarrow I=\int_{0}^{\frac{1}{\pi}}2t\pi\cos(\pi^2t)\,dt=\frac{2t}{\pi}\sin(\pi^2t)+\frac{2}{\pi^3}\cos(\pi^2t)$$

بنابراین داریم:

$$f'(\pi)=\left(\frac{2t}{\pi}\sin\pi^2t+\frac{2}{\pi^3}\cos\pi^2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{\pi}}=\frac{-4}{\pi^3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲ـ گزینه «۳» شرط قضیه دیورژانس بسته بودن سطح است ولی سطح W بسته نیست، کافی است سطح درون دایره $x^2+y^2=1$ با قائم رو به بیرون $\vec{n}=-\vec{k}$ را به آن اضافه کنیم تا سطح بسته شود، و در این صورت طبق قضیه‌ی دیورژانس داریم:

$$\iint_W \vec{F}.\vec{n}ds+\iint_{x^2+y^2\le 1}\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V \mathrm{div}\vec{F}dv=\iiint_V 2dv=2V$$

حال به محاسبه‌ی $\iint_{x^2+y^2\le 1}\vec{F}.\vec{n}ds$ می‌پردازیم، چون سطح موردنظر روی صفحه‌ی $g:z=0$ است و بردار قائم خارجی آن $\vec{n}=-\vec{k}$ است.

پس $ds=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.(-\vec{k})|}dA=dA$ و $\vec{F}.\vec{n}=\vec{F}.(-\vec{k})=-(4+2z+x^2+y^2)=-(4+x^2+y^2)$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\vec{F}.\vec{n}ds=-\iint_{x^2+y^2\le 1}(4+x^2+y^2)dA\ \xlongequal{\text{مختصات قطبی}}\ -\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}(4+r^2)r\,dr\,d\theta=-\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{1}(4r+r^3)dr=(-2\pi)\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{-9\pi}{2}$$

از محاسبات فوق نتیجه می‌شود:

$$\iint_W \vec{F}.\vec{n}ds=2V+\frac{9\pi}{2}$$

توجه: به طور کلی هرگاه سطح S روی صفحه‌ی $g:z=0$ قرار داشته باشد، $ds=dxdy=dA$ خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۳ـ گزینه «۱» قرار می‌دهیم $f:x^2+\sin y+z^2-2=0$ و $g:2x^3-\cos y+z^3=4$ و در این صورت بردار موردنظر همان $\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g$ می‌باشد.

$$\vec{\nabla}f=(2x,\cos y,2z)\Big|_{(1,\pi,1)}=(2,-1,2)\qquad \text{و}\qquad \vec{\nabla}g=(6x^2,\sin y,3z^2)\Big|_{(1,\pi,1)}=(6,0,3)$$

$$\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&2\\6&0&3\end{vmatrix}=-3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}$$

که واضح است این بردار موازی بردار $-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴ـ گزینه «۲» هدف محاسبه‌ی $\iint ds$ می‌باشد که در آن $ds=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dA$ و استوانه در مختصات قطبی به‌صورت $r=a\cos\theta$، $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ درمی‌آید که به دلیل تقارن بازه θ را $[0,\frac{\pi}{2}]$ در نظر می‌گیریم و حاصل انتگرال را در ۲ ضرب می‌کنیم. در ضمن حاصل انتگرال را دوباره در ۲ ضرب می‌کنیم چون نسبت به صفحه xoy متقارن است:

$$\text{مساحت}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdrd\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a-a\sin\theta)d\theta=\mathbf{2a^2(\pi-2)}$$

تذکر: متأسفانه در صورت این سؤال غلط تایپی وجود دارد و آن این که در تمام گزینه‌ها به جای a^2، به اشتباه a^3 قرار داده شده بود. معلوم نیست سازمان سنجش این نوع غلط‌ها را جزو سؤالات حذفی خود در نظر بگیرد یا نه؟

۱۵ـ گزینه «۴» با توجه به معادله‌ی ناحیه‌ی W قرار می‌دهیم: $\begin{cases}u=x+y+2z\\ v=3y+5z\\ w=z\end{cases}$. در این صورت داریم:

$$J_{xyz}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&3&5\\0&0&1\end{vmatrix}=3\Rightarrow J_{uvw}=\frac{1}{3}$$

با تغییر متغیر فوق، معادله‌ی W به‌صورت $u^2+v^2+w^2\le1$ درمی‌آید و با استفاده از مختصات کروی داریم $0\le\theta\le2\pi$، $0\le\phi\le\pi$ و $0\le\rho\le1$. بنابراین به انتگرال زیر می‌رسیم:

$$I=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le1}(u^2+v^2+w^2)(\frac{1}{3})dudvdw\ \xlongequal{\text{مختصات کروی}}\ \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1\rho^4\sin\phi.d\rho d\phi d\theta=\frac{1}{3}[\frac{\rho^5}{5}]_0^1\times[-\cos\phi]_0^{\pi}\times[\theta]_0^{2\pi}=\frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{15}}$$

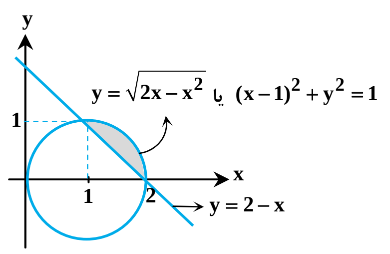
۱۶ـ گزینه «۳» چون منحنی C بسته است و میدان نیرو پایستار است، پس کار انجام شده برابر صفر است.

$$\begin{cases}P=y+\sqrt[7]{9+\sin x}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=1\\ Q=x+\sqrt[9]{7+\cos y}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1\Rightarrow\text{میدان پایستار است}$$

۱۷ـ گزینه «۴» از رابطه‌ی $x+y+z=3$، مقدار x را برحسب y و z به‌دست می‌آوریم و در f و شرط دوم جایگذاری می‌کنیم. در این صورت، تابع f به‌صورت $f(y,z)=-z^2+3z+2y+9$ و شرط دوم به‌صورت $3z^2-2z+y=2$ درمی‌آید. از این شرط $y=2+2z-3z^2$ درمی‌آید و در این صورت تابع f به‌صورت $f(z)=-7z^2+7z+13$ درمی‌آید.

$$f'(z)=7-14z=0\Rightarrow z=\frac{1}{2}\Rightarrow f(\frac{1}{2})=\frac{59}{4}$$

۱۸ـ گزینه «۱» در انتگرال داده شده داریم $\begin{cases}2-x\le y\le\sqrt{2x-x^2}\\ 1\le x\le2\end{cases}$. منحنی $y=2-x$ یا $x+y=2$ که معادله یک خط است و $y=\sqrt{2x-x^2}$ یا $(x-1)^2+y^2=1$ معادله یک نیم‌دایره است (چون y مساوی یک رادیکال است، پس y مثبت است و منحنی نیم‌دایره می‌باشد)، که در شکل زیر رسم شده‌اند:



$$\begin{cases}0\le y\le1\\ 2-y\le x\le1+\sqrt{1-y^2}\end{cases}$$

توضیح:

$$y=\sqrt{2x-x^2}\Rightarrow y^2=2x-x^2\Rightarrow x^2-2x+y^2=0\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1\Rightarrow(x-1)^2=1-y^2\Rightarrow x-1=\pm\sqrt{1-y^2}\Rightarrow x=1\pm\sqrt{1-y^2}$$

حالا چون در این ناحیه $x\ge1$ است داریم $x=1+\sqrt{1-y^2}$.

۱۹ـ گزینه «۳» ابتدا روش کلی حل اینگونه انتگرال‌ها را ارائه می‌کنیم:

$$\int_a^b e^{-xy}dy=\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_a^b\int_0^{\infty}e^{-xy}dxdy=\int_a^b-\frac{e^{-xy}}{y}\Big|_0^{\infty}dy=\int_a^b\frac{dy}{y}=\mathrm{Ln}\frac{b}{a}$$

در این سؤال $b=6$ و $a=2$ می‌باشد، لذا $I=\mathrm{Ln}\frac{6}{2}=\mathrm{Ln}3$ می‌شود.

روش تستی: در توان‌های e هم ۲ داریم و هم ۶، بنابراین هر فعل و انفعالی که صورت گیرد، جواب باید یک حالت از اعمال جبری ۲ و ۶ را همراه خود داشته باشد. مثلاً $\frac{6}{2}=3$، ولی خب گزینه‌های (۲) و (۴) فقط عدد ۲ را دارند و با وجود ۶، این عدد بی‌معنی است. ولی در گزینه‌های (۱) و (۳) عدد ۳ داریم که بر اثر یک فعل و انفعالی بین ۲ و ۶ می‌تواند به‌دست آید. بنابراین یکی از گزینه‌های (۱) یا (۳) صحیح است.

برای $x>0$، e^{-2x} همواره بزرگتر از e^{-6x} است، بنابراین حاصل انتگرال باید مثبت باشد. در نتیجه گزینه (۱) که منفی است، نمی‌تواند جواب باشد و تنها گزینه (۳) صحیح است.

۲۰ـ گزینه «۴» با توجه به وجود $x^2+y^2+z^2$ در توابع زیر انتگرال و کروی بودن ناحیه‌ی انتگرال‌گیری از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. فرض کنید $D=S-\{(0,0,0)\}$ باشد.

$$I=\iiint_D \frac{\rho^2\sin\phi}{\rho^3 Ln\sqrt[3]{\rho^2}}d\rho d\phi d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi\int_0^R\frac{d\rho}{\rho Ln\rho}=\frac{3}{2}(2\pi)(2)(Ln|Ln\rho|)\Big|_0^R=6\pi(Ln|LnR|-Ln|Ln\,0^+|)=-\infty\Rightarrow \text{واگرا}$$

$$J=\iiint_D\frac{Ln\rho}{\rho^2}.\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi\int_0^R Ln\rho d\rho=(2\pi)(2)(\rho Ln\rho-\rho)\Big|_0^R=4\pi(RLnR-R)\Rightarrow \text{همگرا}$$

توجه کنید که در انتگرال I با جایگذاری $\rho=0^+$ داریم: $Ln|Ln\,0^+|=Ln|-\infty|=Ln\infty=\infty$

و در انتگرال J با جایگذاری $\rho=0^+$ داریم:
$$\lim_{\rho\to0^+}\rho Ln\rho=\lim_{\rho\to0^+}\frac{Ln\rho}{\frac{1}{\rho}}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\frac{1}{\rho}}{-\frac{1}{\rho^2}}=\lim_{\rho\to0^+}(-\rho)=0$$

دلیل این که ما کران پایین را به‌صورت $\rho=0^+$ نشان می‌دهیم آن است که $0<\rho<R$، پس در کران پایین داریم $\rho\to0^+$.

رشته مهندسی صنایع سیستم ـ سراسری ۹۳ (مشترک با رشته MBA)

توضیح: دانشجویان گرامی در آزمون سراسری سال ۹۳ سؤالات ریاضی عمومی رشته مهندسی صنایع سیستم و رشته MBA مشترک بودند.

۱ـ فرض کنید z عدد مختلطی باشد که $Re(z)<0$ و به علاوه مبدأ مختصات، z و $\sqrt{3}+3i$ رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین را تشکیل می‌دهند که زاویه قائمه در رأس نظیر مبدأ مختصات می‌باشد. در این صورت z کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}e^{\frac{2\pi}{3}}$ ۲) $3e^{\frac{5\pi}{6}}$ ۳) $3e^{\frac{2\pi}{3}}$ ۴) $2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}}$

۲ـ طول قوس منحنی $f(x)=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$ ، برای $\frac{1}{9}\le x\le\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۱

۳ـ فرض کنید $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ که $f(x)=(1+\frac{1}{x})^{x+1}$. در این صورت:

۱) $f(x)$ بر $(0,e)$ صعودی و بر (e,∞) نزولی است.
۲) $f(x)$ تابعی صعودی است.
۳) $f(x)$ تابعی نزولی است.
۴) $f(x)$ بر $(0,e)$ نزولی و بر (e,∞) صعودی است.

۴ـ حاصل جمع سری $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ برابر است با:

۱) $Ln2-\frac{5}{8}$ ۲) $Ln3$ ۳) $Ln2$ ۴) $Ln3-\frac{5}{8}$

۵ـ کدام گزینه در مورد سری‌های $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(Lnn)^p}$ و $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^pLnn}$ برای $0<p<1$ به ترتیب از راست به چپ صحیح است؟

۱) همگرا ـ واگرا ۲) واگرا ـ همگرا ۳) واگرا ـ واگرا ۴) همگرا ـ همگرا

۶ـ بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ کدام است؟

۱) $(\frac{-4}{3},\frac{-2}{3}]$ ۲) $[-4,-2)$ ۳) $(-4,-2]$ ۴) $[\frac{-4}{3},\frac{-2}{3})$

۷ـ اگر $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x}dx$ و $J=\int_0^{+\infty}\frac{1+\sin(\cos x)}{1+e^x}dx$ آن‌گاه I و J به‌ترتیب .... و .... می‌باشند.

۱) همگرا ـ واگرا ۲) واگرا ـ همگرا ۳) واگرا ـ واگرا ۴) همگرا ـ همگرا

۸ـ اگر $A=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{(x+20)^2}dx$، مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 4x}{x+5}dx$ برحسب A، کدام است؟

۱) $A+\frac{1}{2\pi}$ ۲) $2A$ ۳) A ۴) $2A+\frac{1}{2\pi+20}$

۹ـ مقدار انتگرال $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$ کدام است؟

۱) $\operatorname{Arcsin}(\frac{x\sqrt{2}}{1-x})+c$ ۲) $\operatorname{Arcsin}(\frac{x-1}{x\sqrt{2}})+c$ ۳) $\operatorname{Arcsin}(\frac{1-x}{x\sqrt{2}})+c$ ۴) $\operatorname{Arcsin}(\frac{x\sqrt{2}}{x-1})+c$

۱۰ـ فرض کنید $a>0$ و در نقطه (x_0,y_0) خط مماس بر منحنی $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را رسم کرده‌ایم. در این صورت طول بخشی از خط مماس بر منحنی که بین محورهای مختصات قرار دارد، کدام است؟

۱) $2\sqrt{a}$ ۲) a ۳) $\sqrt{a}$ ۴) $2a$

۱۱ـ فرض کنید $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ و $g(x,y,z)=\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ در مورد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=A$ و $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}g(x,y,z)=B$ چه می‌توان گفت:

۱) A موجود نمی‌باشد و B موجود نمی‌باشد.
۲) $A=0$ و $B=0$.
۳) A موجود نمی‌باشد و $B=0$.
۴) $A=0$ و B موجود نمی‌باشد.

۱۲ـ کدام گزینه صفحه مماسی بر رویه $x^2+2y^2+z^2=1$ است که موازی صفحه $x-y+2z=0$ می‌باشد؟

۱) $x-y+2z=\frac{3\sqrt{11}}{2}$ ۲) $x-y+2z=\sqrt{\frac{11}{2}}$ ۳) $x-y+2z=\frac{\sqrt{11}}{2}$ ۴) $x-y+2z=3\sqrt{\frac{11}{2}}$

۱۳ـ مقدار انتگرال $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^1\frac{1}{x^4+1}dxdy$ برابر کدام مقدار زیر است؟

۱) $\frac{\ln 2}{2}$ ۲) $\frac{\ln 2}{4}$ ۳) $\frac{\ln 2}{8}$ ۴) $\ln 2$

۱۴ـ فرض کنید S مرز رویه $z=x^2+y^2$ و $z=16$ باشد، همچنین $\vec{F}=(2xy^2+e^{-y}\cos z+e^{z^2},2x^2y+e^{-x}\sin z^2,\operatorname{tg}x^2y^2)$ مقدار $\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds$، کدام است؟

۱) $(\frac{\pi}{3})2^{12}$ ۲) $(\pi)2^{10}$ ۳) $(\frac{\pi}{3})2^{10}$ ۴) $(\pi)2^{12}$

۱۵ـ اگر $f(x,y)=\begin{cases}\sin(\frac{x^3y^2}{x^6+y^4}) & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$، آن‌گاه مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y)$ در $(0,0)$ و در امتداد $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) 0

۱۶ـ حاصل انتگرال $I=\iiint_R\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$ چقدر است، اگر R ناحیه بین دو کره $x^2+y^2+z^2=4$ و $x^2+y^2+z^2=2$ باشد.

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) 2π

۱۷ـ مقدار $\iint_S(\operatorname{curl}\vec{F}.\vec{N})ds$ را محاسبه کنید چنانچه S مرز ناحیه $x^2+y^2+(z-2)^4=25$ برای $z\geq 0$ باشد و همچنین،

$\vec{F}=(2y+\cos(z^2x^2),4x+e^{z^2+y^2},\sin(x^2+y^2)\cos(z^2+y^2))$

۱) 18π ۲) 9π ۳) 6π ۴) 24π

۱۸ـ $f(x,y)=(3x^2+2y^2-5xy+x+y+2)^3+3$، آن‌گاه نقطه‌ی $(9,11)$ یک .... می‌باشد.

۱) نقطه زینی ۲) ماکزیمم موضعی ۳) مینیمم موضعی ۴) نقطه غیربحرانی

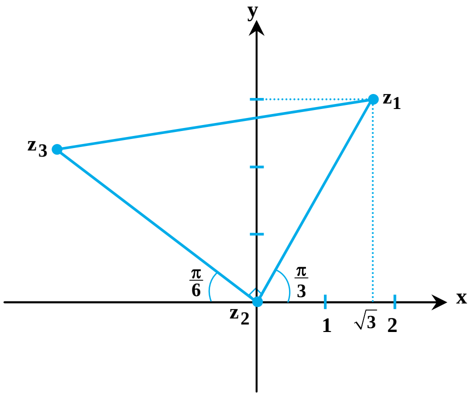
۱۹ـ فرض کنید $r(t)=(\cos t,(1+\sin t)^{\cos t})$، برای $\frac{-\pi}{4}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ انحناء خم را در $t=0$ بیابید.

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) 1

۲۰ـ فرض کنید $f(x,y,z)=\frac{z^4}{1+x^2+y^3}$ و $\gamma(t)=(t^2+\sin t,te^t+t^3+2t,3t^7+5t^4+\sinh t+e^t)$، چنانچه $g(t)=f(\gamma(t))$ مقدار $g'(0)$ کدام است؟

۱) 8 ۲) 2 ۳) 0 ۴) 6

پاسخنامه رشته مهندسی صنایع سیستم ـ سراسری ۹۳ (مشترک با رشته MBA)



۱ـ گزینه «۴» متأسفانه در اصل دفترچه سازمان سنجش حرف « i » در توان e وجود نداشت!! ولی احتمالاً داوطلبان سر جلسه‌ی آزمون متوجه‌ی موضوع شده بودند!؟ خُب مختصات دو نقطه از یک مثلث در صفحه مختلط داده شده است و می‌دانیم در مبدأ رأس قائمه داریم. مختصات رأس دیگر مثلث مورد سؤال است. از صورت سؤال می‌دانیم رأس دیگر دارای قسمت حقیقی منفی است (یعنی در سمت چپ محور y ها قرار دارد) ابتدا مختصات رأس $z_۱=\sqrt{۳}+۳i$ به شکل قطبی نوشته و آن را رسم می‌کنیم:

$$|z_۱| = \sqrt{(\sqrt{۳})^۲+۳^۲} = \sqrt{۳+۹} = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

$$\theta = \mathrm{Arctg}\left(\frac{۳}{\sqrt{۳}}\right) = \mathrm{Arctg}(\sqrt{۳}) = \frac{\pi}{۳}$$

خُب همین‌جا معلوم است زاویه فاز رأس دیگر $\theta_{z_۳} = \frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳} = \frac{۵\pi}{۶}$ است، یعنی یکی از گزینه‌های (۲) و (۴) درست است، از طرفی گفته شده مثلث متساوی‌الساقین است. یعنی اندازه $z_۳$ هم برابر با $۲\sqrt{۳}$ است و این یعنی فقط گزینه (۴) درست است.

◆ ◆ ◆ ◆

۲ـ گزینه «۱» فرمول طول قوس برای تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی a تا b به‌صورت مقابل است:

$$L = \int_a^b \sqrt{۱+f'^۲(x)}\,dx$$

در این سؤال $a=\frac{۱}{۹}$ و $b=\frac{۱}{۴}$ داده شده است، پس کافیست $f'(x)$ را حساب کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x-x^۲} + \arcsin\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱-۲x}{۲\sqrt{x-x^۲}} + \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\sqrt{۱-(\sqrt{x})^۲}} = \frac{۱-۲x}{۲\sqrt{x-x^۲}} + \frac{۱}{۲\sqrt{x}\times\sqrt{۱-x}} = \frac{۱-۲x}{۲\sqrt{x-x^۲}} + \frac{۱}{۲\sqrt{x-x^۲}}$$

$$f'(x) = \frac{۲-۲x}{۲\sqrt{x-x^۲}} = \frac{۲(۱-x)}{۲\sqrt{۱-x}.\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{۱-x}{x}}$$

حالا طول قوس به راحتی حساب می‌شود:

$$L = \int_{\frac{۱}{۹}}^{\frac{۱}{۴}} \sqrt{۱+\left(\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{x}}\right)^۲}\,dx = \int_{\frac{۱}{۹}}^{\frac{۱}{۴}} \sqrt{۱+\frac{۱-x}{x}}\,dx = \int_{\frac{۱}{۹}}^{\frac{۱}{۴}} \sqrt{\frac{x+۱-x}{x}}\,dx = \int_{\frac{۱}{۹}}^{\frac{۱}{۴}} \frac{۱}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{\frac{۱}{۹}}^{\frac{۱}{۴}} x^{-\frac{۱}{۲}}\,dx = [۲x^{\frac{۱}{۲}}]_{\frac{۱}{۹}}^{\frac{۱}{۴}}$$

$$\Rightarrow L = [۲\sqrt{x}]_{\frac{۱}{۹}}^{\frac{۱}{۴}} = ۲\sqrt{\frac{۱}{۴}} - ۲\sqrt{\frac{۱}{۹}} = ۲\times\frac{۱}{۲} - ۲\times\frac{۱}{۳} = ۱-\frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳ـ گزینه «۳» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم، ابتدا با روش کلاسیک و عمومی به تست پاسخ می‌دهیم، یعنی از تابع مشتق گرفته و وضعیت علامت $f'(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x+۱} \Rightarrow \mathrm{Ln}f(x) = (x+۱)\mathrm{Ln}\left(۱+\frac{۱}{x}\right) \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{f'(x)}{f(x)} = ۱\times\mathrm{Ln}\left(۱+\frac{۱}{x}\right) + \frac{-\frac{۱}{x^۲}}{۱+\frac{۱}{x}}\times(x+۱)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \mathrm{Ln}\left(۱+\frac{۱}{x}\right) - \frac{۱}{x} \Rightarrow f'(x) = \left[\mathrm{Ln}\left(۱+\frac{۱}{x}\right) - \frac{۱}{x}\right]f(x) = \left[\mathrm{Ln}\left(۱+\frac{۱}{x}\right) - \frac{۱}{x}\right]\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x+۱}$$

برای x های مثبت همواره $\mathrm{Ln}(۱+\frac{۱}{x}) < \frac{۱}{x}$ است، بنابراین $f'(x) < ۰$ و این یعنی تابع همواره نزولی است.

روش کوتاه‌تر: می‌توانیم با مقداردهی گزینه‌ها را رد کنیم: با مقدار دادن به x داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x=۱ \Rightarrow f(۱) = \left(۱+\frac{۱}{۱}\right)^{۱+۱} = ۴ \\ x=۲ \Rightarrow f(۲) = \left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^{۱+۲} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۳ = \frac{۲۷}{۸} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{با زیاد شدن } x \text{ مقدار } f(x) \text{ کم می‌شود}} \text{تابع صعودی نیست}$$

تا این‌جا معلوم شد گزینه‌های (۱) و (۲) که می‌گفتند در بازه‌ی $(۰,e)$ تابع صعودی است، اشتباه می‌کنند. برای تعیین گزینه‌ی صحیح از بین گزینه‌های (۳) و (۴) باید ببینیم آیا در فاصله‌ی (e,∞) تابع صعودی است یا نه؟ برای این منظور اعدادی بزرگتر از e را به جای x در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow f(3)=(1+\frac{1}{3})^{3+1}=(\frac{4}{3})^4=\frac{256}{81}>3 \\ x=4 \Rightarrow f(4)=(1+\frac{1}{4})^{4+1}=(\frac{5}{4})^5=\frac{3125}{1024}<3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{با زیاد شدن x مقدار } f(x) \text{ کم می‌شود}} \text{تابع در فاصله‌ی } (e,\infty) \text{ هم صعودی نیست}$$

توضیح: البته دانشجو اگر باهوش باشد، می‌تواند نتیجه‌گیری کند در $x \to \infty$، مقدار تابع به e نزدیک می‌شود و به راحتی با عددگذاری‌های مناسب از ناصعودی بودن تابع مطمئن شود.

۴ـ گزینه «۱» سؤال تکراری است و در سال ۸۳ برای رشته‌ی ریاضی عیناً (البته با گزینه‌های متفاوت) و با کمی تغییر در سال ۹۱ برای رشته عمران مطرح شده بود. ابتدا روش تشریحی حل سؤال را ارائه می‌دهیم. از بسط مک‌لورن تابع $Ln(1-x)$ کمک می‌گیریم:

$$Ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \xrightarrow{\text{به جای x در طرفین } -x \text{ قرار می‌دهیم}} Ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}x^n}{n} \Rightarrow -Ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

برای نزدیک شدن به سری صورت سؤال کافیست در سمت راست به جای x، عدد $\frac{1}{2}$ را قرار دهیم:

$$-Ln(1-\frac{1}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} \Rightarrow Ln2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} \Rightarrow Ln2=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n2^n} \Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=Ln2-\frac{5}{8}$$

روش تستی: سؤال مقدار سری را خواسته است و ما می‌توانیم ابتدا چند جمله‌ی اول سری را بنویسیم:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\frac{1}{3\times 2^3}+\frac{1}{4\times 2^4}+\cdots=\frac{1}{24}+\cdots$$

چون مخرج کسر رشد نمایی دارد، جمع تمام جملات دیگر بعد از جمله‌ی اول حداکثر $\frac{1}{24}$ می‌شود (که البته همین مقدار هم نمی‌شود!!) پس حاصل سری حداکثر $\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$ است. حالا در گزینه‌ها با آن‌هایی که از $\frac{1}{12}$ بیشتر هستند، خداحافظی می‌کنیم!! واضح است گزینه‌های (۲) و (۳) که به ترتیب مقدار آن‌ها برابر با $Ln2 \simeq 0/7$ و $Ln3 \simeq 1$ می‌باشند باید مرخص شوند!!

خُب حالا از بین گزینه‌های (۱) و (۴) چه جوری از شَرِّ یکی خلاص شویم!؟ واضح است گزینه (۴) نمی‌تواند جواب باشد، چون مقدار آن حدود $0/48$ است و گزینه (۱) صحیح است که مقدار آن حدود $\frac{1}{12}$ است. البته پس از حذف گزینه‌های (۲) و (۳) دانشجوی باهوش می‌تواند با توجه به وجود عدد $\underline{\underline{2}}$ در سری داده شده، تشخیص دهد $\underline{\underline{Ln2}}$ باید در گزینه‌ها باشد و نه $Ln3$ و گزینه (۱) را انتخاب کند.

۵ـ گزینه «۳» می‌دانیم سری $\sum\frac{1}{n^p(Lnn)^q}$، اگر $p<1$ به ازای هر مقدار q واگراست، پس سری $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^pLn(n)}$ واگراست و همچنین این سری اگر $p=1$، آن‌گاه به ازای $q \le 1$ واگراست، پس در این سؤال سری $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(Lnn)^p}$ نیز واگراست.

اما اگر نکته را حفظ نباشیم، می‌توانیم از آزمون تراکم کوشی به راحتی به اثبات موضوع بپردازیم. برای یادآوری آزمون تراکم کوشی را یادآوری می‌کنم:

«اگر a_n دنباله‌ای غیرصعودی از اعداد مثبت باشد، آن‌گاه سری‌های $\sum a_n$ و $\sum 2^n a_{2^n}$ از نظر همگرایی یا واگرایی مانند یکسان هستند»

فارسی‌تر جمله‌ی بالا یعنی این که؛ به جای بررسی همگرایی سری $\sum a_n$، بُرو وضعیت همگرایی سری $\sum 2^n a_{2^n}$ را بررسی کن!

ابتدا سری $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^pLn(n)}$ را به این روش بررسی می‌کنیم. در این سری با فرض این که $a_n=\frac{1}{n^pLn(n)}$ (که دنباله‌ای نزولی با جملات مثبت است) وضعیت همگرایی یا واگرایی، سری $\sum_{n=3}^{\infty}2^n a_{2^n}$ را بررسی می‌کنیم:

$$a_n=\frac{1}{n^pLn(n)} \Rightarrow 2^n a_{2^n}=2^n\times\frac{1}{(2^n)^pLn(2^n)}=\frac{2^n}{2^{np}\times nLn2}=\frac{1}{Ln2}(\frac{1}{n2^{n(p-1)}})$$

خُب اگر $0<p<1$، آن‌گاه عبارت $2^{n(p-1)}$ به‌صورت $2^{n(\text{عددی منفی})}$ در می‌آید و با انتقال این عبارت به‌صورت کسر، دنباله به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$2^n a_{2^n}=\frac{1}{Ln2}(\frac{2^{n(\text{عددی مثبت})}}{n})$$

که واضح است رشد صورت کسر در بی‌نهایت بیشتر از مخرج است و عملاً حد دنباله مخالف صفر است و شرط لازم برای همگرایی وجود ندارد. پس این سری واگرا و لذا سری اصلی نیز واگراست.

حالا سری $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(Lnn)^p}$ را بررسی می‌کنیم:

$$a_n=\frac{1}{n(Lnn)^p} \Rightarrow 2^n a_{2^n}=2^n\times\frac{1}{2^n\times(Ln2^n)^p}=\frac{1}{(nLn2)^p}=\frac{1}{(Ln2)^p}(\frac{1}{n^p})$$

با ضریب $\frac{1}{(Ln2)^p}$ که کاری نداریم، و سری مقابل را داریم:

$$\sum_{n=3}^{\infty}2^n a_{2^n}=\frac{1}{(Ln2)^p}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

که طبق مطالب p سری می‌دانیم این سری به ازای $p>1$ همگراست و به ازای $p \le 1$ واگراست. چون در این سؤال $0<p<1$، لذا این سری نیز واگراست.

توضیح: روش‌های دیگری نیز برای اثبات واگرایی این سری‌ها وجود دارد (مثلاً استفاده از آزمون انتگرال)، شما با هرکدام که راحت بودید، می‌توانید واگرایی‌های سری‌ها را اثبات کنید.

۶ـ گزینه «۴» ابتدا طبق آزمون ریشه شعاع همگرایی را حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}\simeq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}=3\Rightarrow R=\frac{1}{3}$$

برای پیدا کردن بازه همگرایی داریم:

$$|x+1|<\frac{1}{3}\Rightarrow -\frac{1}{3}<x+1<\frac{1}{3}\Rightarrow -\frac{4}{3}<x<-\frac{2}{3}$$

اما وضعیت همگرایی سری در نقاط $x=-\frac{2}{3}$ و $x=-\frac{4}{3}$ باید جداگانه بررسی شود:

$$x=-\frac{4}{3}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(-\frac{4}{3}+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\times\frac{(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+(\frac{2}{3})^n}{n}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

که می‌دانیم این سری طبق آزمون لایب‌نیتز همگراست. همین‌جا پاسخ به تست تمام است و دیگر لازم نیست شرایط همگرایی در $x=-\frac{2}{3}$ بررسی شود، چون فقط گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد! اما برای تمرین ادامه‌ی حل را نیز ارائه می‌دهیم:

$$x=-\frac{2}{3}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\times(-\frac{2}{3}+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3^n+(-2)^n}{n})(\frac{1}{3})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{(-2)^n}{n3^n})$$

بدون توجه به قسمت دوم، واضح است، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست. پس سری در $x=-\frac{2}{3}$ واگراست.

روش تستی: اگر نقاط ابتدایی و انتهایی بازه‌ی همگرایی یک سری توانی a و b باشد، آن‌گاه c مرکز بازه‌ی همگرایی برابر با $c=\frac{a+b}{2}$ است که c ریشه‌ی عبارت شامل x است که به توان n رسیده است (در این سؤال $x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow c=-1$). همان‌طور که می‌بینید در گزینه‌ها فقط گزینه‌های (۱) و (۴) می‌توانند مورد قبول باشند، چون $-1=\frac{-2}{2}=\frac{-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}}{2}$. با این روش محاسبات شعاع همگرایی و بازه همگرایی مرحله‌ی اول دیگر لزومی ندارد و فقط طبق روش فوق وضعیت همگرایی در $x=-\frac{4}{3}$ مورد بررسی قرار می‌گیرد!

۷ـ گزینه «۴» سؤال نسبتاً ساده‌ای در مورد همگرایی انتگرال‌ها است. انتگرال I در $x=0$ ناسره است و حول $x=0$ هم‌ارزی $\sin x\sim x$ را داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x}dx\simeq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$$

چون $\frac{2}{3}<1$، لذا انتگرال I همگراست. اما انتگرال J در ∞ ناسره است، و در بی‌نهایت می‌توان گفت عبارت تحت انتگرال از $\frac{2}{e^x}$ کوچکتر است، چرا؟ (چون حداکثر $\sin(\cos x)$ می‌تواند $\underline{1}$ باشد) و از طرفی می‌دانیم انتگرال $\int_0^{+\infty}\frac{2}{e^x}dx$ همگراست، پس J نیز همگراست. برای اطمینان خاطر از همگرایی انتگرال اخیر به محاسبات مقابل دقت کنید:

$$J=\int_0^{\infty}\frac{2}{e^x}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=2[-e^{-x}]_0^{+\infty}=2[-e^{-\infty}+e^0]=2$$

۸ـ گزینه «۳» قبلاً گفته‌ایم در این‌گونه سؤالات بهتر است ابتدا طوری از تغییر متغیر استفاده کنیم که حدود انتگرال خواسته شده با حدود انتگرالی که مقدار آن داده شده است، یکسان شود. برای این منظور از تغییر متغیر $t=4x$ استفاده می‌کنیم و لذا داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 4x}{x+5}dx=\int_0^{2\pi}\frac{\cos t\times\frac{dt}{4}}{\frac{t}{4}+5}=\int_0^{2\pi}\frac{\cos tdt}{t+20}$$

$$t=4x\Rightarrow dt=4dx\ ,\ x=0\Rightarrow t=0\ ,\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2\pi$$

برای پیدا کردن حاصل این انتگرال از روش «جزء به جزء» کمک می‌گیریم:

$$\frac{1}{t+20}=u\Rightarrow -\frac{dt}{(t+20)^2}=du\ ,\ \cos tdt=dv\Rightarrow\sin t=v$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{t+20}dt=[\frac{\sin t}{t+20}]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{-(\sin t)dt}{(t+20)^2}=\frac{\sin 2\pi}{2\pi+20}-\frac{\sin(0)}{0+20}+\int_0^{2\pi}\frac{\sin tdt}{(t+20)}=0-0+A=\mathbf{A}$$

۹ـ گزینه «۲» روش‌های مختلف برای حل این انتگرال وجود دارد که ما ساده‌ترین روش را ارائه می‌دهیم، از تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$ استفاده می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$$

$$\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}-1}}=-\int\frac{\frac{1}{t}dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}(1+2t-t^2)}}=-\int\frac{\frac{1}{t}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{2-(1-t)^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(1-t)^2}}=\operatorname{Arcsin}(\frac{1-t}{\sqrt{2}})+C$$

$$=\operatorname{Arcsin}(\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}})+C=\mathbf{Arcsin}(\frac{x-1}{\sqrt{2}x})+C$$

۱۰ـ گزینه «۲» برای نوشتن معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی (x_0,y_0)، ابتدا باید شیب خط مماس را حساب کنیم و برای این منظور از مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم:

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}}=m_{\text{مماس}}=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس به شکل زیر است:

$$y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0)$$

حالا باید محل تقاطع این خط با محورهای مختصات را حساب کنیم:

محل تقاطع با محور x ها $\xrightarrow{y=0}-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0)\Rightarrow x=\sqrt[3]{x_0y_0^2}+x_0$

محل تقاطع با محور y ها $\xrightarrow{x=0}y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(-x_0)\Rightarrow y=\sqrt[3]{y_0x_0^2}+y_0$

پس دو نقطه‌ی $A(\sqrt[3]{x_0y_0^2}+x_0,0)$ و $B(0,\sqrt[3]{y_0x_0^2}+y_0)$، محل تقاطع با محورهای مختصات هستند، که برای محاسبه‌ی فاصله‌ی آن‌ها رابطه‌ی زیر را داریم:

$$AB=\sqrt{(x_0+x_0^{\frac{1}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}-0)^2+(y_0+x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}-0)^2}=\sqrt{[x_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}})]^2+[y_0^{\frac{1}{3}}(y_0^{\frac{2}{3}}+x_0^{\frac{2}{3}})]^2}=\sqrt{x_0^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}})^2+y_0^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}})^2}$$

$$=\sqrt{a^{\frac{4}{3}}[x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}]}=\sqrt{a^{\frac{4}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}}=\sqrt{a^2}=\mathbf{a}$$

۱۱ـ گزینه «۳» چون درجه هریک از جملات مخرج کسر برابر درجه‌ی جمله‌ی صورت کسر است، پس A حد ندارد (دقت کنید درجه‌ی صورت ۲ است و درجه مخرج نیز ۲ است). اما برای B، چون درجه‌ی همه‌ی جملات صورت از درجه تک‌تک جملات مخرج بیشتر است، پس حد B برابر با صفر است (دقت کنید درجه صورت ۳ و درجه هر کدام از جملات مخرج ۲ است). می‌توانید برای A از تغییر متغیرهای $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ و برای B از تغییر متغیرهای $z=r\cos\phi$، $y=r\sin\phi\sin\theta$ و $x=r\cos\theta\sin\phi$ استفاده کنید و حد را برای $r\to 0$ (و هر θ و ϕ دلخواه) محاسبه کرده و به این نتایج برسید.

۱۲ـ گزینه «۲» ابتدا بردار گرادیان رویه را حساب می‌کنیم:

$$f:x^2+2y^2+z^2-1=0\Rightarrow\vec{\nabla}f=(2x)\vec{i}+(4y)\vec{j}+(2z)\vec{k}$$

اما بردار نرمال صفحه $x-y+2z=0$، به‌صورت $\vec{n}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ است و برای این که بردار گرادیان با بردار $\vec{n}$ موازی باشد، باید رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

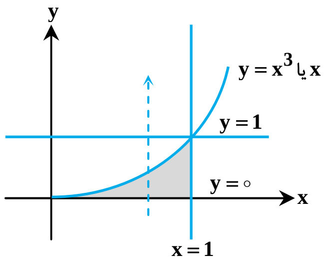
$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{-1}=\frac{2z}{2}\Rightarrow z=-4y\ ,\ x=-2y$$

با قرار دادن مقادیر فوق در معادله‌ی صفحه داریم:

$$x^2+2y^2+z^2=1\Rightarrow(-2y)^2+2y^2+(-4y)^2=0\Rightarrow 22y^2=1\Rightarrow y^2=\frac{1}{22}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{22}}$$

بنابراین نقاط تماس به‌صورت $A(\frac{2}{\sqrt{22}},-\frac{1}{\sqrt{22}},\frac{4}{\sqrt{22}})$ و $B(\frac{-2}{\sqrt{22}},\frac{1}{\sqrt{22}},\frac{-4}{\sqrt{22}})$ هستند و با توجه به گزینه‌ها، معادله‌ی صفحه مماس به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$1(x-\frac{2}{\sqrt{22}})-1(y+\frac{1}{\sqrt{22}})+2(z-\frac{4}{\sqrt{22}})=0\Rightarrow x-y+2z=\frac{11}{\sqrt{22}}=\frac{\sqrt{11}\times\sqrt{11}}{\sqrt{2}\times\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{11}{2}}$$



۱۳ــ گزینه «۲» ابتدا باید ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم:

بنابراین داریم:

$$I = \int_{۰}^{۱}\int_{\sqrt[3]{y}}^{۱}\frac{۱}{۱+x^{۴}}dxdy = \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x^{۳}}\frac{dydx}{۱+x^{۴}} = \int_{۰}^{۱}\frac{۱}{x^{۴}+۱}[y]_{۰}^{x^{۳}}dx = \int_{۰}^{۱}\frac{x^{۳}}{۱+x^{۴}}dx = \frac{۱}{۴}\int_{۰}^{۱}(\frac{۴x^{۳}}{۱+x^{۴}})dx$$

$$= \frac{۱}{۴}[\text{Ln}(۱+x^{۴})]_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۴}\text{Ln}(۱+۱) - \frac{۱}{۴}\text{Ln}(۱+۰) = \frac{\textbf{Ln۲}}{\textbf{۴}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴ــ گزینه «۱» چون S، یک سطح بسته است، می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. ابتدا توجه کنید که دیورژانس میدان $\vec{F}$ برابر است با:

$$\text{div}\vec{F} = ۲y^{۲} + ۲x^{۲} + ۰ = ۲(x^{۲}+y^{۲})$$

بنابراین طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_V \text{div}\vec{F}dv = ۲\iiint_V (x^{۲}+y^{۲})dv$$

برای محاسبه انتگرال سه‌گانه فوق از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. معادله رویه $z = x^{۲}+y^{۲}$، در مختصات استوانه‌ای به‌صورت $z = r^{۲}$ در می‌آید. که با تلاقی دادن آن با رویه $z = ۱۶$ نتیجه می‌شود $r^{۲} = ۱۶$ یا $r = ۴$. بنابراین در مختصات استوانه‌ای $r^{۲} \le z \le ۱۶$، $۰ \le r \le ۴$ و $۰ \le \theta \le ۲\pi$ است و در نتیجه انتگرال برابر است با:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = ۲\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۴}\int_{r^{۲}}^{۱۶} r^{۲}\times rdzdrd\theta = ۲\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۴}(۱۶r^{۳}-r^{۵})drd\theta = ۲\int_{۰}^{۲\pi}d\theta\int_{۰}^{۴}(۱۶r^{۳}-r^{۵})dr = ۲(۲\pi)(۴r^{۴}-\frac{۱}{۶}r^{۶})\Big|_{۰}^{۴} = (\frac{\pi}{۳})۲^{۱۲}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵ــ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید، تعریف مشتق سویی در جهت بردار $\vec{u} = u_{۱}\vec{i} + u_{۲}\vec{j}$ به‌صورت زیر است:

$$D_u f(x_{۰},y_{۰}) = \lim_{h\to ۰}(\frac{f(x_{۰}+hu_{۱}\ ,\ y_{۰}+hu_{۲}) - f(x_{۰},y_{۰})}{h})$$

در این سؤال $u_{۱} = \frac{۱}{۲}$ و $u_{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و لذا داریم:

$$D_u f(۰,۰) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(۰+\frac{۱}{۲}h, ۰+\frac{\sqrt{۳}}{۲}h) - f(۰,۰)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۲}h, \frac{\sqrt{۳}}{۲}h)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{\sin(\frac{\frac{h^{۳}}{۸}\times\frac{۳}{۴}h^{۲}}{\frac{h^{۶}}{۶۴}+\frac{۹h^{۴}}{۱۶}}) - ۰}{h} = \lim_{h\to ۰}(\frac{\frac{h}{۶}}{h}) = \frac{۱}{۶}$$

توضیح: دقت کنید که در محاسبات بالا از هم‌ارزی $\sin u \simeq u$ استفاده کرده‌ایم، در ضمن با استفاده از قانون کمترین درجه داریم: $\frac{h^{۶}}{۶۴} + \frac{۹h^{۴}}{۱۶} \simeq \frac{۹h^{۴}}{۱۶}$.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶ــ گزینه «۲» در مختصات کروی معادله‌ی ناحیه‌ی داده شده به‌صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = ۲ \Rightarrow \rho^{۲} = ۲ \Rightarrow \rho = \sqrt{۲} \\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = ۴ \Rightarrow \rho^{۲} = ۴ \Rightarrow \rho = ۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{R ناحیه بین دو کره است}} \sqrt{۲} < \rho < ۲$$

چون از معادله‌ی رویه‌ها محدودیتی برای کران‌های ϕ و θ وجود ندارد، بنابراین $۰ < \theta < ۲\pi$ و $۰ < \phi < \pi$. لذا داریم:

$$I = \iiint_R \frac{dxdydz}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{\frac{۵}{۲}}} = \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\int_{\sqrt{۲}}^{۲}\frac{\rho^{۲}\sin\phi d\rho d\phi d\theta}{(\rho^{۲})^{\frac{۵}{۲}}} = \int_{۰}^{۲\pi}d\theta \times \int_{۰}^{\pi}\sin\phi d\phi \times \int_{\sqrt{۲}}^{۲}\frac{d\rho}{\rho^{۳}}$$

$$= ۲\pi\times[-\cos\phi]_{۰}^{\pi}\times[\frac{\rho^{-۲}}{-۲}]_{\sqrt{۲}}^{۲} = ۲\pi[-\cos(\pi)+\cos(۰)]\times[\frac{۱}{-۲(۲)^{۲}}+\frac{۱}{۲\times(\sqrt{۲})^{۲}}] = ۲\pi\times۲\times\frac{۱}{۸} = \frac{\pi}{\textbf{۲}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۷ــ گزینه «۱» طبق قضیه استوکس $\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}ds = \int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C Pdx+Qdy+Rdz$. روی مرز ناحیه S، $z = ۰$ است، بنابراین $dz = ۰$ و در نتیجه انتگرال سمت راست به‌صورت مقابل در می‌آید:

$$\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}ds = \int_C Pdx+Qdy$$

چون خم C در صفحه xoy قرار دارد و یک خم بسته می‌باشد، برای محاسبه انتگرال اخیر می‌توانیم از قضیه گرین که حالت خاص استوکس است، استفاده کنیم.

با قراردادن $z = ۰$ در معادله‌ی سطح داده شده، مرز C را در صفحه‌ی xoy تشخیص می‌دهیم:

$$x^{۲}+y^{۲}+(z-۲)^{۴} = ۲۵ \xrightarrow{z=۰} x^{۲}+y^{۲}+۱۶ = ۲۵ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲} = ۹$$

$$(P,Q)=(۲y+\cos(x^۲z^۲)\ ,\ ۴x+e^{y^۲+z^۲})\ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=۴-۲=۲$$

طبق قضیه گرین داریم:

$$\int_C Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA=۲\iint_D dA=۲\times(\text{مساحت ناحیه محدود به درون دایره به معادله: } x^۲+y^۲=۹)=۲(۹\pi)=۱۸\pi$$

توضیح: در این سؤال ابتدا با استفاده از قضیه‌ی استوکس، انتگرال روی سطح را تبدیل به انتگرال روی مرز C کردیم. در ادامه از آنجا که مرز بسته‌ی C در صفحه‌ی xoy قرار داشت، توانستیم با قضیه‌ی گرین (که حالت خاصی از قضیه‌ی استوکس است که در صفحه‌ی xoy رخ می‌دهد)، حل مسأله را کامل کنیم.

۱۸ـ گزینه «۱» برای این که معلوم شود نقطه موردنظر بحرانی هست یا نه، ابتدا f_x و f_y را به‌دست می‌آوریم، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} f_x=۳(۶x-۵y+۱)(۳x^۲+۲y^۲-۵xy+x+y+۲)^۲ \\ f_y=۳(۴y-۵x+۱)(۳x^۲+۲y^۲-۵xy+x+y+۲)^۲ \end{cases}$$

در نقطه $(۹,۱۱)$، مقدار f_x و f_y برابر صفر می‌شود، بنابراین نقطه $(۹,۱۱)$ بحرانی است. برای تعیین نوع نقطه بحرانی، باید $\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^۲$ را محاسبه کنیم. اما در محاسبه‌ی Δ، با توجه به وجود f_{xx}، f_{yy} و f_{xy}، نیازی نیست که از پرانتز مشترک در f_x و f_y مشتق بگیریم. زیرا در هر دو عامل وجود دارد و در صورتی که از آن مشتق هم بگیریم در نهایت با فاکتورگیری از آن و با توجه به این که این دو در هم ضرب می‌شوند، علامت مثبت است و تأثیری در علامت Δ نخواهد داشت. بنابراین داریم:

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^۲=۶\times۴-(-۵)^۲=-۱$$

چون $\Delta<۰$، نقطه زینی است.

۱۹ـ گزینه «۴» انحنای خم از رابطه‌ی $\kappa=\dfrac{|x'y''-x''y'|}{(x'^۲+y'^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ به‌دست می‌آید، در این سؤال $x=\cos t$ و $y=(۱+\sin t)^{\cos t}$ می‌باشد. می‌توانیم بدون معطلی شروع به محاسبه‌ی مشتقات کنیم، اما نگاهی به ضابطه‌ی y، کمی این کار را زمان‌بر به نظر می‌رساند! دانشجوی زرنگ باید به دو موضوع توجه کند، اولاً این که مشتق در نقطه‌ی $t=۰$ خواسته شده و چون $x'_t=-\sin t$، لذا $x'_t(t=۰)=۰$ و این یعنی لازم نیست y'' حساب شود (چون به هر حال در x' ضرب می‌شود و مقدارش صفر می‌شود). ثانیاً برای درگیری کم‌تر می‌تواند هم‌ارزی‌های $\cos t\sim ۱-\frac{t^۲}{۲}$، $\sin t\sim t$ را از ابتدا در همسایگی $t=۰$ استفاده کند، پس داریم:

$$\vec r(t)=(۱-\frac{t^۲}{۲}\ ,\ (۱+t)^{۱-\frac{t^۲}{۲}})$$

می‌دانیم x^y را می‌توان به شکل e^{yLnx} نوشت. لذا داریم:

$$\vec r(t)=(۱-\frac{t^۲}{۲}\ ,\ e^{(۱-\frac{t^۲}{۲})Ln(۱+t)})=(۱-\frac{t^۲}{۲}\ ,\ e^{(۱-\frac{t^۲}{۲})(t-\frac{t^۲}{۲}+-\cdots)})\ \Rightarrow \vec r(t)=(۱-\frac{t^۲}{۲}\ ,\ e^{t-\frac{t^۲}{۲}-\cdots})=(۱-\frac{t^۲}{۲},۱+(t-\frac{t^۲}{۲})+\frac{(t-\frac{t^۲}{۲})^۲}{۲}+\cdots)$$

$$\Rightarrow \vec r'(t)=(-t,۱-t+\cdots)\ \Rightarrow \vec r'(۰)=(۰,+۱)\quad,\quad \vec r''(۰)=(-۱,۰)\ \Rightarrow x'_t(t=۰)=۰\ ,\ x''_t(t=۰)=-۱\ ,\ y'_t(t=۰)=+۱$$

$$\Rightarrow \kappa=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^۲+y'^۲)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{|۰\times y''-(-۱)(+۱)|}{(۰^۲+(+۱)^۲)^{\frac{۳}{۲}}}=۱$$

توضیح: نوشتن هم‌ارزی در $t=۰$ برای راحتی در روند محاسبات بود، طبیعی است در روش دیگر، مشتق‌گیری لگاریتمی و محاسبات طولانی‌تر است.

۲۰ـ گزینه «۱» چون مشتق در $t=۰$ خواسته شده ابتدا در همسایگی $t=۰$، $\gamma(t)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$\sin t\sim t\ ,\ e^t\sim ۱+t\ ,\ \sinh t\sim t$$

دقت کنید وقتی $t\to ۰$، جمله‌ای با درجه‌ی کوچکتر باید مدنظر قرار گیرد، لذا داریم:

$$\gamma(t)=(t,۳t,۱+۲t)$$

بنابراین $g(t)=f(\gamma(t))$، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$g(t)=\frac{(۱+۲t)^۴}{۱+t^۲+۲۷t^۳}\ \Rightarrow g'(t)=\frac{۴\times۲(۱+۲t)^۳(۱+t^۲+۲۷t^۳)-(۲t+۸۱t^۲)(۱+۲t)^۴}{(۱+t^۲+۲۷t^۳)^۲}\ \Rightarrow g'(۰)=۸$$

رشته مهندسی صنایع سیستم ــ سراسری ۹۴

۱ــ فرض کنید $f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه ۳ باشد که دارای سه ریشه حقیقی است. اگر $|f(2i)| = 8$، آنگاه داریم:

۱) تمام ریشه‌های $f(x)$ با یکدیگر برابرند.
۲) $f(x)$ یک ریشه مثبت با درجه تکرار ۱ دارد.
۳) تمام ریشه‌های $f(x)$ اعدادی مثبت هستند.
۴) $f(x)$ یک ریشه مثبت با درجه تکرار ۲ دارد.

۲ــ کدام‌یک در مورد همگرایی یا واگرایی سری‌های $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$ و $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+2^n+3^n}{4^n+5^n+6^n}$ به ترتیب از راست به چپ صحیح است؟

۱) واگرا ــ واگرا
۲) واگرا ــ همگرا
۳) همگرا ــ همگرا
۴) همگرا ــ واگرا

۳ــ اگر a_n و b_n دو دنباله مثبت باشند و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ و $\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$، در این صورت $\sum a_n$ و $\sum b_n$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) واگرا ــ واگرا
۲) واگرا ــ همگرا
۳) هر دو سری می‌توانند همگرا یا واگرا باشند.
۴) همگرا ــ واگرا

۴ــ بازه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{\sqrt{n}}(4-x)^n$ برابر کدام است؟

۱) $(4-\frac{1}{e}, 4+\frac{1}{e})$
۲) $(4-\frac{1}{e}, 4+\frac{1}{e}]$
۳) $[4-\frac{1}{e}, 4+\frac{1}{e}]$
۴) $[4-\frac{1}{e}, 4+\frac{1}{e})$

۵ــ فرض کنید $f:[0,2]\to[0,2]$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت کدام گزینه در مورد معادله $1+9x = \int_0^{x^2} f(t)dt$، صحیح است؟

۱) دقیقاً یک جواب دارد.
۲) دقیقاً دو جواب دارد.
۳) جواب ندارد.
۴) دو جواب در $[0,1]$ و یک جواب در $[1,2]$ دارد.

۶ــ انتگرال‌های ناسره $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ و $\int_1^{+\infty}\frac{1+\sin x}{\sqrt{1+x^3}}dx$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) واگرا ــ واگرا
۲) همگرا ــ همگرا
۳) واگرا ــ همگرا
۴) همگرا ــ واگرا

۷ــ مقدار $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{7^{n+1}}$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{27}$
۲) $\frac{7}{27}$
۳) $\frac{11}{27\times 49}$
۴) $\frac{22}{27\times 49}$

۸ــ $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}}{\ln(\frac{1}{n})+\ln(\frac{2}{n})+\cdots+\ln(\frac{n}{n})}$، برابر کدام است؟

۱) $-\frac{1}{e}$
۲) $\frac{1}{e}$
۳) $e-1$
۴) $1-e$

۹ــ فرض کنید $I_n = \int_0^1\frac{dx}{(x^2+4)^n}$، در این صورت کدام‌یک از روابط زیر صحیح است؟

۱) $32I_5 = 7I_4+\frac{1}{625}$
۲) $32I_5 = 8I_4+\frac{1}{625}$
۳) $32I_5 = 16I_4+\frac{1}{625}$
۴) $32I_5 = 15I_4+\frac{1}{625}$

۱۰ــ مقدار انتگرال روبه‌رو، کدام است؟ $\int_0^1\frac{e^{x^2}dx}{e^{(1-x)^2}+e^{x^2}}$

۱) 0
۲) $\frac{1}{2}$
۳) 1
۴) $\frac{2}{3}$

۱۱ـ انحنای منحنی $x = a\cos^3 t$ و $y = a\sin^3 t$ در $0 \le t \le 2\pi$، کدام است؟

۱) $\left|\frac{2}{3a\sin 2t}\right|$ ۲) $\left|\frac{2}{3a\cos 2t}\right|$ ۳) $\left|\frac{3}{2a\cos 2t}\right|$ ۴) $\left|\frac{3}{2a\sin 2t}\right|$

۱۲ـ مشتق سوئی تابع $f(x,y,z) = x^2 - y^2$ در یک نقطه دلخواه از رویه $x^2+y^2+z^2 = 4$ در جهت نرمال خارجی رویه در آن نقطه برابر کدام است؟

۱) x^2+y^2 ۲) x^2-y^2 ۳) $2(x^2-y^2)$ ۴) $2(x^2+y^2)$

۱۳ـ اکسترمم‌های مطلق تابع $w = x+2y$ در ناحیه مشترک بین $y^2+z^2 = 1$ و $x+y+z = 1$، کدام است؟

۱) ماکزیمم صفر، می‌نیمم $-\sqrt{2}$
۲) ماکزیمم $\sqrt{2}$، می‌نیمم صفر
۳) ماکزیمم $2\sqrt{2}$، می‌نیمم $-2\sqrt{2}$
۴) ماکزیمم ۲، می‌نیمم صفر

۱۴ـ اگر $u = (1-2xy+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ باشد، حاصل $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y}$، کدام است؟

۱) $(y^2-2xy)u$ ۲) $(2xy-y^2)u$ ۳) y^2u^3 ۴) xyu^3

۱۵ـ هرگاه C مثلثی با رئوس $(0,0)$ و $(1,0)$ و $(0,1)$ در جهت مثلثاتی باشد، مقدار انتگرال $\oint_C xydx + (x^2+y^2)dy$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۶ـ مقدار $\iiint_D (x^2+y^2)dV$ را بیابید که در آن D ناحیه محدود به $\frac{1}{8}$ اول و مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ و استوانه $r = \sin\theta$ می‌باشد.

۱) $\frac{6}{75}$ ۲) $\frac{7}{75}$ ۳) $\frac{9}{75}$ ۴) $\frac{8}{75}$

۱۷ـ فرض کنید $F(x,y,z) = (xy^2, yz^2, x^2z)$، اگر S کره‌ای به شعاع ۳ حول مبدأ باشد، مقدار $\iint_S F.ds$ کدام است؟ $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح به سمت بالا است.

۱) $\frac{962\pi}{5}$ ۲) $\frac{968\pi}{5}$ ۳) $\frac{972\pi}{5}$ ۴) $\frac{970\pi}{5}$

۱۸ـ فرض کنید S رویه‌ای باشد که بین صفحه xy و $x^2+y^2+z = 4$ واقع است که در آن $z \ge 0$ می‌باشد. شار برونسوی عبوری از S به وسیله $F(x,y,z) = 3x\vec{i} + xz\vec{j} + z^2\vec{k}$، کدام است؟

۱) $\frac{132\pi}{3}$ ۲) $\frac{134\pi}{3}$ ۳) $\frac{138\pi}{3}$ ۴) $\frac{136\pi}{3}$

۱۹ـ فرض کنید S سطح ناحیه‌ای باشد که $2x+3y+z = 6$ از ربع اول جدا می‌کند و $f(x,y,z) = x+y$ می‌باشد. مقدار $\iint_S fds$، کدام است؟

۱) $2\sqrt{14}$ ۲) $3\sqrt{14}$ ۳) $5\sqrt{14}$ ۴) $4\sqrt{14}$

۲۰ـ معادله روبه‌رو، در مختصات کروی، معرف چه شکلی است؟ $3\sin\phi\sin(\theta+\frac{\pi}{4}) = 5\cos\phi + \frac{12}{\rho}$

۱) یک خط ۲) یک صفحه ۳) یک استوانه ۴) یک کره

پاسخنامه رشته مهندسی صنایع سیستم ــ سراسری ۹۴

۱ــ گزینه «۱» تابع $f(z)=az^{3}$ که در آن $|a|=1$ است، یک چند جمله‌ای از درجه‌ی ۳ است و برای آن داریم: $|f(2i)|=|a(2i)^{3}|=8|a|=8$

بنابراین $f(z)=az^{3}$ در شرط داده شده صدق می‌کند و همه‌ی ریشه‌های آن عبارتند از $z=0$. فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

◆◆◆◆

۲ــ گزینه «۳» می‌دانیم که سری هندسیِ $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n}$ همگراست هرگاه $|r|<1$ باشد. از طرفی در صورت و مخرج کسر با جملاتی سروکار داریم که از لحاظ رشد بزرگتر باشند، در این صورت $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n}+4^{n}}{2^{n}+5^{n}}$ با $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n}}{5^{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{5})^{n}$ هم‌ارز است که یک سری همگرا با $r=\frac{4}{5}$ می‌باشد و سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+2^{n}+3^{n}}{4^{n}+5^{n}+6^{n}}$ با سریِ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n}}{6^{n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{3}{6})^{n}$ معادل است که این سری یک سری همگرا با $r=\frac{3}{6}$ است.

◆◆◆◆

۳ــ گزینه «۱» در مورد سری‌های متناوب اگر $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|<1$ باشد، سری همگراست و اگر $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=1$ باشد، سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد، اما در مورد سری‌های مثبت، اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ باشد، سری همگراست و اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ باشد، سری واگرا خواهد بود.

حال طبق شرایط داده شده داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1 \quad و \quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}\ge\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1$$

بنابراین هر دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ واگرا هستند.

◆◆◆◆

۴ــ گزینه «۲» از آنجا که همه گزینه‌ها شامل بازه $(4-\frac{1}{e},4+\frac{1}{e})$ هستند، بنابراین کافی است همگرایی سری توانی داده شده را در نقاط ابتدایی و انتهایی یعنی در $x=4\pm\frac{1}{e}$ بررسی کرد.

به ازای $x=4-\frac{1}{e}$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{n}}{\sqrt{n}}(4-(4-\frac{1}{e}))^{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{n}}{\sqrt{n}}(\frac{1}{e})^{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

این سری یک سری نوع P با $P=\frac{1}{2}<1$ است که واگراست. بنابراین $x=4-\frac{1}{e}$ متعلق به بازه همگرایی نیست.

از طرفی به ازای $x=4+\frac{1}{e}$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{n}}{\sqrt{n}}(4-(4+\frac{1}{e}))^{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$$

این سری یک سری متناوب با $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ است که a_n مثبت و نزولی است و $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. طبق آزمون سری‌های متناوب، سری فوق همگراست و بنابراین $x=4+\frac{1}{e}$ متعلق به بازه همگرایی است. پس بازه همگرایی سری داده شده عبارتست از: $I=(4-\frac{1}{e},4+\frac{1}{e}]$.

◆◆◆◆

۵ــ گزینه «۳» با مشتق‌گیری از طرفین تساوی داده شده به کمک فرمول مشتق از انتگرال، یعنی $(\int_{a}^{u}f(t)dt)'=u'f(u)$، داریم:

$$9=2xf(x^{2})\Rightarrow f(x^{2})=\frac{9}{2x}\xrightarrow{x^{2}=t}f(t)=\frac{9}{2\sqrt{t}}$$

با جایگذاری ضابطه f در معادله داده شده داریم:

$$1+9x=\int_{0}^{x^{2}}\frac{9}{2\sqrt{t}}dt\Rightarrow 1+9x=\frac{9}{\cancel{2}}(\cancel{2}\sqrt{t})\Big|_{0}^{x^{2}}\Rightarrow 1+\cancel{9x}=\cancel{9x}\Rightarrow 1=0$$

که تساوی حاصل غیرقابل قبول است و این بدین معناست که معادله جواب ندارد.

◆◆◆◆

۶ـ گزینه «۲» در زیر نشان می‌دهیم که $\int_{۱}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ همگرای مشروط است.

ابتدا انتگرال داده شده را به صورت روبرو می‌نویسیم:
$$I=\int_{۱}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

انتگرال $I=\int_{۱}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin x}{x}dx$ یک انتگرال عادی است و بنابراین همگراست. برای محاسبه $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ از روش جز به جز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}u=\frac{۱}{x}\Rightarrow du=\frac{-۱}{x^۲}dx\\ dv=\sin x dx\Rightarrow v=-\cos x\end{cases}\qquad \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{-\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}-\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}\frac{\sin x}{x^۲}dx=-\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}\frac{\sin x}{x^۲}dx$$

و انتگرال اخیر همگرای مطلق است، زیرا $\left|\frac{\sin x}{x^۲}\right|\le\frac{۱}{x^۲}$ و $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}\frac{dx}{x^۲}$ همگراست. از بحث فوق نتیجه می‌شود $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ همگراست. حال ثابت می‌کنیم $\int_{۱}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ یا به عبارتی $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ واگراست.

با استفاده از نامساوی روبرو:
$$\frac{|\sin x|}{x}\ge\frac{\sin^۲ x}{x}=\frac{۱-\cos ۲x}{۲x}$$

کافی است نشان دهیم $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}\frac{۱-\cos ۲x}{x}dx$ واگراست (به عهده دانشجو). و آنگاه طبق آزمون مقایسه انتگرال $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ واگراست.

توضیح: انتگرال $\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ به انتگرال دیریکله معروف است و مقدار آن برابر $\frac{\pi}{۲}$ می‌باشد.

واضح است که در بازه $[۱,+\infty)$: $\frac{۱+\sin x}{\sqrt{۱+x^۳}}\le\frac{۲}{x^{\frac{۳}{۲}}}$ است، از طرفی می‌دانیم که $\int_{۰}^{+\infty}\frac{۲dx}{x^{\frac{۳}{۲}}}$ یک انتگرال ناسره نوع P با $P>۱$ و همگراست بنابراین طبق آزمون مقایسه برای انتگرال‌ها $\int_{۱}^{+\infty}\frac{۱+\sin x}{\sqrt{۱+x^۳}}dx$ همگراست.

(این سؤال عیناً مثال ۱۰۱ صفحه ۲۴۴ کتاب ریاضی عمومی (۱) مدرسان شریف می‌باشد)

۷ـ گزینه «۴» ابتدا دقت کنید که طبق فرمول مجموع سری هندسی داریم:
$$\sum_{n=۰}^{\infty}x^n=\frac{۱}{۱-x}$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم:
$$\sum_{n=۰}^{\infty}nx^{n-۱}=\frac{۱}{(۱-x)^۲}$$

طرفین را در x ضرب می‌کنیم:
$$\sum_{n=۰}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(۱-۱)}$$

با مشتق‌گیری مجدد خواهیم داشت:
$$\sum_{n=۰}^{\infty}n^۲x^{n-۱}=\frac{(۱-x^۲)+۲x(۱-x)}{(۱-x)^۴}=\frac{۱+x}{(۱-x)^۳}$$

با ضرب طرفین در x به فرمول مقابل می‌رسیم:
$$\sum_{n=۰}^{\infty}n^۲x^n=\frac{x(۱+x)}{(۱-x)^۳}\ ,\ |x|<۱$$

به ازای $x=\frac{۱}{۷}$ داریم:
$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n^۲}{۷^{n+۱}}=\frac{۱}{۷}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n^۲}{۷^n}=\frac{۱}{۷}\frac{\frac{۱}{۷}\times\frac{۸}{۷}}{(\frac{۶}{۷})^۳}=\frac{۸}{۶^۳}=\frac{۱}{۲۷}$$

بنابراین با خارج کردن جملات $n=۰$ و $n=۱$ داریم:
$$۰+\frac{۱}{۴۹}+\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{n^۲}{۷^{n+۱}}=\frac{۱}{۲۷}\qquad \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{n^۲}{۷^{n+۱}}=\frac{۱}{۲۷}-\frac{۱}{۴۹}=\frac{۲۲}{۲۷\times ۴۹}$$

۸ـ گزینه «۴» می‌دانیم که اگر تابع f در بازه $[0,1]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$.

با ضرب صورت و مخرج کسر داده شده در $\frac{1}{n}$ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ln(\frac{i}{n})}=\frac{\int_0^1 e^x dx}{\int_0^1 Lnx dx}=\frac{e^x\Big|_0^1}{(xLnx-x)\Big|_0^1}=\frac{e-1}{-1-0}=1-e$$

توجه کنید که $\lim_{x\to 0^+}xLnx=0$.

۹ـ گزینه «۱» ابتدا فرمول کاهش مرتبه برای $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ را به دست می‌آوریم، با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases}u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\Rightarrow du=-\frac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{cases}$$

بنابراین:

$$I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}\Rightarrow I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\times\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}\times I_n$$

با جایگذاری $a=2$ و $n=4$ داریم:

$$I_5=\frac{1}{2(4)(2^2)}(\frac{x}{(x^2+4)^4})\Big|_0^1+\frac{2(4)-1}{2(4)(2^2)}I_4\Rightarrow I_5=\frac{1}{32}(\frac{1}{625}-0)+\frac{7}{32}I_4\xrightarrow{\times 32}32I_5=\frac{1}{625}+7I_4$$

۱۰ـ گزینه «۲» با تغییر متغیر $t=x-\frac{1}{2}$ خواهیم داشت $x=t+\frac{1}{2}$.

$$\int_0^1\frac{e^{x^2}dx}{e^{(1-x)^2}+e^{x^2}}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{e^{(t+\frac{1}{2})^2}dt}{e^{(\frac{1}{2}-t)^2}+e^{(t+\frac{1}{2})^2}}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{e^{t^2+t+\frac{1}{4}}}{e^{t^2-t+\frac{1}{4}}+e^{t^2+t+\frac{1}{4}}}dt$$

با ساده کردن $e^{t^2+\frac{1}{4}}$ از صورت و مخرج خواهیم داشت:

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{e^t}{e^{-t}+e^t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(e^t+e^{-t})+(e^t-e^{-t})}{e^{-t}+e^t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1+\frac{e^t-e^{-t}}{e^{-t}+e^t})dt$$

تابع $\frac{e^t-e^{-t}}{e^{-t}+e^t}$ فرد است و انتگرال آن در این بازه صفر می‌شود. بنابراین داریم:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}$$

۱۱ـ گزینه «۱» انحنای منحنی پارامتری با فرمول $\kappa=\frac{|x'y''-y'x''|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$ به دست می‌آید. با توجه به ضابطه داده شده داریم:

$$C:\begin{cases}x=a\cos^3t\\ y=a\sin^3t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=-3a\sin t\cos^2t\ ,\ x''(t)=-3a\cos^3t+6a\sin^2t\cos t\\ y'(t)=3a\cos t\sin^2t\ ,\ y''(t)=-3a\sin^3t+6a\sin t\cos^2t\end{cases}$$

با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه انحنا داریم:

$$\kappa=\frac{|(-3a\sin t\cos^2t)(-3a\sin^3t+6a\sin t\cos^2t)-(3a\cos t\sin^2t)-(-3a\cos^3t+6a\sin^2t\cos t)|}{((-3a\sin\cos^2t)^2+(3a\cos t\sin^2t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{|9a^2\sin^4 t\cos^2 t - 18a^2\sin^2 t\cos^4 t + 9a^2\cos^4 t\sin^2 t - 18a^2\sin^4 t\cos^2 t\,|}{(9a^2\sin^2 t\cos^4 t + 9a^2\cos^2 t\sin^4 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{|-9a^2\sin^4 t\cos^2 t - 9a^2\sin^2 t\cos^4 t\,|}{(9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{|-9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)|}{((3a\sin t\cos t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}{|(3a\sin t\cos t)^3|} = \frac{1}{|3a\sin t\cos t|} = \frac{1}{|\frac{3}{2}a\sin 2t|} = \frac{2}{|3a\sin 2t|}$$

۱۲ـ گزینه «۲» بردار یکه $\vec{u}$ که همان نرمال خارجی رویه‌ی داده شده است به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{u} = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g|} \xrightarrow{g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4} \vec{n} = \frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{2(x,y,z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{(x,y,z)}{2}$$

حال $\vec{\nabla} f$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 0\vec{k} = (2x,-2y,0)$$

در این صورت:

$$D_{\vec{u}} f(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,).\vec{u} = \frac{(x,y,z)}{2}.(2x,-2y,0) = x^2 - y^2$$

۱۳ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. **روش اول:** با حذف z از دو محدودیت داده شده، داریم:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow y^2 + (1-x-y)^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 + x^2 - 2x - 2y + 2xy = 0$$

این محدودیت جدید را با $h(x,y)=0$ نشان می‌دهیم. اکنون اکسترموم‌های مطلق w را با قید $h(x,y)=0$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda = \frac{w_x}{h_x} = \frac{w_y}{h_y} \Rightarrow \frac{1}{2x+2y-2} = \frac{2}{4y+2x-2} \Rightarrow 4y+2x-2 = 4x+4y-4 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$$

با جایگذاری $x=1$ در معادله‌ی h داریم:

$$2y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

پس نقاط $A(1,\frac{1}{\sqrt{2}})$ و $B(1,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ نقاط بحرانی w هستند.

در نقطه‌ی A داریم $w = 1+\frac{2}{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$ و در نقطه‌ی B داریم $w = 1-\sqrt{2}$ بیشترین و کمترین مقدار w عبارتند از $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$.

روش دوم: با فرض $g(x,y,z) = y^2+z^2-1$ و $h(x,y,z) = x+y+z-1$، تابع لاگرانژ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$F(x,y,z,\lambda,\gamma) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \gamma h(x,y,z) = x + 2y + \lambda(y^2+z^2-1) + \gamma(x+y+z-1)$$

معادلات زیر باید همزمان برقرار باشد، یعنی:

$$\begin{cases} F_x = 0 \Rightarrow 1+\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = -1} \\ F_y = 0 \Rightarrow 2 + 2y\lambda + \gamma = 0 \xrightarrow{\gamma=-1} 2y\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{2\lambda}} \\ F_z = 0 \Rightarrow 2\lambda z + \gamma = 0 \xrightarrow{\gamma=-1} 2\lambda z - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2\lambda}} \\ F_\lambda = 0 \Rightarrow y^2+z^2-1 = 0 \xrightarrow[z=\frac{1}{2\lambda}]{y=\frac{-1}{2\lambda}} (\frac{-1}{2\lambda})^2 + (\frac{1}{2\lambda})^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ F_\gamma = 0 \Rightarrow x+y+z-1 = 0 \end{cases}$$

در نتیجه اگر $\lambda=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$، آنگاه $y=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $z=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $x=۱$ است، که در این صورت مقدار تابع w در این نقطه برابر است با $w=x+۲y=۱+۲(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۱-\sqrt{۲}$. و اگر $\lambda=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$، آنگاه $y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $z=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $x=۱$ است، که در این صورت مقدار تابع w در این نقطه برابر است با:

$$w=x+۲y=۱+۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۱+\sqrt{۲}$$

۱۴ـ گزینه «۳» ابتدا دقت کنید که داریم:

$$u=(۱-۲xy+y^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow(۱-۲xy+y^{۲})=u^{-۲}$$

اکنون با مشتق‌گیری از u نسبت به x و y داریم:

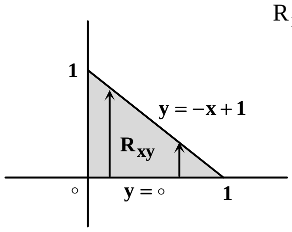
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{۱}{۲}(-۲x+۲y)(۱-۲xy+y^{۲})^{-\frac{۳}{۲}}=(x-y)u^{۳} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{۱}{۲}(-۲y)(۱-۲xy+y^{۲})^{-\frac{۳}{۲}}=yu^{۳}$$

با جایگذاری در عبارت موردنظر داریم:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=xyu^{۳}-y(x-y)u^{۳}=y^{۲}u^{۳}$$

۱۵ـ گزینه «۱» با فرض میدان برداری $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}=xy\vec{i}+(x^{۲}+y^{۲})\vec{j}$ و به کمک قضیه گرین داریم:

$$W=\oint_C Pdx+Qdy=\iint_{R_{xy}}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA=\iint_{R_{xy}}(۲x-x)dA=\iint_{R_{xy}}xdA$$



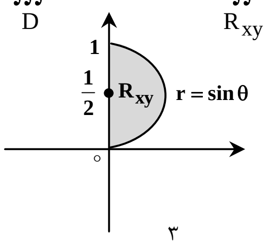
که در آن R_{xy} مثلث قائم‌الزاویه با رئوس $(۰,۰)$، $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ در جهت مثلثاتی می‌باشد.

$$W=\iint_{R_{xy}}xdA=\int_۰^۱\int_۰^{-x+۱}xdydx=\int_۰^۱ xy\Big|_۰^{-x+۱}dx$$

$$=\int_۰^۱ x(-x+۱)dx=\int_۰^۱(-x^{۲}+x)dx=-\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۲}}{۲}\Big|_۰^۱=-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}=\frac{-۲+۳}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

۱۶ـ گزینه «۴» با توجه به توضیحاتی که در صورت سؤال آمده است، کران‌های انتگرال سه‌گانه به شکل زیر خواهد بود:

$$I=\iiint_D(x^{۲}+y^{۲})dV=\iint_{R_{xy}}\int_۰^{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}(x^{۲}+y^{۲})dzdA=\iint_{R_{xy}}(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}dA$$



که در آن R_{xy} نیم‌دایره‌ای به مرکز $(۰,\frac{۱}{۲})$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$ واقع در ربع اول صفحه مختصات است.

به کمک تغییر متغیر قطبی، مقدار انتگرال دوگانه حاصل برابر است با:

$$I=\iint_{R_{xy}}(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}dA=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰}\int_۰^{\sin\theta}(r^{۲})^{\frac{۳}{۲}}rdrd\theta=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰}\int_۰^{\sin\theta}r^{۴}drd\theta=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰}\frac{\sin^{۵}\theta}{۵}d\theta$$

$$=\frac{۱}{۵}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰}(\sin^{۲}\theta)^{۲}\sin\theta d\theta=\frac{۱}{۵}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰}(۱-\cos^{۲}\theta)^{۲}\sin\theta d\theta$$

به کمک تغییر متغیر $u=\cos\theta$ و $du=-\sin\theta d\theta$ داریم:

$$I=\frac{-۱}{۵}\int_۱^۰(۱-u)^{۲}du=\frac{-۱}{۵}\int_۱^۰(۱-۲u^{۲}+u^{۴})du=\frac{+۱}{۵}(u-\frac{۲u^{۳}}{۳}+\frac{u^{۵}}{۵})\Big|_۰^۱=\frac{۸}{۷۵}$$

۱۷ـ گزینه «۳» به کمک قضیه دیورژانس داریم:

$$\oiint_S\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_T div\vec{F}dV$$

که در آن $div\vec{F}=\frac{\partial F_۱}{\partial x}+\frac{\partial F_۲}{\partial y}+\frac{\partial F_۳}{\partial z}$ است. بنابراین با توجه به ضابطه F داریم:

$$\oiint_S\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_T(y^{۲}+z^{۲}+x^{۲})dV$$

که در آن T کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۳ می‌باشد، با استفاده از تغییر متغیر در مختصات کروی و با توجه به اینکه $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ داریم:

$$\iiint_T (x^2+y^2+z^2)dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\rho^2\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta=2\pi\int_0^{\pi}\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^3\sin\varphi\, d\varphi$$

$$=2\pi\left(\frac{243}{5}\right)\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi=\frac{486\pi}{5}(-\cos\varphi)_0^{\pi}=\frac{486\pi}{5}(1+1)=\frac{972\pi}{5}$$

نکته: در صورت سؤال اشتباهاً به جای $\iint_S F.nds$ تایپ شده $\iint_S F.ds$.

۱۸ـ گزینه «۴» با استفاده از قضیه دیورژانس می‌دانیم که شار برونسوی عبوری از S برابر است با:

$$I=\oiint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_T \operatorname{div}\vec{F}dV$$

که در آن $\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$. با توجه به ضابطه F و توضیحاتی که در صورت تست آمده داریم:

$$I=\oiint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iint_{R_{xy}}\int_0^{4-x^2-y^2}(3+0+2z)dzdA=\iint_{R_{xy}}(3z+z^2)\Big|_0^{4-x^2-y^2}dA=\iint_{R_{xy}}(3(4-x^2-y^2)+(4-x^2-y^2)^2)dA$$

که در آن R_{xy} تصویررویه $x^2+y^2+z=4$ در صفحه xy می‌باشد، با قرار دادن $z=0$، تصویر رویه مذکور در صفحه xy به دست می‌آید که دایره‌ای به معادله $x^2+y^2=4$ است، یعنی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲. بنابراین با تغییر متغیر قطبی داریم:

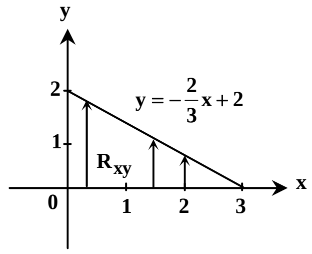
$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(3(4-r^2)+(r^2)^2)rdrd\theta=2\pi\int_0^2(12r-3r^3+r^5)dr$$

$$=2\pi\left(6r^2-\frac{3}{4}r^4+\frac{r^6}{6}\right)_0^2=2\pi\left(24-12+\frac{32}{3}\right)=2\pi\left(12+\frac{32}{3}\right)=2\pi\left(\frac{36+32}{3}\right)=\frac{136\pi}{3}$$

۱۹ـ گزینه «۳» برای محاسبه‌ی انتگرال رویه‌ایِ داده شده به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$\oiint_S fds=\iint_{R_{xy}}f(x,y,z)\frac{|\vec{\nabla}g|}{|g_z|}dA$$

که در آن R_{xy} تصویر رویه‌ی S در صفحه‌ی xy و g معادله‌ی رویه‌ی S است.



$$\oiint_S fds=\iint_{R_{xy}}(x+y)\frac{|2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}|}{|1|}dA$$

$$=\int_0^3\int_0^{-\frac{2}{3}x+2}(x+y)\sqrt{2^2+3^2+1^2}\,dydx=\sqrt{14}\int_0^3\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{-\frac{2}{3}x+2}dx$$

$$=\sqrt{14}\int_0^3\left(x\left(-\frac{2}{3}x+2\right)+\frac{\left(-\frac{2}{3}x+2\right)^2}{2}\right)dx=\sqrt{14}\int_0^3\left(-\frac{2}{3}x^2+2x+\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x+2\right)dx$$

$$=\sqrt{14}\int_0^3\left(-\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x+2\right)dx=\sqrt{14}\left(-\frac{4x^3}{27}+\frac{x^2}{3}+2x\right)_0^3=\sqrt{14}(-4+3+6)=5\sqrt{14}$$

۲۰ـ گزینه «۲» با ضرب طرفین تساوی داده شده در ρ داریم:

$$3\rho\sin\varphi\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=5\rho\cos\varphi+12$$

به کمک اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ داریم:

$$3\rho\sin\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=5\rho\cos\varphi+12$$

از طرفی می‌دانیم که در مختصات کروی $z=\rho\cos\varphi$، $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$ و $x=\rho\sin\varphi\cos\theta$، بنابراین معادله فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}(x+y)=5z+12\Rightarrow\frac{3\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}y-5z=12$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود، معادله حاصل معادله یک صفحه می‌باشد.

رشته علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱

۱ـ در صفحه مختلط مکان هندسی z هایی که $\frac{\operatorname{Re} z}{|z|^{۲}} = \operatorname{Re}\left(\frac{۱}{z+i}+۲i\right)$ ، کدام است؟

۱) $z=\frac{۱}{۲}+bi$ یا $z=-\frac{۱}{۲}+bi$ که $b\in R$

۲) $z=bi$ یا $z=-\frac{۱}{۲}+bi$ که $b\in R$ و $b\neq ۰$

۳) $z=bi$ یا $z=a+\frac{۱}{۲}i$ که $b\in R$ و a و $b\neq ۰$ و $b\neq -۱$

۴) $z=bi$ یا $z=a-\frac{۱}{۲}i$ که $b\in R$ و a و $b\neq ۰$ و $b\neq -۱$

۲ـ فرض کنید $F(t)=\sqrt[۵]{t^{۲}}$. در این صورت $u=\sin x+F(\sin y-\sin x)$ ، مقدار عبارت $\cos x\frac{\partial u}{\partial y}+\cos y\frac{\partial u}{\partial x}$ کدام است؟

۱) $\cos x\cos y$ ۲) $\cos x\sin y$ ۳) $\sin x\sin y$ ۴) $\sin x\cos y$

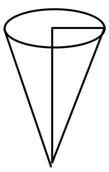
۳ـ اگر برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ داشته باشیم $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a$ ، $(a\neq ۰)$ آنگاه شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^{۲n}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{a}}{a}$ ۲) $\sqrt{a}$ ۳) $a\sqrt{a}$ ۴) $a^{۲}$

۴ـ حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_{۰}^{x}e^{t^{۲}}dt\right)^{۲}}{\int_{۰}^{x}e^{۲t^{۲}}dt}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $e^{-۲}$ ۴) $e^{۲}$

۵ـ در داخل یک ظرف مخروطی (مطابق شکل) که دارای شعاع قاعده‌ی ۳متر و ارتفاع ۴ متر است با سرعت ثابت ۵ متر مکعب بر ثانیه آب می‌ریزیم. زمانی که سطح آب در ارتفاع ۲متری قرار دارد، سرعت بالا آمدن آب در داخل ظرف چقدر است؟



۱) $\frac{۵}{۹\pi}$ ۲) $\frac{۱۵}{۳\pi}$

۳) $\frac{۲۰}{۹\pi}$ ۴) $\frac{۲۰}{۳\pi}$

۶ـ سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱+۲+\cdots+n}{n!}$ ، به کدام مقدار همگرا است؟

۱) $\frac{۱}{۲}e$ ۲) e ۳) $\frac{۳}{۲}e$ ۴) $\frac{۳}{۲}e-\frac{۱}{۲}$

۷ـ کدام انتگرال ناسره، همگراست؟

۱) $\int_{۲}^{\infty}\frac{dx}{\ln x}$ ۲) $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x^{۲}+۳\sin x}$ ۳) $\int_{۱}^{\infty}\cos x\,dx$ ۴) $\int_{۱}^{\infty}\frac{x\,dx}{x+۱}$

۸ـ مقدار انتگرال معین $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}\frac{dx}{۳\sin^{۲}x+\cos^{۲}x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۲}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\pi\sqrt{۳}$

۹ـ انحنای منحنی $\vec{r}(t)=t\vec{i}+(\cosh t)\vec{j}$ کدام است؟

۱) $\cos^{۳}t$ ۲) $\cosh^{۳}t$ ۳) $\frac{۱}{\cosh^{۲}t}$ ۴) $\frac{۱}{\cosh^{۳}t}$

۱۰ـ مقدار مشتق سویی تابع $f(x,y)=e^{-xy}$ در نقطه $(1,-1)$ و در امتداد بردار $\vec{A}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{e}{2}(1+\sqrt{3})$ ۲) $\frac{e}{2}(1-\sqrt{3})$ ۳) $-\frac{e}{2}(1-\sqrt{3})$ ۴) $-\frac{e}{2}(1+\sqrt{3})$

۱۱ـ مقدار مساحت محصور در داخل $(4x-3y)^2+(2x+y)^2=25$ کدام است؟

۱) $\frac{25\pi}{2}$ ۲) $\frac{5\pi}{2}$ ۳) 250π ۴) 50π

۱۲ـ فرض کنید T ناحیه مثلثی شکل با رئوس (π,π)، $(-\pi,-\pi)$ و $(0,-\pi)$ است. مقدار $\iint_T \cos(x-y)dA$ برابر است با:

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

۱۳ـ فرض کنید γ مرز دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع R در جهت خلاف عقربه‌های ساعت (جهت مثبت) است. اگر $\vec{F}=(F_1,F_2)$ میدان برداری باشد که $F_1=\frac{-y}{x^2+y^2}-2y+e^{x^2}$ و $F_2=\frac{x}{x^2+y^2}+x+\tan y^2$، در این صورت $\oint_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟

۱) 2π ۲) $\pi(R^2+1)$ ۳) $\pi(3R^2+2)$ ۴) $\pi(2R^2+2)$

۱۴ـ فرض کنید معادله‌ی $f(xy,z-2x)=0$، z را به طور ضمنی برحسب x و y بیان کند و مشتقات نسبی f موجود و هرگز صفر نشوند. کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

۱) $xz_x+yz_y=2x$ ۲) $xz_x-yz_y=2x$ ۳) $yz_x-xz_y=2y$ ۴) $yz_x+xz_y=2y$

۱۵ـ اگر S بخشی از کره‌ی $x^2+y^2+(z-1)^2=5$ باشد که بالای صفحه‌ی xy قرار دارد و $\vec{N}$ بردار قائم یک رو به خارج بر S باشد و $\vec{F}=(\sin(x^2z)+y,3x+\cos(z^2y),\sin(x^2y+xy^2)+6z)$، مقدار $\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{N}ds$ کدام است؟

۱) 8π ۲) 12π ۳) 16π ۴) 20π

پاسخنامه رشته علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱

۱ـ گزینه «۴» اگر $z=x+iy$، می‌دانیم $\text{Re}(z)=x$ و همچنین $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. با محاسبه‌ی $\frac{1}{z+i}+2i$ داریم:

$$\frac{1}{z+i}+2i=\frac{1}{x+(y+1)i}+2i=(\frac{1}{x+(y+1)i}\times\frac{x-(y+1)i}{x-(y+1)i})+2i=\frac{x-(y+1)i}{x^2+(y+1)^2}+2i$$

$$\begin{cases}\text{سمت چپ}=\text{Re}(\frac{1}{z+i}+2i)=\frac{x}{x^2+(y+1)^2} & (I)\\ \text{سمت راست}=\frac{\text{Re}\,z}{|z|^2}=\frac{\text{Re}(x+iy)}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2} & (II)\end{cases}$$

از تساوی این دو عبارت خواهیم داشت:

$$\frac{x}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

پس یا $x=0$ است یا با حذف x از طرفین داریم:

$$x^2+(y+1)^2=x^2+y^2\Rightarrow y^2+2y+1=y^2\Rightarrow 2y+1=0\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

پس یا $x=0$ یا $y=-\frac{1}{2}$ که نشان می‌دهد گزینه (۴) صحیح است.

۲ـ گزینه «۱» ابتدا مقدار عبارت موردنظر را می‌یابیم:

$$\cos x.\frac{\partial u}{\partial y}=\cos x(0+\cos y.F'(\sin y-\sin x))=\cos x.\cos y.F'(\sin y-\sin x)\qquad(1)$$

$$\cos y.\frac{\partial u}{\partial x}=\cos y[\cos x-\cos x.F'(\sin y-\sin x)]=\cos y\cos x-\cos y\cos xF'(\sin y-\sin x)\qquad(2)$$

حالا با جمع‌کردن عبارات به‌دست آمده داریم:

$$\xrightarrow{(2),(1)}\cos x\frac{\partial u}{\partial y}+\cos y\frac{\partial u}{\partial x}=\mathbf{\cos x.\cos y}$$

۳ـ گزینه «۱» **روش اول:** طبق صورت سؤال فرض می‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a\neq ۰$ در این صورت شعاع همگرایی سری توانیِ $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ برابر است با $R=\frac{۱}{a}$ حالا طبق متن درس اگر به جای x^n، در سری توانی، $x^{۲n}$ داشته باشیم شعاع همگرایی به توان $\frac{۱}{۲}$ می‌رسد پس:

$$R=(\frac{۱}{a})^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

روش دوم: با استفاده از آزمون ریشه، ناحیه همگرایی و سپس شعاع همگرایی را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^{۲n}|}=a|x|^{۲}<۱\Rightarrow|x|^{۲}<\frac{۱}{a}\Rightarrow|x|<\frac{۱}{\sqrt{a}}\Rightarrow|x|<\frac{\sqrt{a}}{a}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

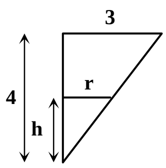
◆ ◆ ◆ ◆

۴ـ گزینه «۱» حد فوق مبهم و از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ است، پس با توجه به قاعده هوپیتال و مشتق از انتگرال داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\int_{۰}^{x}e^{t^{۲}}dt)^{۲}}{\int_{۰}^{x}e^{۲t^{۲}}dt}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(۲\int_{۰}^{x}e^{t^{۲}}dt)(e^{x^{۲}})}{e^{۲x^{۲}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲\int_{۰}^{x}e^{t^{۲}}dt}{e^{x^{۲}}}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{۲e^{x^{۲}}}{۲xe^{x^{۲}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=\frac{۱}{\infty}=۰$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵ـ گزینه «۳» اگر زمانی که ارتفاع آب درون ظرف h باشد شعاع سطح مقطع آب را r بگیریم حجم آب درون ظرف $V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$ است. با توجه به شکل داریم $\frac{r}{۳}=\frac{h}{۴}$ در نتیجه $r=\frac{۳}{۴}h$ و لذا $V=\frac{۳\pi}{۱۶}h^{۳}$، اکنون با مشتق‌گیری از رابطه حجم داریم:



$$\frac{dV}{dt}=\frac{۳\pi}{۱۶}\cdot۳h^{۲}\frac{dh}{dt}\to ۵=\frac{۳\pi}{۱۶}\times۳(۲)^{۲}\times\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{۲۰}{۹\pi}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶ـ گزینه «۳» **روش اول:** با استفاده از روابط $۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ و $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$، به سؤال جواب می‌دهیم. اگر در سری مک‌لورن e^x مقدار $x=۱$ را قرار دهیم، تساوی $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}=e$ به دست می‌آید.

$$\text{حاصل سری}=S=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n(n+۱)}{۲n!}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n+۱}{(n-۱)!}\xrightarrow{\text{قاعده‌ی لغزاندن حدود}}S=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n+۲}{n!}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n}{n!}+\frac{۲}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n}{n!}+e\qquad(*)$$

حالا کافیست مقدار سری $S_۱=\sum\limits_{n=۰}^{\infty}\frac{n}{n!}$ را حساب کنیم:

$$S_۱=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n-۱)!}\xrightarrow{\text{قاعده‌ی لغزاندن حدود}}S_۱=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}=e\xrightarrow{(*)}S=\frac{۱}{۲}e+e=\frac{۳}{۲}\mathbf{e}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷ـ گزینه «۲» گزینه‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم. همه‌ی گزینه‌ها در ∞ دارای ناسرگی هستند.

بررسی گزینه (۱): شرط همگرایی انتگرال $\int_{۲}^{\infty}\frac{dx}{x^pLn^qx}$ آن است که $p>۱$ باشد یا $p=۱$ و $q>۲$ بشد. در این انتگرال داریم $p=۰$ و $q=۱$ پس این انتگرال واگراست.

در ضمن با استفاده از تغییر متغیر $x=e^t$ هم می‌توانید انتگرال را به صورت $\int_{Ln۲}^{\infty}\frac{e^t}{t}dt$ درآورید که به وضوح واگراست چون سرعت رشد صورت بیشتر از مخرج است.

بررسی گزینه (۲): با استفاده از کران داری $\sin x$ می‌توان این انتگرال را با انتگرال $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x^{۲}+۳}$ مقایسه‌ی حدی کرد. درجه‌ی مخرج از درجه‌ی صورت، ۲ درجه بیشتر است. پس انتگرال همگراست.

بررسی گزینه (۳): به‌وضوح این انتگرال واگراست زیرا شرط لازم برای همگرایی را ندارد. در واقع $\lim_{x\to\infty}\cos(x)$ وجود ندارد پس واگرا بودن انتگرال واضح است. [شرط لازم برای همگرایی انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$ آن است که $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ شود]

بررسی گزینه (۴): شرط لازم برای همگرایی برقرار نیست زیرا $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1\neq 0$. در ضمن با توجه به درجه‌ی صورت و مخرج هم می‌توان واگرا بودن را تشخیص داد.

◆ ◆ ◆ ◆

۸ــ گزینه «۲» با تقسیم صورت و مخرج بر $\cos^2 x$ داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x}+1}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3tg^2x+1}(\frac{dx}{\cos^2 x})=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+tg^2x}(\frac{dx}{\cos^2 x})$$

با انتخاب $u=tgx$ داریم: $du=\frac{dx}{\cos^2 x}$ پس فرم انتگرال به صورت $\int\frac{1}{a^2+u^2}du$ می‌باشد و می‌دانیم حاصل آن برابر $\frac{1}{a}Arctg\frac{u}{a}$ می‌شود، پس داریم:

$$\text{حاصل انتگرال}=\frac{1}{3}[\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}]Arctg(\frac{tgx}{\frac{1}{\sqrt{3}}})=\frac{\sqrt{3}}{3}Arctg(\sqrt{3}tgx)$$

با توجه به حدود بالا و پایین انتگرال داریم:

$$I=\frac{\sqrt{3}}{3}Arctg[\sqrt{3}\times tg(\frac{\pi}{6})]-0=\frac{\sqrt{3}}{3}\times Arctg(\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\sqrt{3}}{3}Arctg1=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{4}=\mathbf{\frac{\pi\sqrt{3}}{12}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹ــ گزینه «۳» انحنای خم پارامتری $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ ، از رابطه‌ی $\kappa=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ انحنا، محاسبه می‌شود، بنابراین داریم:

$$x'(t)=1\ ,\ x''(t)=0\ ,\ y'(t)=\sinh t\ ,\ y''(t)=\cosh t$$

$$\kappa=\frac{\cosh t}{(1+\sin^2 ht)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\cosh t}{\cos^3 ht}=\frac{1}{\cosh^2 t}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰ــ گزینه «۴» ابتدا با محاسبه‌ی مشتق‌های جزئی، بردار گرادیان را به دست می‌آوریم:

$$f'_x=-ye^{-xy}=e\ ,\ f'_y=-xe^{-xy}=-e\Rightarrow\vec{\nabla}f=e\vec{i}-e\vec{j}$$

می‌توانیم ابتدا بردار $\vec{A}$ را بر اندازه‌اش تقسیم کنیم و سپس بردار به دست آمده را در گرادیان ضرب داخلی کنیم:

$$\vec{u}\ \text{بردار یکه}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}}{\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}=\frac{-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}=-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\text{مشتق جهتی}=\vec{\nabla}f.\vec{u}=(e\vec{i}-e\vec{j}).(-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j})=\mathbf{\frac{-e}{2}(1+\sqrt{3})}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱ــ گزینه «۲» با استفاده از تغییر متغیرهای $u=4x-3y$ و $v=2x+y$ ، به معادله‌ی دایره‌ی $u^2+v^2=25$ می‌رسیم، واضح است؛ مساحت ناحیه محصور در مختصات جدید برابر 25π است. از طرفی ژاکوبین این تغییر متغیر به شکل زیر به دست می‌آید:

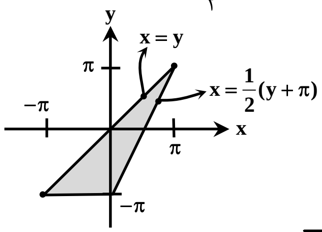
$$J_{xy}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4\times1-2(-3)=10\ \Rightarrow\ J_{uv}=\frac{1}{10}$$

$$\text{مساحت موردنظر}=\iint_A dy\,dx=\iint(\frac{1}{10})du\,dv=\frac{1}{10}\iint dudv=\frac{1}{10}\ (\text{مساحت ناحیه در مختصات جدید})=\frac{1}{10}\times25\pi=\frac{25\pi}{10}=\mathbf{\frac{5\pi}{2}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲ــ گزینه «۴» با رسم شکل و توصیف ناحیه می‌توانیم انتگرال را بیابیم. معادله‌ی خطی که از نقاط $(\circ,-\pi)$ و (π,π) می‌گذرد، $y=2x-\pi$ است یعنی $x=\frac{1}{2}(y+\pi)$ و معادله‌ی خطی که از (π,π) و $(-\pi,-\pi)$ می‌گذرد، $x=y$ است.

این ناحیه در راستای محور yها منظم نیست. اما وقتی درراستای محور xها از چپ به راست برویم $x=y$ مرز ورودی و $x=\frac{1}{2}(y+\pi)$ مرز خروجی است.



$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{y}^{\frac{1}{2}(y+\pi)}\cos(x-y)dxdy=\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(x-y)]_{y}^{\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}}dy$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2})dy=\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{y}{2}dy=[2\sin\frac{y}{2}]_{-\pi}^{\pi}=2(1+1)=4$$

۱۳ــ گزینه «۳» مرز γ بسته است. پس بهتر است از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم. اما F_1 و F_2 در $(\circ,\circ)$ تعریف شده نیستند پس ناپیوستگی دارند. با این حال می‌توانیم قسمت‌های پیوسته آن‌ها را جدا کرده و برای آن قسمت‌ها از گرین استفاده کنیم:

$$I=\int_{\gamma}(-\frac{y}{x^2+y^2}-2y+e^{x^2})dx+(\frac{x}{x^2+y^2}+x+tgy^2)dy=\underbrace{\int_{\gamma}-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy}_{I_1}+\underbrace{\int_{\gamma}(-2y+e^{x^2})dx+(x+tgy^2)dy}_{I_2}$$

برای I_2 از قضیه‌ی گرین استفاده می‌کنیم:

$$I_2=\iint_D(Q_x-P_y)dydx=\iint_D(1+2)dydx=3\times(D\ \text{مساحت})=\mathbf{3\pi R^2}$$

برای I_1، طبق متن درس می‌دانیم که با یک بار گردش حول مبدأ، حاصل این انتگرال می‌شود 2π. پس $I_1=2\pi$

$$\Rightarrow\ I=I_1+I_2=2\pi+3\pi R^2=\pi(3R^2+2)$$

توضیح: اگر متن درس را در مورد I_1 به‌خاطر نداشته باشید می‌توانید با پارامتری کردن دایره، حاصل آن را حساب کنید:

$$x=R\cos t\ ,\ y=R\sin t\ ,\ dx=-R\sin tdt\ ,\ dy=R\cos tdt$$

$$\Rightarrow\ I_1=\int_{\gamma}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}\ \Rightarrow\ I_1=\int_{\circ}^{2\pi}\frac{R^2\sin^2t+R^2\cos^2t}{R^2}dt=\int_{\circ}^{2\pi}dt=2\pi$$

۱۴ــ گزینه «۲» با استفاده از مشتق‌گیری ضمن معلوم است که $z_x=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$ حالا با قاعده‌ی زنجیره‌ای صورت و مخرج کسر را حساب می‌کنیم:

$$f(xy,z-2x)=\circ\ ,\ u=xy\ ,\ v=z-2x$$

$$\left.\begin{array}{l} z_x=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\dfrac{yf'_u-2f'_v}{f'_v}\\[2ex] z_y=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\dfrac{xf'_u}{f'_v}\end{array}\right\}\Rightarrow xz_x-yz_y=\frac{-xyf'_u+2xf'_v}{f'_v}+\frac{xyf'_u}{f'_v}=\frac{2xf'_v}{f'_v}=\mathbf{2x}$$

۱۵ــ گزینه «۱» سطح S بسته نیست چون فقط شامل سطح نیم‌کره‌ی بالایی است. از برخورد این نیم‌کره با صفحه‌ی $z=\circ$ به دایره‌ی $x^2+y^2=4$، $z=\circ$ می‌رسیم.

فرض کنیم S' ناحیه‌ی درون این دایره باشد. S و S' لبه مشترکی دارند پس می‌توانیم به جای انتگرال‌گیری روی S، انتگرال روی سطح S' را حساب کنیم.

بردار قائم یکه و برون سو برای این سطح که در صفحه‌ی xoy قرار دارد، $\vec{N}=-\vec{k}$ است. پس $curl\vec{F}.\vec{N}$ برابر است با $-curl\vec{F}.\vec{k}$ که می‌شود قرینه‌ی مؤلفه‌ی سوم بردار $curl\vec{F}$ که برابر است با: $-(P_y-Q_x)=-(1-3)=+2$

پس خواهیم داشت:

$$\iint_{S'}curl\vec{F}.\vec{N}ds=\iint_{S'}2ds=2\times(S'\ \text{مساحت})=2\times4\pi=8\pi$$

حالا داریم:

$$\iint_S curl\vec{F}.\vec{N}ds=\iint_{S'}curl\vec{F}.\vec{N}ds=8\pi$$

رشته علوم کامپیوتر ــ سراسری ۹۲

۱ــ کدام گزینه در رابطه با دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی $a_n = \dfrac{2(1+\frac{1}{n})^{2n+1}}{[(1+\frac{1}{n})^n + (1+\frac{1}{n})^{n+1}]}$ درست است؟

۱) همگرا و نزولی اکید است. ۲) همگرا و صعودی اکید است. ۳) واگرا است. ۴) همگرا است ولی یکنوا نیست.

۲ــ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{13}{4}$ ۳) $\frac{15}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۳ــ مقدار $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \dfrac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ به طوری که (x_1,y_1,z_1) روی کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و (x_2,y_2,z_2) روی کـره $x^2+y^2+z^2=b^2$ قرار دارد و $0<a<b$، کدام است؟

۱) $b-a$ ۲) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ۳) $\sqrt{b-a}$ ۴) $\sqrt{b+a}$

۴ــ انتگرال $\int_0^1\int_0^1 f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$ برابر است با:

۱) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sec\theta} rf(r)drd\theta$ ۲) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\operatorname{cosec}\theta} rf(r)drd\theta$

۳) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta} rf(r)drd\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\operatorname{cosec}\theta} rf(r)drd\theta$ ۴) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\operatorname{cosec}\theta} rf(r)drd\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sec\theta} rf(r)drd\theta$

۵ــ اگر $a>0$ و $a \neq 1$ آنگاه مقدار $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}.\frac{a^x-1}{a-1})^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) a ۲) $\ln(a)$ ۳) e^a ۴) $+\infty$

۶ــ امتداد نیمساز زاویه بین $\vec{u}=(1,2,-2)$ و $\vec{v}=(3,0,-4)$ با امتداد کدام بردار مشخص می‌شود؟

۱) $\frac{14}{15}i-\frac{2}{3}j-\frac{22}{15}k$ ۲) $\frac{14}{15}i+\frac{2}{3}j-\frac{22}{15}k$ ۳) $\frac{14}{15}i+\frac{2}{3}j+\frac{22}{15}k$ ۴) $\frac{14}{15}i-\frac{2}{3}j+\frac{22}{15}k$

۷ــ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)g(t)dt}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}g'(0)$ ۴) $\frac{1}{2}g(0)$

۸ــ اگر برای دنباله $\{a_n\}$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a(a>0)$ شعاع همگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^{2n}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{a}$ ۲) $\sqrt{a}$ ۳) $\frac{\sqrt{a}}{a}$ ۴) $a\sqrt{a}$

۹ــ اگر a یک عدد حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آنگاه ریشه‌های معادله $(\frac{1+iz}{1-iz})^n=\frac{1+ai}{1-ai}$ کدام است؟

۱) همگی حقیقی‌اند. ۲) همگی موهومی‌اند.

۳) بعضی حقیقی و بعضی موهومی‌اند. ۴) بستگی به a دارد.

۱۰ــ میدان‌های برداری $\vec{F}$ و $\vec{G}$ مفروض‌اند. $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G})$ برابر است با:

۱) $\vec{G}.\text{Curl}\vec{F}+\vec{F}.\text{Curl}\vec{G}$ ۲) $\vec{F}.\text{Curl}\vec{G}-\vec{G}.\text{Curl}\vec{F}$ ۳) $\vec{G}.\text{Curl}\vec{F}-\vec{F}.\text{Curl}\vec{G}$ ۴) $\vec{F}.\text{Curl}\vec{F}-\vec{G}.\text{Curl}\vec{G}$

۱۱ـ صفحه مماس بر رویه $xyz = a^3$ ($a > 0$ ثابت) در نقطه‌ی (a,a,a) با صفحات تشکیل یک چهار وجهی می‌دهد، حجم این چهار وجهی کدام است؟

۱) $\frac{a^3}{3}$ ۲) $\frac{2}{9}a^3$ ۳) $3a^3$ ۴) $\frac{9}{2}a^3$

۱۲ـ یک خط به معادله‌ی $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ صفحه‌ی $x+y+z=15$ را در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) قطع کرده است. در این صورت y_0 برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۳ـ اگر $f(x,y) = \ln x - \ln y + e^{\frac{x}{y}}$ آنگاه حاصل $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $\frac{x}{y}$ ۳) $x-y$ ۴) $x+y$

۱۴ـ صفحه مماس بر رویه $S := x^2 + y^2 - z^2 = 1$ در نقطه‌ی $(1,1,1)$ در چند خط راست با رویه اشتراک دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۱۵ـ کدام گزینه در مورد نقاط بحرانی تابع $\begin{cases} f: R^3 \to R \\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz \end{cases}$ صحیح است؟

۱) یک نقطه‌ی بحرانی دارد که مینیمم موضعی است.
۲) پنج نقطه بحرانی دارد که چهار نقطه‌ی زینی و یک نقطه مینیمم موضعی دارد.
۳) چهار نقطه بحرانی دارد که همگی زینی هستند.
۴) هیچ‌کدام

پاسخنامه رشته علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲

۱ـ گزینه «۲» برای بررسی همگرایی سری کافی است حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2(1+\frac{1}{n})^{2n+1}}{[(1+\frac{1}{n})^n + (1+\frac{1}{n})^{n+1}]} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(1+\frac{1}{n})^{2n+1}}{2(1+\frac{1}{n})^n} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{n+1} = 1^\infty$$

برای حل حالت مبهم 1^∞ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n}-1)(n+1) = e^{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}-1)^{n+1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}} = e$$

بنابراین دنباله همگراه به e می‌باشد. برای بررسی صعودی یا نزولی بودن نیز a_{n+1} را بدست آورده و با a_n مقایسه می‌کنیم.

$$a_{n+1} = \frac{2(1+\frac{1}{n+1})^{2n+2}}{[(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} + (1+\frac{1}{n+1})^{n+2}]} = \frac{2(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{[1+1+\frac{1}{n+1}]} = \frac{2(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(2+\frac{1}{n+1})}$$

$$a_n = \frac{2(1+\frac{1}{n})^{2n+1}}{[(1+\frac{1}{n})^n + (1+\frac{1}{n})^{n+1}]} = \frac{2(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+1+\frac{1}{n})} = \frac{2(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(2+\frac{1}{n})}$$

با مقایسه‌ی دو عبارت فوق با توجه به اینکه $a_{n+1} > a_n$ می‌باشد در نتیجه دنباله‌ی a_n صعودی می‌باشد.

۲ـ گزینه «۴» انتگرال داده شده را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x \times \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x tg^3 x dx$$

حالا از تغییر متغیر $u = tgx$ استفاده می‌کنیم. $du = \sec^2 x dx$ است.

$$I = \frac{tg^4 x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{(\sqrt{3})^4}{4} = \frac{9}{4}$$

۳ـ گزینه «۱» ابتدا پایستاری تابع $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{vmatrix}=0$$

بنابراین میدان F پایستار است و اگر $\varphi(x,y,z)$ تابع پتانسیل آن باشد انتگرال برابر است با:

$$I=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\varphi(x_2,y_2,z_2)-\varphi(x_1,y_1,z_1)$$

طبق متن درس برای محاسبه‌ی تابع پتانسیل $\vec{F}$ به این صورت عمل می‌کنیم:

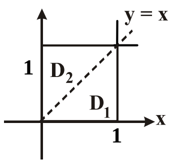
$$\varphi(x,y,z)=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx+\cancel{\int\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy}+\cancel{\int\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر است با:

$$I=\varphi(x_2,y_2,z_2)-\varphi(x_1,y_1,z_1)=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=b-a$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴ـ گزینه «۳» ناحیه‌ی انتگرال‌گیری یک مربع است. با توجه به گزینه‌ها از تغییر متغیر قطبی استفاده می‌کنیم:



$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

برای تبدیل ناحیه انتگرال‌گیری داریم:

$$D_2:\begin{cases}y=1\Rightarrow r\sin\theta=1\Rightarrow r=\frac{1}{\sin\theta}=\operatorname{cosec}\theta\\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\qquad D_1:\begin{cases}x=1\Rightarrow r\cos\theta=1\Rightarrow r=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

بنابراین انتگرال داده شده در مختصات قطبی برابر است با:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta}rf(r)\,dr\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\operatorname{cosec}\theta}rf(r)\,dr\,d\theta$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵ـ گزینه «۱» اگر $0<a<1$ باشد داریم $a^\infty=0$ و اگر $a>1$ باشد داریم $a^\infty=\infty$ پس باید دو حالت را بررسی کنیم:

حالت اول: ابتدا فرض می‌کنیم $a>1$ باشد. در این صورت داریم:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a^x-1)^{\frac{1}{x}}}{x^{\frac{1}{x}}(a-1)^{\frac{1}{x}}}$$

در صورت کسر، طبق قاعده‌ی سرعت رشد $a^x-1\simeq a^x$ پس $(a^x-1)^{\frac{1}{x}}=(a^x)^{\frac{1}{x}}=a$ در مخرج کسر برای عدد ثابت $a-1$ می‌دانیم که $\lim_{x\to\infty}(a-1)^{\frac{1}{x}}=(a-1)^0=1$. برای چند جمله‌ای‌ها می‌دانیم که $\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$. پس داریم:

$$L=\frac{a}{1\times1}=a$$

حالت دوم: اگر $0<a<1$ باشد داریم $\lim_{x\to\infty}a^x=0$ در این صورت خواهیم داشت:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{0-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{1-a}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}\times1=1$$

در این حالت جواب حد برابر است با یک.

حالا با توجه به آن که عدد ۱ را در گزینه‌ها نداریم متوجه می‌شویم منظور طراح محترم حالت $a>1$ بوده و جواب تست؛ گزینه (۱) می‌شود.

۶ــ گزینه «۲» امتداد نیمساز دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر است با برآیند بردارهای یکه شده‌ی آن‌ها:

$$\text{بردار نیمساز}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}+\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{(۱,۲,-۲)}{\sqrt{۱+۴+۴}}+\frac{(۳,۰,-۴)}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{(۱,۲,-۲)}{۳}+\frac{(۳,۰,-۴)}{۵}$$

$$\Rightarrow\ \text{بردار نیمساز}=(\frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۵},\frac{۲}{۳}+۰,-\frac{۲}{۳}-\frac{۴}{۵})=(\frac{۱۴}{۱۵},\frac{۲}{۳},\frac{-۲۲}{۱۵})$$

۷ــ گزینه «۴» با جایگذاری $x=۰$ در تابع مقابل حد داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\int_۰^x (x-t)g(t)dt}{\sin^۲ x}=\frac{۰}{۰}$$

با توجه به این که حالت مبهم به صورت $\frac{۰}{۰}$ می‌باشد، با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال و مشتق توابع انتگرالی داریم:

$$\text{حد}=\lim_{x\to ۰}\frac{(x)'(x-x)g(x)-۰+\int_۰^x g(t)dt}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\int_۰^x g(t)dt}{\sin ۲x}=\frac{۰}{۰}$$

با توجه به این که مجدداً حاصل حد به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌باشد، بار دیگر با استفاده از قاعده هوپیتال و مشتق توابع انتگرالی داریم:

$$\text{حد}=\lim_{x\to ۰}\frac{(x)'g(x)}{۲\cos ۲x}=\frac{g(۰)}{۲\times ۱}=\frac{۱}{۲}g(۰)$$

۸ــ گزینه «۳» روش اول: طبق صورت سؤال فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a\neq ۰$، در این صورت شعاع همگرایی سری توانیِ $\sum_{n=۰}^{\infty}a_n x^n$ برابر است با $R=\frac{۱}{a}$. حالا طبق متن درس اگر به جای x^n، در سری توانی، $x^{۲n}$ داشته باشیم شعاع همگرایی به توان $\frac{۱}{۲}$ می‌رسد پس: $R=(\frac{۱}{a})^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$

روش دوم: با استفاده از آزمون ریشه، ناحیه همگرایی و سپس شعاع همگرایی را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^{۲n}|}=a|x|^۲<۱\Rightarrow |x|^۲<\frac{۱}{a}\Rightarrow |x|<\frac{۱}{\sqrt{a}}\Rightarrow |x|<\frac{\sqrt{a}}{a}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

۹ــ گزینه «۱» از طرفین تساوی قدرمطلق می‌گیریم:

$$z=x+iy\Rightarrow |\frac{۱+iz}{۱-iz}|^n=|\frac{۱+ai}{۱-ai}|\Rightarrow |\frac{(۱-y)+ix}{(۱+y)-ix}|^n=|\frac{۱+ai}{۱-ai}|\Rightarrow (\frac{(۱-y)^۲+x^۲}{(۱+y)^۲+x^۲})^{\frac{n}{۲}}=(\frac{۱+a^۲}{۱+a^۲})^{\frac{۱}{۲}}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{(۱-y)^۲+x^۲}{(۱+y)^۲+x^۲}=۱\Rightarrow (۱-y)^۲+x^۲=(۱+y)^۲+x^۲\Rightarrow ۱-۲y+y^۲+x^۲=۱+۲y+y^۲+x^۲\Rightarrow -۲y=۲y\Rightarrow y=۰$$

پس همه‌ی جواب‌های این معادله به صورت $z=x$ هستند یعنی حقیقی هستند.

۱۰ــ گزینه «۳» با توجه به اتحادهای مربوط به کرل و دیورژانس داریم:

$$\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{\nabla}.(\vec{F}\times\vec{G})=(\vec{\nabla}\times\vec{F}).\vec{G}-\vec{F}.(\vec{\nabla}\times\vec{G})=\vec{G}.\operatorname{curl}\vec{F}-\vec{F}.\operatorname{curl}\vec{G}$$

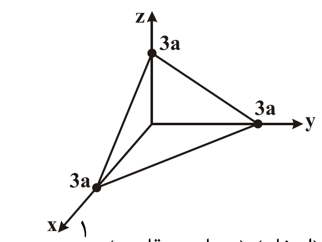
۱۱ــ گزینه «۴» ابتدا معادله‌ی صفحه مماس بر رویه $xyz=a^۳$ را می‌یابیم که دارای بردار نرمال زیر است:

$$\vec{n}=\vec{\nabla}f=(yz,xz,xy)\xrightarrow{(a,a,a)}\vec{n}=a^۲(۱,۱,۱)$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه در نقطه (a,a,a): $a^۲(x-a)+a^۲(y-a)+a^۲(z-a)=۰\Rightarrow x+y+z=۳a$

شکل صفحه‌ی مماس به دست آورده به صورت زیر است:

محل تلاقی صفحه مماس با محور x ها: $y=z=۰\Rightarrow x=۳a$
محل تلاقی صفحه مماس با محور y ها: $x=z=۰\Rightarrow y=۳a$
محل تلاقی صفحه مماس با محور z ها: $x=y=۰\Rightarrow z=۳a$



بنابراین حجم منشور فوق برابر است با:

$$\text{حجم}=\frac{۱}{۳}\ (\text{مساحت قاعده})\ (\text{ارتفاع})=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}(۳a\times ۳a)\times ۳a=\frac{۹a^۳}{۲}$$

۱۲ـ گزینه «۳» برای یافتن محل تلاقی خط و صفحه کافیست که معادله‌ی پارامتری خط را در معادله‌ی صفحه قرار دهیم:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4} \Rightarrow \text{معادله‌ی پارامتری خط}: \begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t+2 \\ z=4t+3 \end{cases}$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله‌ی صفحه داریم:

$$2t+1+3t+2+4t+3=15 \Rightarrow 9t+6=15 \Rightarrow t=1$$

بنابراین مقدار y در نقطه‌ی تلاقی برابر است با:

$$y=3t+2=3\times1+2=5$$

۱۳ـ گزینه «۱» روش اول: با دقت به ضابطه‌ی f داریم:

$$f(x,y)=Ln(\frac{x}{y})+e^{\frac{x}{y}}$$

پس تابع f همگن از مرتبه‌ی صفر است، زیرا در کسر $\frac{x}{y}$ صورت و مخرج هم‌درجه هستند. طبق فرمول اویلر داریم:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

روش دوم: مشتقات جزئی تابع f نسبت به x و y برابر است با:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} \Rightarrow y\frac{\partial f}{\partial y}=-1-\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}} \Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial x}=1+\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}$$

با جمع دو عبارت فوق داریم:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=1+\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}-1-\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}=0$$

۱۴ـ گزینه «۲» ابتدا معادله‌ی صفحه مماس را بدست می‌آوریم که دارای بردار نرمال زیر است:

$$\vec{n}=\vec{\nabla}f \ , \ \vec{\nabla}f=(2x,2y,-2z)$$

برای نقطه‌ی $(1,1,1)$ داریم:

$$\vec{n}=(2,2,-2)$$

بنابراین معادله‌ی صفحه مماس بر رویه در نقطه‌ی $(1,1,1)$ برابر است با:

$$2(x-1)+2(y-1)-2(z-1)=0 \Rightarrow x+y-z=1 \Rightarrow z=x+y-1$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در معادله‌ی رویه داده شده داریم:

$$x^2+y^2-z^2=1 \xrightarrow{z=x+y-1} x^2+y^2-(x+y-1)^2=1$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-(x+y)^2+2(x+y)-1=1 \Rightarrow x^2+y^2-x^2-y^2-2xy+2x+2y=2 \Rightarrow x+y-xy=1 \Rightarrow x(1-y)=1-y$$

$$\Rightarrow (x-1)(1-y)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

بنابراین صفحه مماس بر رویه در دو خط راست با رویه اشتراک دارد. اگر بخواهیم معادله‌ی این دو خط را بنویسیم داریم:

$$x=1, z=x+y-1 \Rightarrow L_1: x=1, z=y$$

$$y=1, z=x+y-1 \Rightarrow L_2: y=1, z=x$$

۱۵ـ گزینه «۲»

$$f: R^3 \to R$$

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xyz$$

ابتدا مشتق‌های جزئی را برابر با صفر قرار می‌دهیم تا محل نقاط بحرانی معلوم شود:

$$\begin{cases} f_x=2x-yz=0 \Rightarrow 2x=yz \\ f_y=2y-xz=0 \Rightarrow 2y=xz \\ f_z=2z-xy=0 \Rightarrow 2z=xy \end{cases}$$

با ضرب‌کردن طرفین تساوی‌ها داریم $8xyz=(xyz)^2$ پس $xyz=0$ یا $xyz=8$. اگر $xyz=0$ باشد آنگاه یکی از متغیرهای x، y یا z صفر می‌شود که در این صورت با توجه به تساوی‌های قبلی دو متغیر دیگر هم صفر می‌شوند. پس $(x,y,z)=(0,0,0)$ یک نقطه‌ی بحرانی است. در حالت $xyz=8$ نیز با توجه به تساوی‌های قبلی نقاط $(2,2,2)$ و $(2,-2,-2)$ و $(-2,2,-2)$ و ... به دست می‌آیند که در این نقاط یا هر ۳ متغیر مثبت هستند یا فقط یکی از آن‌ها مثبت است.

در مجموع با در نظر گرفتن نقطه‌ی $(0,0,0)$ به ۵ نقطه‌ی بحرانی می‌رسیم. بنابراین از همین‌جا معلوم است که گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نادرست هستند. نیازی به بررسی نوع نقاط نداریم.

رشته علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۳

۱ـ کدام گزینه در مورد دنباله‌ی $S_n=\frac{1}{n}(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})$ صحیح است؟

۱) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=0$
۲) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ موجود نیست.
۳) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0$
۴) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=1$

۲ـ اگر تابع حقیقی f روی $[a,b]$ در شرط $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$ صدق کند، کدام گزینه درست نیست؟

۱) f روی $[a,b]$ پیوسته‌ی یکنواخت است.
۲) f روی (a,b) مشتق‌پذیر است.
۳) $|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)|\le\frac{(b-a)^2}{2}$
۴) برای هر $c\in[a,b]$ داریم $|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(c)|\le(b-a)^2$

۳ـ تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 2^x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$، دقیقاً در چند نقطه پیوسته است؟

۱) دو نقطه
۲) سه نقطه
۳) چهار نقطه
۴) هیچ نقطه

۴ـ فرض کنید تابع پیوسته‌ی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x>1$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند. $f(x)=\exp\left(\int_1^x f(t)\sin t\,dt\right)$ مقدار $f(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1-\cos 1}$
۲) $1+\cos 1$
۳) $\frac{1}{1+\cos 1}$
۴) $1-\cos 1$

۵ـ کدام گزینه معادله‌ی دایره‌ی بوسان (انحناء) منحنی $y=x^2$ در مبدأ است؟

۱) $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$
۲) $x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$
۳) $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=4$
۴) $x^2+y^2=\frac{1}{4}$

۶ـ رویه‌ی $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{c}$ مفروض است. مجموع طول و عرض و ارتفاع از مبدأ صفحه مماس بر رویه در هر نقطه آن برابر است با:

۱) $3\sqrt{c}$
۲) $\sqrt{c}$
۳) $\frac{\sqrt{c}}{3}$
۴) c

۷ـ اگر $\vec{F}=y\vec{i}+2z\vec{j}+3x\vec{k}$ مقدار $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ را که در آن C خم فصل مشترک کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2$ و سهمی گون $z=x^2+y^2$ کدام است؟

۱) $+2\pi$
۲) $+\pi$
۳) -2π
۴) $-\pi$

۸ـ مینیمم موضعی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=3x^3+y^2-9x+4y$ کدام است؟

۱) -8
۲) -12
۳) -10
۴) -14

۹ـ مقدار انتگرال $\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{N}dS$ که در آن $F(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ و S بخشی از نیمکره‌ی بالایی $x^2+y^2+z^2=4$ است که درون استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ واقع می‌شود، برابر است با:

۱) صفر
۲) $\frac{\pi}{2}$
۳) π
۴) $\frac{3\pi}{2}$

پاسخنامه رشته علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۳

۱ـ گزینه «۳» اگر دنباله (a_n) همگرا به $L\in\mathbb{R}$ باشد آنگاه دنباله میانگین‌های آن یعنی $S_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ نیز همگراست به L.

در این مثال دنباله $a_n=\sqrt[n]{n}$ را درنظر بگیرید. برای هر چند جمله‌ای مثل $p(n)$ داریم $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p(n)}=1$ پس $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ اما می‌توانیم این حد را با محاسبه‌ی مستقیم هم به‌دست آوریم:

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}\overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=e^0=1$$

دنباله (S_n) میانگین (a_n) است بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$ و در نتیجه: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\frac{1}{\infty}=0$ است.

۲ــ گزینه «۲» این مسأله را در حالت کلی‌تری بررسی خواهیم کرد. به‌طور کلی نامساوی $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|^{\alpha}$ را نامساوی لیپ شیتس از مرتبه‌ی α می‌نامند.(M و α اعداد ثابت هستند). اگر $\alpha>۰$ باشد تابع f پیوسته‌ی یکنواخت می‌شود و اگر $\alpha>۱$ باشد، تابع f مشتق‌پذیر با مشتقی برابر با صفر خوهد بود یعنی برای $\alpha>۱$ تابع f ~ تابع ثابت تبدیل می‌شود. در این مثا $\alpha=۱$ است پس f لزوماً مشتق‌پذیر نیست پس گزینه‌ی (۲) جواب است.

برای اثبات نادرستی گزینه‌ی (۲) کافیست تابع $f(x)=|x|$ را در نظر بگیرید.

می‌دانیم که این تابع در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست اما طبق نامساوی مثلث داریم: $|f(x)-f(y)|=||x|-|y||\le|x-y|$

حالا سایر گزینه‌ها را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم:

بررسی گزینه‌ی (۱): فرض می‌کنیم $x_۰\in[a,b]$ باشد. طبق صورت سؤال داریم: $|f(x)-f(x_۰)|\le|x-x_۰|$ حالا اگر $x\to x_۰$ میل کند، سمت راست نامساوی به صفر میل می‌کند پس $\lim\limits_{x\to x_۰}|f(x)-f(x_۰)|=۰$ یعنی $\lim\limits_{x\to x_۰}f(x)=f(x_۰)$ پس f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته است. [طبق یک قضیه از آنالیز ریاضی هر تابعی که بر بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، حتماً پیوسته‌ی یکنواخت است. این اصطلاح فقط برای دانشجویان ریاضی و علوم کامپیوتر جزء سرفصل آزمون است.]

بررسی گزینه (۳): می‌دانیم که $\int_a^b dx=b-a$ پس $\int_a^b f(a)\,dx=(b-a)f(a)$ در نتیجه:

$$|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)|=|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(a)dx|=|\int_a^b (f(x)-f(a))dx|\le\int_a^b|f(x)-f(a)|dx$$

$$\le\int_a^b|x-a|dx=\int_a^b(x-a)dx=[\frac{(x-a)^۲}{۲}]_a^b=\frac{(b-a)^۲}{۲}$$

در محاسبات بالا از دو موضوع استفاده کرده‌ایم. یکی آن‌که همیشه $|\int_a^b f(x)dx|\le\int_a^b|f(x)|dx$ است (قدر مطلقِ انتگرال، از انتگرالِ قدرمطلق کوچکتر است)

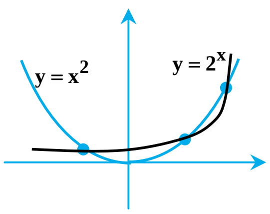
و دوم آن‌که طبق صورت سؤال $|f(x)-f(a)|\le|x-a|$ است.

بررسی گزینه (۴): بنابر قضیه مقدار میانگین برای انتگرال یک نقطه $t\in[a,b]$ موجود است چنان‌که $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(t)$. بنابراین:

$$|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(c)|=|(b-a)f(t)-(b-a)f(c)|=|b-a||f(t)-f(c)|\le|b-a||t-c|\le|b-a||b-a|=(b-a)^۲$$

پس گزینه‌ی (۴) برقرار است.

◆ ◆ ◆ ◆



۳ــ گزینه «۲» اگر $g(x)$ و $h(x)$ دو تابع پیوسته باشند تابع $f(x)=\begin{cases}g(x) & ; & x\in\mathbb{Q}\\ h(x) & ; & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ فقط در نقاطی پیوسته است که $g(x)=h(x)$ باشد.

در این تست f فقط در نقاطی پیوسته است که $x^۲=۲^x$ باشد.

با توجه به نمودارهای $y=x^۲$ و $y=۲^x$ متوجه می‌شویم این منحنی‌ها دقیقاً ۳ نقطه برخورد دارند. پس f در ۳ نقطه پیوسته است. (این سه نقطه عبارتند از $x=۲$ و $x=۴$ و یک نقطه دیگر که مقدار صحیح ندارد.)

برای اطمینان بیشتر می‌توانید به مقادیر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=۲^x$ در چند نقطه توجه کنید. برای مثال نقاط $x=-۳$، $x=۰$، $x=۳$، $x=۶$ را بررسی کنید: $f(-۳)=۹$، $g(-۳)=\frac{۱}{۸}$ پس در این نقطه $g<f$ است. سپس در $x=۰$ داریم $f(۰)=۰$ و $g(۰)=۱$ پس $g>f$ است. سپس در $x=۳$، $f(۳)=۹$ و $g(۳)=۸$ پس $g<f$ و در $x=۶$، $f(۶)=۳۶$ و $g(۶)=۶۴$ پس $g>f$. به این ترتیب می‌بینیم که نمودارهای f و g، ۳ بار از یکدیگر عبور می‌کنند.

◆ ◆ ◆ ◆

۴ــ گزینه «۱»

$$f(x)=\exp(\int_۱^x f(t)\sin t\,dt)\Rightarrow \ln f(x)=\int_۱^x f(t)\sin t\,dt\xrightarrow{\text{مشتق گیری}}\frac{f'(x)}{f(x)}=f(x)\sin x$$

$$\Rightarrow f^{-۲}(x)f'(x)=\sin x\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}}\int f^{-۲}(x)f'(x)dx=\int\sin x dx\Rightarrow -\frac{۱}{f(x)}=-\cos(x)+c\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{\cos x+c}$$

اکنون در معادله داده شده در صورت سؤال اگر $x=۱$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$f(۱)=\exp(\int_۱^۱ f(t)\sin t\,dt)=e^{۰}=۱$$

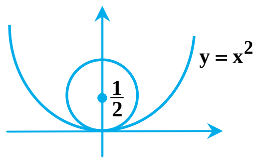
با استفاده از این شرط مرزی در تساوی $f(x)=\frac{۱}{\cos x+c}$ داریم $\frac{۱}{\cos(۱)+c}=۱$ پس $c=۱-\cos(۱)$. بنابراین $f(x)=\frac{۱}{\cos x+۱-\cos(۱)}$. در نهایت به ازای $x=\frac{\pi}{۲}$ خواهیم داشت:

$$f(\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{۱-\cos(۱)}$$

۵ـ گزینه «۱» ابتدا انحنای منحنی $y=x^۲$ را در نقطه $(۰,۰)$ به‌دست آوریم.

$$\kappa=\frac{|y''|}{(۱+y'^۲)^۳}=\frac{۲}{(۱+۴x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۲}{۱}=۲$$

شعاع دایره انحنا که به آن شعاع انحنا نیز می‌گویند برابر است با $\rho=\frac{۱}{k}=\frac{۱}{۲}$.



از طرفی از آن‌جا که تقعر منحنی به سمت بالا است مرکز دایره انحنا روی محور y های مثبت قرار می‌گیرد. پس واضح است که مرکز دایره انحنا نقطه $(۰,\frac{۱}{۲})$ خواهد بود. معادله این دایره چنین است:

$$x^۲+(y-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

۶ـ گزینه «۴» رویه $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{c}$ را در نظر بگیریم. فرض کنیم $P(x_۰,y_۰,z_۰)$ نقطه‌ای دلخواه از این رویه باشد. معادله صفحه مماس بر رویه در نقطه P را می‌نویسیم. ابتدا مشتق‌های جزئی را حساب کنیم:

$$f_x(P)=\frac{۱}{۲\sqrt{x_۰}}\ ,\ f_y(P)=\frac{۱}{۲\sqrt{y_۰}}\ ,\ f_z(P)=\frac{۱}{۲\sqrt{z_۰}}$$

پس معادله صفحه مماس چنین است:

$$\frac{۱}{۲\sqrt{x_۰}}(x-x_۰)+\frac{۱}{۲\sqrt{y_۰}}(y-y_۰)+\frac{۱}{۲\sqrt{z_۰}}(z-z_۰)=۰$$

طول از مبدأ این صفحه را به‌دست آوریم:

$$\begin{matrix}y=۰\\z=۰\end{matrix}\Rightarrow\frac{۱}{۲\sqrt{x_۰}}(x-x_۰)-\frac{y_۰}{۲\sqrt{y_۰}}-\frac{z_۰}{۲\sqrt{z_۰}}=۰\Rightarrow x=\sqrt{x_۰}(\sqrt{y_۰}+\sqrt{z_۰})+x_۰=\sqrt{x_۰}(\sqrt{y_۰}+\sqrt{z_۰}+\sqrt{x_۰})=\sqrt{c}\sqrt{x_۰}$$

به همین ترتیب با جایگذاری $x=۰$ و $z=۰$ عرض از مبدأ برابر است با $y=\sqrt{c}\sqrt{y_۰}$ و به ازای $x=۰$ و $y=۰$ ارتفاع از مبدأ برابر است با $z=\sqrt{c}\sqrt{z_۰}$.

مجموع این سه مقدار برابر است با:

$$\sqrt{c}\sqrt{x_۰}+\sqrt{c}\sqrt{y_۰}+\sqrt{c}\sqrt{z_۰}=\sqrt{c}(\sqrt{x_۰}+\sqrt{y_۰}+\sqrt{z_۰})=\sqrt{c}\sqrt{c}=c$$

۷ـ گزینه «۴» منحنی فصل مشترک کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۲$ و سهمی گون $z=x^۲+y^۲$ را مشخص کنیم. با برخورد دادن آن‌ها داریم: $z+z^۲=۲$، پس $z^۲+z-۲=۰$ که جواب‌های آن $z=۱$ و $z=-۲$ هستند.

از معادله سهمی‌گون می‌دانیم $z\geq ۰$ است پس $z=۱$ تنها جواب قابل قبول است. یعنی منحنی C دایره‌ی $(x^۲+y^۲=۱\ ,\ z=۱)$ است. معادلات پارامتری این دایره چنین است: $x=\cos t\ ,\ y=\sin t\ ,\ z=۱$ که $۰\leq t\leq ۲\pi$ است. آماده هستیم که انتگرال روی منحنی C را به‌دست آوریم:

$$\int_C \vec{F}.dr=\int_C ydx+۲zdy+۳xdz=\int_۰^{۲\pi}[y(t)x'(t)+۲z(t)y'(t)+۳x(t)z'(t)]dt$$

$$=\int_۰^{۲\pi}(-\sin t\sin t+۲\cos t+۰)dt=\int_۰^{۲\pi}[-\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲t)+۲\cos t]dt=[-\frac{۱}{۲}t+\frac{۱}{۴}\sin(۲t)+۲\sin(t)]\Big|_۰^{۲\pi}=-\frac{۲\pi}{۲}=-\pi$$

۸ـ گزینه «۳» ابتدا نقاط بحرانی را شناسایی کنیم:

$$\begin{cases}f_x=۹x^۲-۹=۰\Rightarrow x=\pm ۱\\ f_y=۲y+۴=۰\Rightarrow y=-۲\end{cases}$$

دو نقطه بحرانی $A(۱,-۲)$ و $B(-۱,-۲)$ داریم. برای تعیین نوع آن‌ها از علامت Δ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^۲=(۱۸x)(۲)-۰=۳۶x$$

در نقطه A داریم $\Delta>۰$ و $f_{xx}>۰$ پس نقطه A محل وقوع مینیمم موضعی است. مقدار تابع در این نقطه برابر است با:

$$f(A)=f(۱,-۲)=۳+۴-۹-۸=-۱۰$$

ضمن آن‌که نقطه B نقطه زینی است زیرا در آن نقطه $\Delta<۰$ است.

۹ـ گزینه «۱» فرض کنیم $\vec{F}(x,y,z)=(P,Q,R)=(yz,xz,xy)$ در این‌صورت:

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=(R_y-Q_z)\vec{i}-(R_x-P_z)\vec{j}+(Q_x-P_y)\vec{k}=(x-x)\vec{i}-(y-y)\vec{j}+(z-z)\vec{k}=0$$

بنابراین به علت صفر بودنِ زیر انتگرال، حاصل انتگرالِ سطح داده شده صفر است. $\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{N}\,ds=\iint_S(0)\,ds=0$

رشته علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۴

۱ـ برای دو عدد حقیقی a و b با شرط $0<a<b$ حد دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با ضابطه زیر کدام است؟

$$x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\quad (n\ge 3)$$

۱) b ۲) $\frac{1}{3}(a+2b)$ ۳) $\frac{1}{2}(a+b)$ ۴) $\frac{1}{8}(3a+5b)$

۲ـ مشتق تابع $F(x)=\int_0^{\sin x}\frac{dt}{2+t^5}$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۳ـ مقدار $\iint_D xy(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy$ که در آن $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{14}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۴ـ برد تابع $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) $(0,e^e]$ ۲) $(0,1]$ ۳) $(0,e^{-1}]$ ۴) $(0,e^{e^{-1}}]$

۵ـ مساحت رویه حاصل از دوران منحنی $x=\frac{1}{8}(t-\sin t)$ و $y=\frac{1}{8}(1-\cos t)$، $0\le t\le 2\pi$ حول محور x کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) $\frac{5\pi}{3}$

۶ـ سیالی در درون یک مخزن استوانه‌ای به شعاع ۲ در حال چرخش است، به طوری که حرکتش توسط میدان سرعتی $\vec{F}(x,y,z)=-y\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{i}+x\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{j}$ صورت می‌گیرد. اگر S سطح فوقانی و $\vec{N}$ بردار قائم یکه رو به خارج مخزن استوانه‌ای باشد، مقدار انتگرال $\iint_S(\operatorname{curl}\vec{F}).\vec{N}ds$ کدام است؟

۱) 6π ۲) 4π ۳) 10π ۴) 16π

۷ـ ماکسیمم مقدار مشتق جهتی تابع $\phi(x,y,z)=x^2-2y^2+4z^2$ در نقطه $(1,1,-1)$ کدام است؟

۱) 21 ۲) $2\sqrt{21}$ ۳) $\sqrt{21}$ ۴) $3\sqrt{21}$

۸ـ حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y=x^2$ و خط $y=1$ حول خط $y=2$ کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{5}$ ۲) $\frac{38\pi}{5}$ ۳) $\frac{56\pi}{15}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۹ـ انتگرال $\int_1^e\int_0^{\ln x}f(x,y)dydx$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\int_0^1\int_{e^y}^{e}f(x,y)dxdy$ ۲) $\int_0^1\int_e^{e^y}f(x,y)dxdy$ ۳) $\int_0^1\int_0^{e^y}f(x,y)dxdy$ ۴) $\int_0^1\int_1^{e^y}f(x,y)dxdy$

پاسخنامه رشته علوم کامپیوتر ــ سراسری ۹۴

۱ــ گزینه «۲» این رابطه‌ی بازگشتی را با استفاده از معادله‌ی مشخصه حل می‌کنیم:

$$x_n=\frac{x_{n-۱}+x_{n-۲}}{۲}:n\ge ۳$$

$$\Rightarrow ۲x_n-x_{n-۱}-x_{n-۲}=۰ \Rightarrow \text{معادلهٔ مشخصه: } ۲\lambda^۲-\lambda-۱=۰$$

$$\Rightarrow \lambda=۱\,,-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x_n=c_۱ ۱^n+c_۲(\frac{-۱}{۲})^n=c_۱+c_۲(\frac{-۱}{۲})^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}x_n=c_۱$$

پس کافی است $c_۱$ را بیابیم، برای این کار از شرایط اولیهٔ $x_۱=a$ و $x_۲=b$ استفاده می‌کنیم، پس:

$$\begin{cases}\xrightarrow{n=۱} x_۱=c_۱-\frac{۱}{۲}c_۲=a\\ \xrightarrow{n=۲} x_۲=c_۱+\frac{۱}{۴}c_۲=b\xrightarrow{\times ۲}\end{cases}\quad \begin{cases}c_۱-\cancel{\frac{۱}{۲}c_۲}=a\\ ۲c_۱+\cancel{\frac{۱}{۲}c_۲}=۲b\end{cases}+$$

$$۳c_۱=a+۲b\Rightarrow c_۱=\frac{۱}{۳}(a+۲b)$$

۲ــ گزینه «۲» با استفاده از قاعده مشتق‌گیری از انتگرال‌ها داریم:

$$F(x)=\int_۰^{\sin x}\frac{dt}{۲+t^۵}\Rightarrow F'(x)=(\cos x)\frac{۱}{۲+\sin^۵ x}\Rightarrow F'(\frac{\pi}{۲})=۰$$

۳ــ گزینه «۱» ناحیه‌ی D ربع اول از دایره‌ی واحد است. در این ناحیه داریم $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ و $۰\le r\le ۱$.

$$\iint_D xy(x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}dxdy=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^۱(r\cos\theta)(r\sin\theta)(r^۲)^{\frac{۳}{۲}}rdrd\theta$$

انتگرال دوگانه را در مختصات قطبی حل می‌کنیم:

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)(\frac{r^۷}{۷})\Big|_۰^۱ d\theta=\frac{۱}{۱۴}(\frac{-۱}{۲}\cos ۲\theta)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{-۱}{۲۸}(\cos\pi-\cos ۰)=\frac{۱}{۱۴}$$

۴ــ گزینه «۴» برای یافتن برد تابع، رفتار آن را در دامنه‌اش بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=x^{\frac{۱}{x}}:D_f=(۰\,,+\infty)$$

$$\lim_{x\to ۰^+}x^{\frac{۱}{x}}=(۰^+)^{+\infty}=۰\ ,\ \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{۱}{x}}=\infty^۰_{\text{مبهم}}\Rightarrow y=x^{\frac{۱}{x}}\ ,\ Lny=\frac{۱}{x}Lnx\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}Lny=\lim_{x\to+\infty}\frac{Lnx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{۱}=۰\Rightarrow$$

$$y=e^۰=۱$$

$$y=x^{\frac{۱}{x}}\Rightarrow Lny=\frac{۱}{x}Lnx\to\frac{y'}{y}=\frac{-۱}{x^۲}Lnx+\frac{۱}{x^۲}=\frac{۱}{x^۲}(-Lnx+۱)\Rightarrow y'=x^{\frac{۱}{x}}(\frac{۱}{x^۲})(۱-Lnx)$$

	۰	e	$+\infty$
y'	+	۰ (max)	−

$$\xrightarrow{y'=۰}۱-Lnx=۰\Rightarrow Lnx=۱\Rightarrow x=e\ ,\ f(e)=e^{\frac{۱}{e}}=e^{e^{-۱}}$$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده، یعنی ۰، ۱ و $e^{e^{-۱}}$، بُرد تابع f عبارت است از: $(۰\,,e^{e^{-۱}}]$

۵ــ گزینه «۱» سطح حاصل از دوران حول محور xها، از رابطه‌ی $S=\int_a^b ۲\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^۲+(y'(t))^۲}\,dt$ قابل محاسبه است.

$$\begin{cases}x(t)=\frac{۱}{۸}(t-\sin t)\\ y(t)=\frac{۱}{۸}(۱-\cos t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=\frac{۱}{۸}(۱-\cos t)\\ y'(t)=\frac{۱}{۸}\sin t\end{cases}$$

$$S=\int_۰^{۲\pi}۲\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^۲+[y'(t)]^۲}\,dt=۲\pi\int_۰^{۲\pi}\frac{۱}{۸}(۱-\cos t)\sqrt{\frac{۱}{۶۴}(۱-\cos t)^۲+\frac{۱}{۶۴}\sin^۲ t}\,dt$$

$$=\frac{\pi}{32}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{1-2\cos t+\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{1}}\,dt=\frac{\pi}{32}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{32}\left(\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}\,\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}}dt+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}\,\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}}dt\right)$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{32}\left(\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos t)\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}dt-\int_{\pi}^{2\pi}\frac{(1-\cos t)\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}dt\right)$$

انتگرال $\int\frac{(1-\cos t)\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}dt$ با تغییر متغیر $1+\cos t=u$، $-\sin t dt=du$ به این صورت حل می‌شود:

$$\int\frac{(1-\cos t)\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}dt=\int\frac{(2-u)(-du)}{\sqrt{u}}=\int\frac{u-2}{\sqrt{u}}du=\int(u^{\frac{1}{2}}-2u^{-\frac{1}{2}})du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-4u^{\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{3}(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}-4(1+\cos t)^{\frac{1}{2}}+c$$

بنابراین با جایگذاری حدود انتگرال‌ها داریم:

$$S=\frac{\pi\sqrt{2}}{32}\left([\frac{2}{3}(1+\cos t)\sqrt{1+\cos t}-4\sqrt{1+\cos t}]_0^{\pi}-[\frac{2}{3}(1+\cos t)\sqrt{1+\cos t}-4\sqrt{1+\cos t}]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{32}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{-8\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{32}\,\frac{16\sqrt{2}}{3}=\frac{\pi}{3}$$

۶ـ گزینه «۴» با استفاده از قضیهٔ استوکس داریم:

$$\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{N}ds=\int_c\vec{F}.d\vec{r}=\int_c Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\int_c -y\sqrt{x^2+y^2}\,dx+x\sqrt{x^2+y^2}\,dy$$

که در آن c دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ در صفحه xoy می‌باشد، یعنی $x^2+y^2=4$، پس:

$$=\int_c -y\sqrt{4}\,dx+x\sqrt{4}\,dy$$

$$=2\int_c -ydx+xdy=4\left(\frac{1}{2}\int_c -ydx+xdy\right)=4\,(\text{مساحت دایرهٔ با مرز } c)=4(\pi\times 4)=16\pi$$

یادآوری می‌کنیم که اگر C منحنی بسته‌ای در صفحه‌ی xoy باشد، آنگاه:

$$\frac{1}{2}\int_c -ydx+xdy=(\text{مساحت درون } c)$$

۷ـ گزینه «۲» بیشترین مقدار مشتق جهتی در جهتِ بردار گرادیان به دست می‌آید و برابر با اندازه‌ی گرادیان است. بنابراین کافی است $|\vec{\nabla}\varphi(1,1,-1)|$ را محاسبه نماییم.

$$\vec{\nabla}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}=2x\vec{i}-4y\vec{j}+8z\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\varphi(1,1,-1)=2\vec{i}-4\vec{j}-8\vec{k}\Rightarrow|\vec{\nabla}\varphi(1,1,-1)|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-8)^2}=2\sqrt{21}$$

۸ـ گزینه «۳» ناحیه‌ی هاشورخورده بین منحنی‌های $f(x)=x^2$ و $g(x)=1$ قرار دارد. محور دوران، خط $y=2$ است.

طبق متن درس از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم:

$$V=\pi\int_a^b(|f(x)-k|^2-|g(x)-k|^2)dx$$

دقت کنید در اینجا $k=2$ است، و حدود انتگرال با برخورد دادن دو منحنی به‌دست می‌آیند:

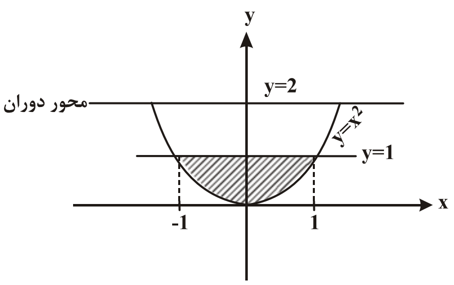
$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

پس داریم:

$$V=\pi\int_{-1}^{1}[(x^2-2)^2-(1-2)^2]dx=\pi\int_{-1}^{1}(x^4-4x^2+3)dx$$

از زوج بودن زیر انتگرال استفاده می‌کنیم:

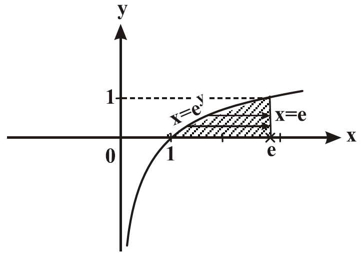
$$V=2\pi\int_0^1(x^4-4x^2+3)dx$$



$$=2\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+3x\right)\Big|_0^1=2\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{3}+3\right)=\frac{56\pi}{15}$$

۹ـ گزینه «۱» از گزینه‌ها معلوم است که منظور طراح سؤال، تعویض ترتیب انتگرال‌گیری است. ابتدا به حدود انتگرال دقت می‌کنیم و ناحیه‌ی مورد نظر را تشخیص می‌دهیم. این ناحیه بین $y=۰$ و $y=\text{Ln}x$ قرار دارد و در آن $۱\le x\le e$ است. توجه کنید که $\text{Lne}=۱$ پس در این ناحیه داریم: $۰\le y\le ۱$ و اگر از چپ به راست حرکت کنیم $x=e^y$ (یعنی همان $y=\text{Ln}x$) مرز ورودی است و $x=e$ مرز خروجی است. پس داریم:

$$\int_۱^e\int_۰^{\text{Ln}x} f(x,y)\,dy\,dx=\int_۰^۱\int_{e^y}^e f(x,y)\,dx\,dy$$



رشته تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱

۱ـ مکان اعداد مختلط $z=x+iy$ در صفحه اعداد مختلط که در نامساوی $\text{Re}(\frac{۱}{z}+۱)\le ۲$ صدق کنند، کدام است؟

۱) محیط و خارج دایره‌ای به مرکز $(\frac{۱}{۲},۰)$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$
۲) محیط و داخل دایره‌ای به مرکز $(۰,\frac{۱}{۲})$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$
۳) محیط و داخل دایره‌ای به مرکز $(۱,۰)$ و شعاع یک
۴) محیط و داخل دایره‌ای به مرکز $(\frac{۱}{۲},۰)$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$

۲ـ دامنه (قلمرو) تابع $f(x)=\log_۲\log_۳\log_۴ x$ برابر است با:

۱) $\{x:x>۴\}$
۲) $\{x:x\ge ۴\}$
۳) $\{x:x>۰\}$
۴) $\{x:x>۳\}$

۳ـ مقدار حد $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{\arccos(۱-x)}{\sqrt{x}}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

۴ـ دنباله $\{a_n\}$ به صورت $a_۱=۱$ و $a_۲=۴$ و $a_n=۲a_{n-۱}-a_{n-۲}+۲\ ,\ n\ge ۳$ تعریف شده است، کدام گزاره صحیح است؟

۱) $\{a_n\}$ نوسانی است.
۲) $\{a_{۲n}\}$ واگرا ولی $\{a_{۲n-۱}\}$ همگراست.
۳) $\{a_n\}$ صعودی و واگراست.
۴) $\{a_n\}$ نزولی و همگراست.

۵ـ اگر نمودار تابع $f(x)=۲x^۲+\frac{k}{x}$ دارای یک نقطهٔ عطف در $x=-۱$ باشد، آنگاه مقدار k کدام است؟

۱) -۲
۲) ۱
۳) ۰
۴) ۲

۶ـ زاویه بین دو مماس بر $x^۲-xy+y^۲=۹$ در نقاط تقاطع منحنی با محور xها برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{۲}$
۲) $\frac{\pi}{۳}$
۳) ۰
۴) $\frac{\pi}{۴}$

۷ـ عرض از مبدأ خط مجانب منحنی $x^۳+y^۳=۶xy$ کدام است؟

۱) ۳
۲) -۲
۳) ۲
۴) -۳

۸ـ فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $g=f'$، در این صورت:

۱) f و g در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کنند.
۲) g پیوسته است.
۳) f در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند ولی g لزوماً چنین نیست.
۴) gof پیوسته است.

۹ـ اگر $f(x)=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{x}\sqrt[۳]{\sin t}\,dt$، آنگاه به ازای چه مقدار x در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ تابع $f(x)$ ماکزیمم است؟

۱) ۰
۲) $\frac{\pi}{۲}$
۳) π
۴) ۲π

۱۰ـ اگر $f(x)=\text{Ln}(\cos x)$، مقدار انتگرال معین $\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\sqrt{۱+(f'(x))^۲}\,dx$ کدام است؟

۱) $\text{Ln}\sqrt{۲}$
۲) $\text{Ln}(\sqrt{۳}+۱)$
۳) ۱
۴) $\text{Ln}(\sqrt{۲}+۱)$

۱۱ــ مقدار انتگرال معین $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{(۱+x^{۲})^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi+۲}{۸}$ ۲) $\frac{\pi+۲}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}+۱$

۱۲ــ مقدار حد $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n^{۲}}(\sqrt{n^{۲}-۱}+\sqrt{n^{۲}-۲^{۲}}+\cdots+\sqrt{n^{۲}-n^{۲}})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۱۳ــ فاصله بین مبدأ و فصل مشترک صفحات $x+۲y-z-۵=۰$ و $x-y+z-۳=۰$ برابر است با:

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۱۴ــ با فرض $\sin^{۲}x+\sin^{۲}y+\sin^{۲}z=۱$، dz برابر است با:

۱) $\frac{\sin ۲x\,dx+\sin ۲y\,dy}{\sin ۲z}$ ۲) $\frac{\cos ۲x\,dx+\cos ۲y\,dy}{\cos ۲z}$ ۳) $-\frac{\cos ۲x\,dx+\cos ۲y\,dy}{\cos ۲z}$ ۴) $-\frac{\sin ۲x\,dx+\sin ۲y\,dy}{\sin ۲z}$

۱۵ــ اگر F یک میدان برداری باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر بی‌معنی است؟

۱) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}[\operatorname{div}(\nabla\vec{F})]$ ۲) $\vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}(\operatorname{div}(\vec{F})]$ ۳) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}[\operatorname{div}(\vec{\nabla}\times\vec{F})])$ ۴) $\vec{\nabla}(\operatorname{div}[\vec{\nabla}(\operatorname{div}\vec{F})])$

۱۶ــ فرض کنید u و v تابع‌هایی دو متغیره و دو بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $\nabla.(\nabla(uv))$ برابر است با:

۱) $v\nabla^{۲}u+u\nabla^{۲}v+\nabla u.\nabla v$ ۲) $u\nabla^{۲}u+v\nabla^{۲}v+\nabla u.\nabla v$ ۳) $v\nabla^{۲}u+u\nabla^{۲}v+۲\nabla u.\nabla v$ ۴) $u\nabla^{۲}u+v\nabla^{۲}v+۲\nabla u.\nabla v$

۱۷ــ مساحت منحنی بستهٔ $۳x^{۲}-۲xy+۳y^{۲}=۴$ برابر است با:

۱) $\pi\sqrt{۳}$ ۲) $\pi\sqrt{۲}$ ۳) $\pi\sqrt{۵}$ ۴) $۲\pi\sqrt{۲}$

۱۸ــ مقدار $\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\,dy\,dx$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{۶}a^{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}a^{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۸}a^{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}a^{۲}$

۱۹ــ مقدار $\iint_{R}e^{x+y}\cos(x-y)\,dx\,dy$ روی ناحیه $R=\{(x,y)\,|\,۰\le x\le\frac{\pi}{۲},۰\le y\le\frac{\pi}{۲}\}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱-e^{\pi}}{۲}$ ۲) $\frac{۱-e^{\frac{\pi}{۲}}}{۲}$ ۳) $\frac{۱+e^{\frac{\pi}{۲}}}{۲}$ ۴) $\frac{۱+e^{\pi}}{۲}$

۲۰ــ شعاع انحنای منحنی $x^{۴}-y^{۴}+x^{۳}-y^{۳}+x^{۲}-y^{۲}+y=۰$ در مبدأ کدام است؟

۱) $\rho=\frac{۱}{۳}$ ۲) $\rho=\frac{۱}{۴}$ ۳) $\rho=\frac{۱}{۲}$ ۴) $\rho=\frac{۱}{۵}$

۲۱ــ در امتداد منحنی $\vec{r}=\vec{r}(s)$، که در آن s پارامتر طول قوس است و $\vec{r}'=\frac{d\vec{r}}{ds}$، عبارت $\vec{r}'.(\vec{r}''\times\vec{r}''')$ برابر کدام است؟

۱) $\kappa^{۲}\tau$، κ انحنا و τ تاب منحنی است. ۲) $\rho^{۲}\tau$، $\rho=\frac{۱}{\kappa}$

۳) $\kappa\tau^{۲}$ ۴) $\rho\tau^{۲}$

۲۲ــ هرگاه منحنی قطبی $r=f(\theta)$ در مبدأ بر محور x ها مماس باشد، شعاع انحنا در مبدأ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}r(\frac{d\theta}{dr})$ ۲) $\frac{۱}{۲}(\frac{dr}{d\theta})$ ۳) $۲(\frac{dr}{d\theta})$ ۴) $۲r(\frac{dr}{d\theta})$

۲۳ــ فرض کنید منحنی C نمودار معادله $f(x,y)=۰$ باشد به‌طوری‌که f_x و f_y موجود و پیوسته هستند و $f_x^{۲}+f_y^{۲}\neq۰$، در این صورت خط قائم بر C در نقطه $p_{۰}=(x_{۰},y_{۰})$ برابر است با:

۱) $f_y(x_{۰},y_{۰})(x-x_{۰})+f_x(x_{۰},y_{۰})(y-y_{۰})=۰$ ۲) $f_y(x_{۰},y_{۰})(x-x_{۰})-f_x(x_{۰},y_{۰})(y-y_{۰})=۰$

۳) $f_x(x_{۰},y_{۰})(x-x_{۰})+f_y(x_{۰},y_{۰})(y-y_{۰})=۰$ ۴) $f_x(x_{۰},y_{۰})(x-x_{۰})-f_y(x_{۰},y_{۰})(y-y_{۰})=۰$

۲۴ــ فرض کنید C منحنی بسته‌ی هموار باشد که مبدأ را احاطه کرده است. کدام گزینه در مورد مقدار $\oint_{C}\frac{xdy-ydx}{x^{۲}+y^{۲}}$ صحیح است؟

۱) موجود نیست. ۲) صفر است. ۳) برابر ۲π است. ۴) مضرب صحیحی از ۲π است.

پاسخنامه رشته تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱

۱ـ گزینه «۱» با جایگذاری $z = x+iy$ داریم $\bar{z} = x-iy$ در نتیجه:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x-iy}=\frac{(x+iy)}{(x-iy)(x+iy)}=\frac{x+iy}{x^2+y^2} \Rightarrow \operatorname{Re}(\frac{1}{z})=\frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \operatorname{Re}(\frac{1}{z}+1)=\frac{x}{x^2+y^2}+1$$

با جایگذاری در نامساوی داده شده داریم:

$$\frac{x}{x^2+y^2}+1\le 2 \Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}\le 1 \Rightarrow x\le x^2+y^2$$

منحنی $x^2+y^2=x$ دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و قطر ۱ یعنی شعاع $\frac{1}{2}$ است. نامعادله‌ی $x\le x^2+y^2$ خارج از این دایره را نشان می‌دهد. برای اطمینان بیشتر می‌توانیم فرم استاندارد معادله‌ی دایره را ایجاد کنیم:

$$x^2+y^2-x\ge 0 \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+y^2\ge\frac{1}{4}$$

۲ـ گزینه «۱» عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد. با رعایت این شرط خواهیم داشت:

$$f(x)=\log_2(\underbrace{\log_3(\log_4 x)}_{u})$$

$$u>0 \Rightarrow \log_3(\log_4 x)>0 \Rightarrow \log_4 x>3^0 \Rightarrow \log_4 x>1 \Rightarrow x>4$$

در این ناحیه، عبارت جلوی همه‌ی لگاریتم‌ها مثبت است.

$$D_f=\{x:x>4\}$$

۳ـ گزینه «۴» روش اول: می‌توانیم از تغییر متغیر $t=\arccos(1-x)$ استفاده کنیم. وقتی $x\to 0^+$، آنگاه $t\to 0^+$. همچنین $\cos t = 1-x$ در نتیجه $x=1-\cos t$.

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{t\to 0^+}\frac{t}{\sqrt{\frac{t^2}{2}}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{2}t}{t}=\sqrt{2}$$

روش دوم: فرم $\frac{0}{0}$ است از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x-x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

۴ـ گزینه «۳» روش اول: با حل کردن این رابطه‌ی بازگشتی، جمله‌ی عمومی دنباله را پیدا می‌کنیم. ابتدا جواب رابطه‌ی بازگشتی همگن $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$ را پیدا می‌کنیم.

$$r^n=2r^{n-1}-r^{n-2} \Rightarrow r^2=2r-1 \Rightarrow r^2-2r+1=0 \Rightarrow r_1=1\ ,\ r_2=1 \Rightarrow a_n=c_1(1)^n+c_2n(1)^n \Rightarrow a_n=c_1+c_2n$$

حالا در رابطه‌ی بازگشتی ناهمگن، به علت وجود عدد ثابت ۲+ در بخش ناهمگن معادله، جواب ویژه‌ی $a_{n_p}=A(1)$ را هم باید در نظر بگیریم. اما، با توجه به وجود جمله ثابت (۱) و جمله‌ی (n) در جواب قسمت همگن باید a_{n_p} را در n^2 ضرب کنیم: $a_{n_p}=An^2$

با جایگذاری این جواب در معادله‌ی ناهمگن داریم:

$$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+2 \Rightarrow An^2=2A(n-1)^2-A(n-2)^2+2 \Rightarrow 0=2A-4A+2 \Rightarrow A=1 \Rightarrow a_{n_p}=n^2$$

پس جمله‌ی عمومی a_n چنین است:

$$a_n=c_1+c_2n+n^2$$

به علت وجود جمله‌ی n^2 در ضابطه‌ی a_n، تنها گزینه‌ای که می‌تواند درست باشد، گزینه (۳) است. زیرا $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$. اما اگر بخواهیم حل را کامل کنیم از شرایط $a_1=1$ و $a_2=4$ داریم:

$$\begin{cases}c_1+c_2+1=1\\ c_1+2c_2+4=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_1+c_2=0\\ c_1+2c_2=0\end{cases} \Rightarrow c_1=c_2=0 \Rightarrow a_n=n^2$$

روش دوم: می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی داده شده چند جمله از این دنباله را حساب کنیم تا نحوه‌ی رفتار آن را تشخیص دهیم:

$$a_1 = 1\ ,\ a_2 = 4\ ,\ a_3 = 2(4) - 1 + 2 = 9\ ,\ a_4 = 2(9) - 4 + 2 = 16$$

با توجه به چند جمله‌ی به دست آمده معلوم است که a_n صعودی و واگراست. در ضمن $a_n = n^2$ را هم می‌توان حدس زد.

◆ ◆ ◆ ◆

۵ـ گزینه «۱» اگر $x = -1$ نقطه‌ی عطف باشد، آنگاه علامت $f''(x)$ در $x = 1$ عوض شده و در صورت وجود مشتق دوم، باید $f''(1) = 0$ باشد.

$$f(x) = 2x^2 + \frac{k}{x} \Rightarrow f'(x) = 4x - \frac{k}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 4 + \frac{2k}{x^3}$$

$f''(x)$ در $x = 1$ موجود است، پس باید داشته باشیم:

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 4 + 2k = 0 \Rightarrow k = -2$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶ـ گزینه «۳» ابتدا نقاط تقاطع این منحنی با محور xها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

نقاط $A(3,0)$ و $B(-3,0)$ محل‌های برخورد با محور xها هستند. شیب خط مماس در هر نقطه، از منحنی برابر است با $\frac{dy}{dx}$.

$$m = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x - y}{-x + 2y} \Rightarrow \begin{cases} m_A = -\frac{6}{-3} = 2 \\ m_B = -\frac{-6}{3} = 2 \end{cases}$$

هر دو خط مماس دارای شیب یکسانی هستند، پس زاویه‌ی بین آن‌ها (۰) است؛ یعنی با هم موازی‌اند.

◆ ◆ ◆ ◆

۷ـ گزینه «۲» از صورت سؤال معلوم است که مجانب مایل را می‌خواهیم (البته با توجه به آن‌که ضریب y^3 و ضریب x^3 ثابت هستند و صفر نمی‌شوند متوجه می‌شویم این منحنی مجانب افقی و قائم ندارد).

فرض کنیم مجانب مایل خط $y = ax + b$ باشد. پس داریم:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x}\ ,\ b = \lim_{x\to\infty} (y - ax)$$

با تقسیم جملات بر x^3 سعی می‌کنیم مقدار حد $\frac{y}{x}$ را به دست آوریم:

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow 1 + (\frac{y}{x})^3 = \frac{6y}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} [1 + (\frac{y}{x})^3] = \lim_{x\to\infty} 6(\frac{y}{x})\frac{1}{x^2} \Rightarrow 1 + a^3 = \frac{6a}{\infty} \Rightarrow 1 + a^3 = 0 \Rightarrow a = -1$$

حالا عرض از مبدأ را حساب می‌کنیم. فرض کنیم $y = -x + b$ معادله‌ی مجانب مایل باشد.

در این صورت باید وقتی $x \to \infty$ میل می‌کند داشته باشیم $y \sim -x + b$ با جایگذاری در معادله داریم:

$$x^3 + (-x + b)^3 \simeq 6x(-x + b) \Rightarrow 3bx^2 - 3b^2x + b^3 \simeq -6x^2 + 6bx\ ,\ (x \to \infty)$$

وقتی $x \to \infty$ میل می‌کند، از هر چند جمله‌ای، بزرگترین درجه‌اش باقی می‌ماند؛ پس داریم: $3bx^2 = -6x^2$ در نتیجه $3b = -6$ پس $b = -2$.

◆ ◆ ◆ ◆

۸ـ گزینه «۱» هر تابع پیوسته، در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند. علاوه بر آن، مشتق هر تابع هم در بازه‌ی (a,b) دارای خاصیت مقدار میانی است.

حالا در این سؤال؛ تابع f مشتق‌پذیر است، پس پیوسته است؛ در نتیجه دارای خاصیت مقدار میانی است. تابع g هم مشتقِ f است پس دارای خاصیت مقدار میانی است. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

در مورد سایر گزینه‌ها:

بررسی گزینه (۲): تابع پیوسته‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ را بر بازه‌ی $[0,1]$ در نظر بگیرید، می‌دانیم که $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$، اما $f'(x)$ در $x = 0$ پیوسته نیست. پس تابع مشتق لزوماً پیوسته نیست.

بررسی گزینه (۳): همان‌طور که گفتیم f و f' هر دو در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کنند.

بررسی گزینه (۴): همان‌طور که در بررسی گزینه‌ی (۱) گفتیم، تابع $g = f'$ لزوماً پیوسته نیست. پس ترکیب gof هم لزوماً پیوسته نیست. برای مثال $f(x) = \sqrt{x}$ بر بازه‌ی $[0,1]$ را در نظر بگیرید:

$$g(x) = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}}}$$

می‌بینیم که gof در $x = 0$ پیوسته نیست.

۹ـ گزینه «۳» ابتدا نقاط بحرانی $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۱\times\sqrt[۳]{\sin x}-۰=۰ \Rightarrow \sin x=۰ \Rightarrow x=۰,\pi,۲\pi$$

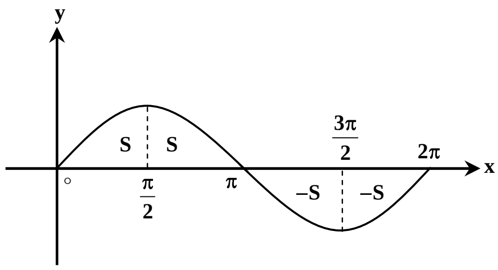
حالا مقدار $f(x)$ را در نقاط بحرانی و در دو سر بازه حساب می‌کنیم:

$$f(۰)=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰}\sqrt[۳]{\sin t}\,dt=-\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt[۳]{\sin t}\,dt<۰$$

$$f(\pi)=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\sqrt[۳]{\sin t}\,dt>۰ \quad \text{و} \quad f(۲\pi)=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi}\sqrt[۳]{\sin t}\,dt<۰$$

بنابراین بیشترین مقدار $f(x)$ را در نقطه‌ی $x=\pi$ به دست می‌آید.

توضیح: تابع $y=\sqrt[۳]{\sin t}$ از نظر علامت مانند $\sin t$ است، به نمودار آن توجه کنید:



اگر مساحت زیر منحنی در فاصله‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ را مثلاً با S نشان دهیم، با توجه به حدود انتگرال‌ها داریم: $f(۰)=-S$ و $f(\pi)=S$ و $f(۲\pi)=-S$

۱۰ـ گزینه «۴» این انتگرال، طول قوس منحنی $f(x)$ را در بازه‌ی $[۰,\frac{\pi}{۴}]$ محاسبه می‌کند.

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-tgx \Rightarrow ۱+(f'(x))^۲=۱+tg^۲x=\sec^۲ x$$

$$\Rightarrow I=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\sqrt{\sec^۲x}\,dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\sec x\,dx \Rightarrow I=[Ln|\sec x+tgx|]_۰^{\frac{\pi}{۴}}=Ln(\sqrt{۲}+۱)-Ln(۱)=Ln(\sqrt{۲}+۱)$$

۱۱ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $x=tg\theta$ استفاده می‌کنیم.

$$dx=(۱+tg^۲\theta)d\theta \quad , \quad x=۰\Rightarrow\theta=۰ \quad , \quad x=۱\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$$

$$\int_۰^۱\frac{dx}{(۱+x^۲)^۲}=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{(۱+tg^۲\theta)}{(۱+tg^۲\theta)^۲}d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{۱+tg^۲\theta}d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{\sec^۲\theta}d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\cos^۲\theta\,d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲\theta)d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}(\theta+\frac{\sin ۲\theta}{۲})\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱}{۲}(\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲})=\frac{\pi+۲}{۸}$$

۱۲ـ گزینه «۲» این حد را می‌توان به صورت $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n^۲}\sum\limits_{k=۱}^{n}\sqrt{n^۲-k^۲}$ نوشت. $\frac{۱}{n}$ را خارج از مجموع نگه می‌داریم و $\frac{۱}{n}$ را در سایر جملات ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\times\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\sqrt{n^۲-k^۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\sqrt{\frac{n^۲-k^۲}{n^۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\sqrt{۱-(\frac{k}{n})^۲} \Rightarrow f(\frac{k}{n})=\sqrt{۱-(\frac{k}{n})^۲} \Rightarrow f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$$

طبق فرمول حد مجموع ریمانی داریم:

$$\text{جواب}=\int_۰^۱ f(x)dx=\int_۰^۱\sqrt{۱-x^۲}\,dx$$

با تغییر متغیر $x=\sin\theta$ داریم:

$$dx=\cos\theta\,d\theta \ , \ ۰\le x\le ۱ \Rightarrow ۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$$

$$\text{جواب حد}=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱-\sin^۲\theta}\cos\theta\,d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\cos^۲\theta}\cos\theta\,d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\cos^۲\theta\,d\theta=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲\theta)d\theta=\frac{۱}{۲}[\theta+\frac{\sin ۲\theta}{۲}]_۰^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{\pi}{۴}$$

۱۳ـ گزینه «۳» ابتدا بردار هادی فصل مشترک دو صفحه و یک نقطه‌ی دلخواه از آن را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases}x+۲y-z-۵=۰\\x-y+z-۳=۰\end{cases}$$

مثلاً با انتخاب $y=۰$ داریم: $\begin{cases}x-z=۵\\x+z=۳\end{cases}$. پس $x=۴$ و $z=-۱$ به دست می‌آید. نقطه‌ی $P_۰(۴,۰,-۱)$ روی فصل مشترک قرار دارد. بردار هادی این خط، حاصل‌ضرب بردارهای نرمال دو صفحه است:

$$\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۱ & ۲ & -۱\\ ۱ & -۱ & ۱\end{vmatrix}=\vec{i}-۲\vec{j}-۳\vec{k}$$

فاصله‌ی نقطه‌ی $P(۰,۰,۰)$ از خط مورد نظر برابر است با: $\dfrac{|\overrightarrow{PP_۰}\times\vec{V}|}{|\vec{V}|}$.

$$\overrightarrow{PP_۰}\times\vec{V}=(۴,۰,-۱)\times(۱,-۲,-۳)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۴ & ۰ & -۱\\ ۱ & -۲ & -۳\end{vmatrix}\Rightarrow \overrightarrow{PP_۰}\times\vec{V}=-۲\vec{i}+۱۱\vec{j}-۸\vec{k}$$

$$\Rightarrow \text{جواب}=\frac{\sqrt{۴+۱۲۱+۶۴}}{\sqrt{۱+۴+۹}}=\frac{\sqrt{۱۸۹}}{\sqrt{۱۴}}=\frac{\sqrt{۷\times ۲۷}}{\sqrt{۷\times ۲}}=\frac{\sqrt{۲۷}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲۷}}{۲}=\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}$$

۱۴ــ گزینه «۴» با توجه به فرمول دیفرانسیل کل داریم:

$$dz=(\frac{\partial z}{\partial x})dx+(\frac{\partial z}{\partial y})dy$$

با مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{۲\sin x\cos x}{۲\sin z\cos z}=-\frac{\sin ۲x}{\sin ۲z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{۲\sin y\cos y}{۲\sin z\cos z}=-\frac{\sin ۲y}{\sin ۲z}$$

بنابراین با جایگذاری در dz داریم:

$$dz=-\frac{\sin ۲x\,dx+\sin ۲y\,dy}{\sin ۲z}$$

۱۵ــ گزینه «۱» از آنجا که $\vec{\nabla}$ یک عملگر برداری است، این موارد با معنی هستند؛ (تابع حقیقی) $\vec{\nabla}$، (تابع برداری)$.\vec{\nabla}$، (تابع برداری)$\times\vec{\nabla}$
اما نمادی مانند $\vec{\nabla}\vec{F}$ که در گزینه‌ی (۱) به کار رفته است، بی‌معنی است. زیرا بین این دو بردار نه علامت ضرب داخلی نوشته شده و نه ضرب خارجی.
در سایر گزینه‌ها، عبارات و حاصل‌ضرب‌های نوشته شده، بامعنی هستند.

۱۶ــ گزینه «۳» uv تابعی حقیقی است که حاصل‌ضرب u و v است.

$$\vec{\nabla}(uv)=(uv)_x\vec{i}+(uv)_y\vec{j}+(uv)_z\vec{k}\Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{\nabla}(uv)=(uv)_{xx}+(uv)_{yy}+(uv)_{zz}$$

(به طور کلی برای هر تابع حقیقی مانند f می‌دانیم که: $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}f=\nabla^۲f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$) در این مثال $f=uv$ است.

حالا با محاسبه‌ی مشتق دوم حاصل‌ضرب نسبت به x داریم:

$$(uv)_{xx}=u_{xx}v+۲u_xv_x+uv_{xx}$$

به همین ترتیب برای سایر متغیرها، مشتق مرتبه دوم را حساب می‌کنیم. با جمع‌کردن عبارات داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(uv)=(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})v+۲(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)+(v_{xx}+v_{yy}+v_{zz})u=(\nabla^۲u)v+۲(\vec{\nabla}u).(\vec{\nabla}v)+(\nabla^۲v)u$$

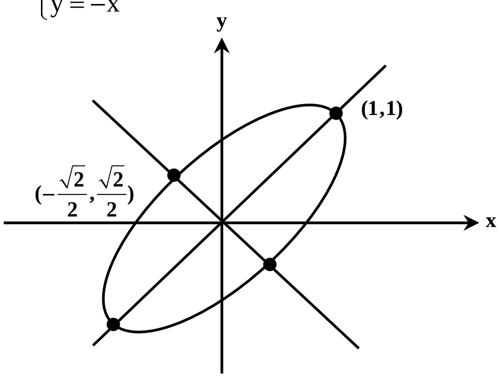
۱۷ــ گزینه «۲» منحنی $ax^۲+bxy+ay^۲=c$ یک بیضی است که قطرهای آن روی خطوط $y=x$ و $y=-x$ قرار دارند. با برخورد دادن این منحنی و خطوط $y=\pm x$ می‌توانیم اندازه‌ی شعاع‌ها را به دست آوریم:

$$\begin{cases}۳x^۲-۲xy+۳y^۲=۴\\ y=x\end{cases}\Rightarrow ۴x^۲=۴\Rightarrow x=\pm۱$$

پس نقاط $(۱,۱)$ و $(-۱,-۱)$ دو سر قطر هستند.

$$\begin{cases}۳x^۲-۲xy+۳y^۲=۴\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow ۸x^۲=۴\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس نقاط $(\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ و $(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ دو سر قطر هستند.



$$\text{شعاع بزرگتر}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\text{شعاع کوچکتر}=\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=۱$$

$$\text{مساحت}=\pi\times\sqrt{۲}\times۱=\sqrt{۲}\pi$$

۱۸ـ گزینه «۱» ناحیه‌ی انتگرال‌گیری بین خط $y=0$ و منحنی $y=\sqrt{a^2-x^2}$ قرار دارد و در آن $0\le x\le a$ است. پس ربع اول از دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ است. در مختصات قطبی داریم $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le r\le a$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\sqrt{r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}r^2dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^a=\frac{\pi a^3}{6}$$

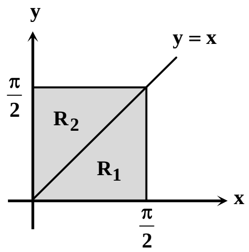
۱۹ـ گزینه «۴» ابتدا یادآوری می‌کنیم که انتگرال $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ به روش جزء به جزء حل می‌شود اما، به علت وقت‌گیر بودن آن بهتر است مطابق متن کتاب، فرمول زیر را به خاطر داشته باشید:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$$

اکنون به حل انتگرال دوگانه می‌پردازیم.

در تابع زیر انتگرال تبدیل x به y و y به x تغییری ایجاد نمی‌کند. در ضمن ناحیه‌ی انتگرال‌گیری نسبت به خط $y=x$ تقارن دارد، پس می‌توانیم مقدار انتگرال روی نیمه‌ی پایینی را که زیر خط $y=x$ قرار دارد، حساب کرده و ۲ برابر کنیم.



$$\iint_R f(x,y)\,dy\,dx=2\iint_{R_1} f(x,y)\,dy\,dx$$

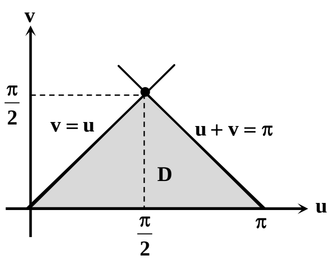
برای ساده‌تر شدن این تابع فرض می‌کنیم $u=x+y$ و $v=x-y$. عبارت زیر انتگرال به صورت $e^u\cos v$ نوشته می‌شود. ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xy}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\Rightarrow |J_{uv}|=\frac{1}{|J_{xy}|}=\frac{1}{2}$$

حالا معادله‌ی مرزها را در دستگاه uov پیدا می‌کنیم.

مرزهای قدیمی	مرزهای جدید
$y=x\quad\Rightarrow$	$v=0$
$y=0\quad\Rightarrow$	$(u=x,v=x)\Rightarrow v=u$
$x=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow$	$u=\frac{\pi}{2}+y\ ,\ v=\frac{\pi}{2}-y)\Rightarrow v+u=\pi$

پس در صفحه‌ی uov شکل مقابل به دست می‌آید:



$$I=2\iint_D e^u\cos v(\frac{1}{2}dv\,du)=2\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{u}e^u\cos v(\frac{1}{2}dvdu)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{\pi-u}e^u\cos v(\frac{1}{2}dvdu)\Big)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^u\sin u\,du+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^u\underbrace{\sin(\pi-u)}_{\sin u}du=\int_0^{\pi}e^u\sin u\,du=\frac{e^u}{2}(\sin u-\cos u)\Big|_0^{\pi}=\frac{e^{\pi}+1}{2}$$

توضیح: توجه داشته باشید که نوشتن حدود انتگرال روی D با ترتیب $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_v^{\pi-v}e^u\cos v\,du\,dv$ ایرادی ندارد، اما کمک زیادی به ساده‌تر شدن مسأله نمی‌کند.

۲۰ـ گزینه «۳» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم. در روش اول طبق معمول همیشه مقادیر y' و y'' را در مبدأ حساب می‌کنیم.

$$x^4-y^4+x^3-y^3+x^2-y^2+y=0$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$4x^3-4y^3y'+3x^2-3y^2y'+2x-2yy'+y'=0$$

با مشتق‌گیری دوباره خواهیم داشت:

$$12x^2-12y^2y'y'-4y^3y''+6x-6yy'y'-3y^2y''+2-2y'y'-2yy''+y''=0$$

با جایگذاری $y=0$ ، $x=0$ دو معادله‌ی قبل داریم:

$$\begin{cases}0+y'=0 & \Rightarrow y'=0\\ 0+2-0+y''=0 & \Rightarrow y''=-2\end{cases}$$

حالا از فرمول انحناء استفاده می‌کنیم:

$$\kappa=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|-2|}{(1+0)^{\frac{3}{2}}}=2$$

پس شعاع انحناء، $\rho=\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{2}$ است.

روش دوم: شرایط استفاده از فرمول نیوتن را بررسی می‌کنیم. این منحنی از مبدأ می‌گذرد و با استفاده از قاعده‌ی کمترین درجه؛ در نزدیک مبدأ داریم $y=0$ که نشان می‌دهد محور xها بر این منحنی مماس است. پس می‌توانیم از فرمول نیوتن استفاده کنیم:

$$\rho=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2y}\Rightarrow 2\rho=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y}$$

(البته اگر مقدار حد منفی شد، قدرمطلق آن را در نظر می‌گیریم.) با تقسیم طرفین معادله‌ی منحنی بر y، مقدار این حد را تعیین می‌کنیم:

$$(\frac{x^2}{y})x^2-y^3+(\frac{x^2}{y})x-y^2+(\frac{x^2}{y})-y+1=0$$

وقتی $x\to 0$ میل می‌کند داریم $y\to 0$ و $\frac{x^2}{y}\to 2\rho$ در نتیجه:

$$(2\rho)\times 0-0+(2\rho)\times 0-0+(2\rho)-0+1=0\Rightarrow 2\rho+1=0\Rightarrow \rho=-\frac{1}{2}$$

البته با محاسبه‌ی قدرمطلق این عدد، شعاع انحنا برابر با $\rho=\frac{1}{2}$ خواهد بود.

۲۱ـ گزینه «۱» یکی از فرمول‌های محاسبه‌ی تاب به این صورت است:

$$\tau=\frac{\vec{r}'.(\vec{r}''\times\vec{r}''')}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2}$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{r}'.(\vec{r}''\times\vec{r}''')=\tau|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2$$

از طرفی می‌دانیم که انحنا از رابطه‌ی $\kappa=\frac{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$ به دست می‌آید. در ضمن وقتی منحنی را بر حسب پارامتر طول قوس می‌نویسیم، اندازه‌ی بردار سرعت برابر با یک می‌شود یعنی $|\vec{r}'|=1$. در نتیجه: $\kappa=|\vec{r}'\times\vec{r}''|$. به این ترتیب عبارت مورد نظر به این شکل نوشته می‌شود:

$$\vec{r}'.(\vec{r}''\times\vec{r}''')=\tau\kappa^2$$

۲۲ـ گزینه «۲» از فرمول انحنای منحنی‌های قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\kappa(\theta)=\frac{|2r'^2+r^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

در مبدأ مختصات داریم $r=0$ در نتیجه:

$$\kappa=|\frac{2r'^2}{r'^3}|\Rightarrow\kappa=|\frac{2}{r'}|$$

شعاع انحناء برابر است با:

$$\rho=\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{2}|r'|=\frac{1}{2}|\frac{dr}{d\theta}|$$

با فرض مثبت بودن r'، گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۲۳ـ گزینه «۲» بردار $\vec{\nabla}f$، در هر نقطه از منحنی، بر آن عمود است. در نقطه‌ی (x_0,y_0) داریم: $\vec{\nabla}f=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$. پس معادله‌ی خط قائم بر منحنی، چنین است:

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}\Rightarrow f_y(x_0,y_0)(x-x_0)-f_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

۲۴ـ گزینه «۳» مطابق متن درس، مقدار انتگرال این میدان برداری روی هر مسیر بسته همواری که شامل مبدأ باشد، 2π خواهد بود. اما حل کامل‌تر آن چنین است:

میدان $\vec{F}=\frac{x}{x^2+y^2}\vec{i}-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$ پایستار است.

پس می‌توانیم به جای منحنی C هر مسیر بسته و هموار که شامل مبدأ باشد در نظر بگیریم. روی دایره‌ی واحد داریم: $0\le\theta\le 2\pi$، $x=\cos\theta$ ، $y=\sin\theta$. با جایگذاری این عبارات و محاسبه‌ی dx و dy داریم:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\cos\theta-\sin\theta(-\sin\theta)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

رشته تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲

۱ـ نقطه $x=۰$ برای تابع $f(x)=x-\sin x$ چگونه است؟

۱) یک نقطه عطف است. ۲) یک نقطه ماکسیمم است. ۳) یک نقطه می‌نیمم است. ۴) هیچ‌کدام

۲ـ ذوزنقه‌های متساوی‌الساقینی به مساحت ثابت K و زاویه بین ساق و قاعده α را در نظر بگیرید. طول ساق ذوزنقه‌ای که محیط آن کمینه باشد کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{K}{\cos\alpha}}$ ۲) $\sqrt{\frac{K}{\sin\alpha}}$ ۳) $\frac{K}{\sin\alpha}$ ۴) $\frac{K}{\cos\alpha}$

۳ـ متحرکی در فضا بر روی صفحه $۲x+۵y-z=۱۱$ حرکت می‌کند، تاب متحرک در یک نقطه دلخواه برابر است با:

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳۰}}$ ۳) $\sqrt{۱۴}$ ۴) $\sqrt{۳۰}$

۴ـ مشتق جهتی مرتبه دوم تابع $f(x,y,z)=xyz$ ، در نقطه (۱ و ۳ و ۲) در جهت $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲}{۳}$ ۲) $\frac{-۴}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۵ـ مقدار $\int_C \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}$ کدام است؟ که در آن C مسیری از نقطه‌ی $A(-۱,۲,-۲)$ به نقطه‌ی $B(۳,-۴,۱۲)$ است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

۶ـ فاصله نقطه‌ی $A(۴,۱,-۲)$ از فصل مشترک صفحات $۲x+y-۴z-۱۶=۰$ و $x-۲y+۳z+۲=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۷ـ خطی از نقطه‌ی $A(۲,۱)$ چنان مرور می‌دهیم که محور x ها را در C و محور y ها را در D قطع کند. هرگاه مساحت مثلث OCD می‌نیمم باشد، معادله خط کدام است؟

۱) $\frac{x}{۲}-\frac{y}{۴}=۱$ ۲) $\frac{x}{۴}-\frac{y}{۲}=۱$ ۳) $\frac{x}{۲}+\frac{y}{۴}=۱$ ۴) $\frac{x}{۴}+\frac{y}{۲}=۱$

۸ـ تابع $f(x)=\begin{cases} ۰ & x\le ۰ \\ x^n & x>۰ \end{cases}$ برای $n\in N$ داده شده است. به ازای کدام n تابع f مشتق‌پذیر است؟

۱) برای هر n ۲) برای $n>۱$ ۳) فقط برای n=۲ ۴) فقط برای $n\ge ۳$

۹ـ فرض کنید $f'(x)=۱+f^{۱۰}(x), f(۰)=۱$. ضریب $x^۳$ در بسط مک لورن تابع $f(x)$ برابر است با:

۱) $\frac{۱۴۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۹۰}{۳}$ ۳) ۲۸۰ ۴) ۳۸۰

۱۰ـ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱+\tan x}{۱+\sin x}\right)^{\frac{۱}{\sin x}}=۱$ ۲) $\lim_{x\to ۱}(۱+\sin\pi x)^{\cot\pi x}=۱$

۳) $\lim_{x\to ۱}(۱+\sin\pi x)^{\cot\pi x}=e$ ۴) $\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱+\tan x}{۱+\sin x}\right)^{\frac{۱}{\sin x}}=e$

۱۱ـ اگر $f'(۴)=۳$ آنگاه مقدار $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۴)}{\sqrt{x}-۲}$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۱۲ ۴) مقدار حد وابسته به ضابطه تابع f است و لذا قابل محاسبه نمی‌باشد.

۱۲ـ حد دنباله $۱,-\frac{۲}{۲},\frac{۳}{۴},\frac{-۴}{۸},\frac{۵}{۱۶},\dots$ در صورت وجود کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۳ـ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق می‌کند.

الف ـ روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر است. ب ـ $f(a)f(b)<0$ ج ـ $f'(x)>0$ (به ازای هر $x\in(a,b)$)

دراین صورت:

۱) معادله $f(x)=0$ ممکن است بیش از یک جواب داشته باشد.

۲) همواره $f(x)\neq 0$.

۳) معادله $f(x)=0$ دقیقاً یک جواب روی $[a,b]$ دارد.

۴) در مورد جواب معادله $f(x)=0$ روی $[a,b]$ هیچ قضاوتی نمی‌توان کرد.

۱۴ـ حجم چهاروجهی محدود به صفحات مختصات و صفحه مماس بر سطح $xyz=a^3$ $(a>0)$ در نقطه‌ی (a,a,a) برابر است با:

۱) $\frac{1}{9}a^3$ ۲) $\frac{2}{9}a^3$ ۳) $\frac{9}{2}a^3$ ۴) $9a^3$

۱۵ـ اگر برای هر $a,b\in\mathbb{R}$، $f(a+b)=f(a)f(b)$، $f(0)\neq 0$ و $f'(0)$ موجود باشد آنگاه:

۱) $f'(0)=f(0)f'(x)$

۲) برای هر $x\neq 0$، $f'(x)=f'(0)f(x)$

۳) تابع $f(x)$ فقط در $x=0$ مشتق دارد.

۴) چون از پیوستگی تابع $f(x)$ اطلاعی نداریم لذا در مورد مشتق آن قضاوتی نمی‌توان کرد.

۱۶ـ انتگرال $\int_2^4\int_x^{2x} f(x,y)dydx$ برابر است با:

۱) $\int_2^8\int_2^y f(x,y)dxdy$ ۲) $\int_2^8\int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y)dxdy$

۳) $\int_2^4\int_{\frac{y}{2}}^4 f(x,y)dxdy+\int_4^8\int_2^y f(x,y)dxdy$ ۴) $\int_2^4\int_2^y f(x,y)dxdy+\int_4^8\int_{\frac{y}{2}}^4 f(x,y)dxdy$

۱۷ـ بیش‌ترین سرعت افزایش تابع $f(x,y,z)=xy+xz+yz$ در نقطه $(-1,5,-3)$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۸ـ مقدار سری $\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{2}{3})^{n-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۹

۱۹ـ خطوط $L_1:\begin{cases}x=1\\y=t+1\\z=-t-1\end{cases}$ و $L_2:\begin{cases}x+2z=2\\y=2\end{cases}$ را در نظر بگیرید. معادله صفحه‌ای که از دو خط به یک فاصله باشد کدام است؟

۱) $2x-y-z=\frac{13}{9}$ ۲) $-2x+y+z=\frac{13}{9}$ ۳) $x+2y+2z=\frac{63}{9}$ ۴) $x+2y+2z=\frac{63}{18}$

۲۰ـ مقدار $\lim_{x\to 0} x^2(\sin\frac{1}{x})[\frac{1}{x}]$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) موجود نیست. ۴) ∞

۲۱ـ مقدار $\int_0^3 \frac{dx}{x+\sqrt{9-x^2}}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{9\pi}{4}$

۲۲ـ $\cos(\pi\sinh\ln 3)$ برابر است با:

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۳ـ طول قوس منحنی C با معادله $(\circ \le \theta \le \frac{\pi}{۲})$ $\begin{cases} x(t)=\int_{\circ}^{\sin^۲ t} \sin\frac{\pi\theta^۲}{۲}d\theta \\ y(t)=\int_{\circ}^{\sin^۲ t} \cos\frac{\pi\theta^۲}{۲}d\theta \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) ۱   ۳) π ۴) ۲π

۲۴ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=۱}^{n}\frac{۱}{n}\sin^۲\frac{k\pi}{n}$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۱   ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۵ـ سری $\sum\limits_{n=\circ}^{\infty}(r^n+\frac{۱}{r^n})$ به ازای چه مقادیری از r همگراست؟

۱) $r>\circ$ ۲) $\circ<r<۱$ ۳) $\circ<r<۲$ ۴) هیچ مقداری

پاسخنامه رشته تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲

۱ـ گزینه «۱» با محاسبه‌ی مشتق‌های f در $x=\circ$، مرتبه‌ی اولین مشتقی که صفر نمی‌شود را پیدا می‌کنیم:

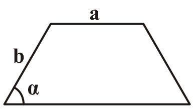
$$f'(x)=۱-\cos x \longrightarrow f'(\circ)=\circ$$

$$f''(x)=\sin x \longrightarrow f''(\circ)=\circ$$

$$f'''(x)=\cos x \longrightarrow f'''(\circ)=۱$$

مشتق سوم، مخالف صفر شد پس طبق متن درس نقطه $x=\circ$ یک نقطه عطف می‌باشد.

۲ـ گزینه «۲» ذوزنقه داده شده را به این صورت در نظر می‌گیریم. طول قاعده‌ی بزرگتر برابر است با $a+۲b\cos\alpha$ و ارتفاع آن $b\sin\alpha$ است. در نتیجه:



مساحت ذوزنقه $S=\frac{۱}{۲}(a+a+۲b\cos\alpha)\times b\sin\alpha=K$ (*)

محیط ذوزنقه $P=a+۲b+a+۲b\cos\alpha=۲a+۲b\cos\alpha+۲b$ (**)

از رابطه (*) داریم:

$$۲a+۲b\cos\alpha=\frac{۲K}{b\sin\alpha}$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (**) داریم:

$$P=\frac{۲K}{b\sin\alpha}+۲b$$

توجه کنید که k و α ثابت هستند. برای داشتن ذوزنقه با محیط کمینه از رابطه فوق نسبت به b مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{dP}{db}=\circ\Rightarrow-\frac{۲K}{b^۲\sin\alpha}+۲=\circ\Rightarrow b^۲\sin\alpha=K\Rightarrow b=\sqrt{\frac{K}{\sin\alpha}}$$

۳ـ گزینه «۱» منحنی‌هایی که در یک صفحه قرار داشته باشند، دارای تابی برابر با صفر هستند. در این سؤال هم با توجه به اینکه متحرک بر روی صفحه ثابت حرکت می‌کند بنابراین هیچ‌گونه تابی نخواهد داشت و گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۴ـ گزینه «۲» برای به دست آوردن مشتق جهتی مرتبه دوم، باید گرادیان مشتق جهتی مرتبه اول را به دست آوریم، یعنی داریم:

$$f(x,y,z)=xyz \qquad \vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad \vec{\nabla}f=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$$

$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{۳}}$$

مشتق جهتی مرتبه‌ی اول $=\vec{\nabla}f.\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}(yz-xz-xy)$

حال گرادیان این عبارت را می‌گیریم و داریم:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}f.\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}(-z-y)\vec{i}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}(z-x)\vec{j}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}(y-x)\vec{k}\xrightarrow{(۲,۳,۱)}=\frac{-۴}{\sqrt{۳}}\vec{i}-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{j}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{k}$$

در نتیجه خواهیم داشت: $\frac{1}{\sqrt{3}}(-4\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}).\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{-4}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$ = مشتق جهتی دوم

۵ـ گزینه «۳» ابتدا پایستاری تابع برداری $\vec{F}(x,y,z)=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$ را بررسی می‌کنیم:

$$\mathrm{Curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{vmatrix}=0$$

بنابراین میدان $\vec{F}$ پایستار است، تابع پتانسیل آن را g می‌نامیم و انتگرال داده شده روی منحنی C برابر است با:

$$I=\int_C\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=g(3,-4,12)-g(-1,2,-2)$$

تابع پتانسیل g برابر است با:

$$g(x,y,z)=\int_C\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx+\int(0)dy+\int(0)dz=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

بنابراین حاصل انتگرال روی خم برابر است با: $I=g(3,-4,12)-g(-1,2,-2)=\sqrt{9+16+144}-\sqrt{1+4+4}=13-3=10$

۶ـ گزینه «۴» ابتدا معادله فصل مشترک دو صفحه را بدست می‌آوریم. بردار هادی فصل مشترک از حاصلضرب خارجی بردار نرمال‌های دو صفحه بدست می‌آید:

$$\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -4\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=(-5,-10,-5)\Rightarrow\vec{u}=-5(1,2,1)$$

برای بدست آوردن یک نقطه از خط کافیست $z=0$ قرار داده و از روابط مربوط به دو صفحه دو مختصه دیگر x و y را بدست آوریم:

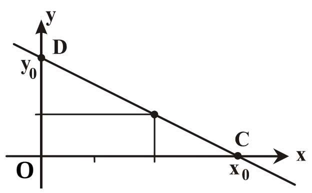
$$\begin{cases}2x+y=16\\ x-2y=-2\end{cases}\Rightarrow p_0=(6,4,0)$$

بنابراین معادله‌ی خطی که فصل مشترک دو صفحه است، چنین خواهد بود: $\frac{x-6}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-0}{1}$

فاصله نقطه (۲- و ۱و ۴) از این خط برابر است با: $d=\frac{|\overrightarrow{p_1p_0}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$

$$\overrightarrow{p_1p_0}=(6-4,4-1,0+2)=(2,3,2),\vec{u}=(1,2,1)\ \Rightarrow d=\frac{|(2,3,2)\times(1,2,1)|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|(-1,0,-1)|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۷ـ گزینه «۴» نمودار خط موردنظر به صورت زیر است:



OCD مساحت: $\frac{x_0\times y_0}{2}\quad(*)$

CD معادله خط: $y-1=m(x-2),m=\frac{1-0}{2-x_0}=\frac{1}{2-x_0}$

$$y-1=\frac{1}{2-x_0}(x-2)\ \Rightarrow x=0\ \Rightarrow y_0-1=\frac{1}{2-x_0}(0-2)\ \Rightarrow y_0=\frac{2}{x_0-2}+1$$

$$y_0=\frac{2+x_0-2}{x_0-2}=\frac{x_0}{x_0-2}\qquad(**)$$

با جایگذاری رابطه (**) در (*) مساحت مستطیل به این صورت به دست می‌آید: $S=\frac{x_0^2}{2x_0-4}$

برای داشتن مساحت مینیمم باید: $S'=0 \Rightarrow \frac{2x_0(2x_0-4)-2x_0^2}{(2x_0-4)^2}=0 \Rightarrow 4x_0^2-8x_0-2x_0^2=0 \Rightarrow 2x_0^2-8x_0=0 \Rightarrow 2x_0(x-4)=0$

$$\Rightarrow x_0=4 \Rightarrow m=\frac{1}{2-4}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین معادله خط موردنظر برابر است با: $y-1=-\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+2 \Rightarrow \frac{y}{2}+\frac{x}{4}=1$

۸ـ گزینه «۲» کافیست مشتق چپ و راست تابع در نقطه $x=0$ را بررسی کنیم:

$$f'_-(0)=0, f'_+(0)=\lim_{x\to0}\frac{x^n-0}{x}=\lim_{x\to0}x^{n-1}$$

برای داشتن مشتق در نقطه $x=0$ باید مشتق چپ و راست در این نقطه باهم برابر باشند، لذا: $\lim_{x\to0}x^{n-1}=0 \Rightarrow n-1>0 \Rightarrow n>1$

باید توجه داشت که تابع داده شده برای همه نقاط داده شده پیوسته می‌باشد.

۹ـ گزینه «۲» ضریب x^3 در بسط مکلورن برابر است با $\frac{f'''(0)}{3!}$ بنابراین ابتدا از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=1+f^{10}(x)\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}}f''(x)=10f'(x)\times f^{9}(x) \qquad (*)$$

با مشتق‌گیری مجدد از رابطه فوق داریم:

$$f'''(x)=10f''(x)\times f^{9}(x)+90f'^{2}(x)\times f^{8}(x) \qquad (**)$$

با جایگذاری $x=0$ در همه‌ی معادلات به دست آمده داریم:

$$f'(0)=1+f^{10}(0)=1+1=2 \ ،\ f''(0)=10\times2\times1=20 \ ،\ f'''(0)=200+180$$

ضریب x^3 در بسط مکلورن $=\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{380}{6}=\frac{190}{3}$

۱۰ـ گزینه «۱» مقدار حدهای داده شده را محاسبه می‌کنیم:

گزینه‌ی ۱: با جایگذاری نقطه $x=0$ در تابع زیر حد به حالت مبهم 1^∞ می‌رسیم و پس با استفاده از رفع ابهام داریم:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}-1\right)\left(\frac{1}{\sin x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{tgx-\sin x}{1+\sin x}\right)\times\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{1+\sin x}\right)}=e^{0}=1$$

گزینه‌ی ۲: به طور مشابه این حد به صورت مبهم 1^∞ می‌باشد که پس از رفع ابهام داریم: $\lim_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\cot g\pi x}=1^\infty \Rightarrow$

$$\lim_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\cot g\pi x}=e^{\lim\limits_{x\to1}(1+\sin\pi x-1)\cot g\pi x}=e^{\lim\limits_{x\to1}\cos\pi x}=e^{-1}$$

۱۱ـ گزینه «۳» با جایگذاری $x=4$ داریم: $\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{\sqrt{x}-2}=\frac{0}{0}$

در نتیجه با استفاده از هوپیتال داریم: $\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{f'(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=2\times2f'(4)=4f'(4)=12$

۱۲ـ گزینه «۱» دنباله a_n برابر است با:

$$a_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n-1}}$$

بنابراین حد دنباله a_n برابر است با:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n-1}}$$

با توجه به اینکه سرعت رشد مخرج بیشتر از صورت می‌باشد بنابراین مقدار حد فوق برابر صفر است.

۱۳ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه $f(a)f(b)<0$ می‌باشد بنابراین معادله $f(x)=0$ در بازه $[a,b]$ حداقل یک ریشه دارد. از طرفی چون $f'(x)>0$ است بنابراین تابع $f(x)$ صعودی است و طبق متن درس معادله $f(x)=0$ تنها همان یک ریشه را دارا خواهد بود. در نتیجه گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۱۴ـ گزینه «۳» بردار نرمال صفحه مماس بر سطح $xyz=a^3$ برابر است با:

$$f(x,y,z)=xyz-a^3 \Rightarrow \vec{n}=\vec{\nabla}f\Big|_{(a,a,a)}=(yz,xz,xy)\Big|_{(a,a,a)}=(a^2,a^2,a^2)\Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

بنابراین معادله صفحه مماس برابر است با:

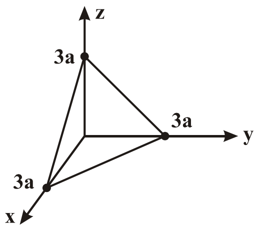
$$(x-a)+(y-a)+(z-a)=0 \Rightarrow x+y+z=3a$$

کافیست محل تلاقی صفحه با محورهای مختصات را بیابیم:

$$\text{تلاقی با محورx ها} \xrightarrow{y=z=0} x=3a$$

$$\text{تلاقی با محورy ها} \xrightarrow{x=z=0} y=3a$$

$$\text{تلاقی با محورz ها} \xrightarrow{x=y=0} z=3a$$



بنابراین حجم منشور فوق برابر است با:

$$\text{حجم}=\frac{1}{3}\,(\text{مساحت قاعده})\times(\text{ارتفاع})=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}3a\times 3a)\times(3a)=\frac{9a^3}{2}$$

۱۵ـ گزینه «۲» با جایگذاری $a=b=0$ در معادله‌ی داده شده داریم $f(0)=(f(0))^2$ پس با توجه به شرط $f(0)\neq 0$ داریم $f(0)=1$. مشتق تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

با توجه به تعریف تابع f داریم:

$$f(x+h)=f(x)f(h)\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}\Rightarrow f'(x)=f(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$

از آنجا که $f(0)=1$ است داریم:

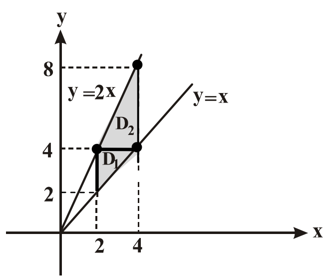
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$$

با جایگزینی این مقدار در $f'(x)$ داریم:

$$f'(x)=f(x)\times f'(0)$$

۱۶ـ گزینه «۴» ابتدا ناحیه D را رسم کرده و ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم.

$$\begin{cases} y=x \\ y=2x \\ 2\le x\le 4 \end{cases} \Rightarrow$$



همان‌طور که دیده می‌شود ناحیه D نسبت به x نامنظم می‌باشد و می‌توان آن را به دو ناحیه منظم D_1 و D_2 تبدیل کرد. برای هر از این ناحیه‌ها کران‌های انتگرال‌گیری به صورت زیر می‌باشد:

$$I=\iint_{D_1}f(x,y)dxdy+\iint_{D_2}f(x,y)dxdy \Rightarrow I=\int_2^4\int_2^y f(x,y)dxdy+\int_4^8\int_{\frac{y}{2}}^4 f(x,y)dxdy$$

۱۷ـ گزینه «۳» حداکثر افزایش تابع f در نقطه p برابر $|\vec{\nabla}f(p)|$ است و در جهت بردار گرادیان رخ می‌دهد. پس با محاسبه‌ی بردار گرادیان داریم:

$$\vec{\nabla}f(x,y,z)=(y+z,x+z,x+y)\Rightarrow\vec{\nabla}f(-3,5,-1)=(4,-4,2)\Rightarrow|\vec{\nabla}f(p)|=\sqrt{16+16+4}=6$$

۱۸ــ گزینه «۴» می‌دانیم که برای $|x|<1$ تساویِ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ برقرار می‌باشد، با مشتق گرفتن از طرفین تساوی، نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{x=\frac{2}{3}} \sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{2}{3})^{n-1} = \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} = 9$$

۱۹ــ گزینه «۴» دو خط داده شده متنافر هستند، بنابراین بردار نرمال صفحه موردنظر برابر است با حاصلضرب خارجی بردارهای هادی دو خط، لذا:

$$L_1: \begin{cases} x=1 \\ y=t+1 \\ z=-t-1 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_1=(0,1,-1) \qquad L_2: \begin{cases} x+2z=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2z+2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{-2}=\frac{z-1}{1} \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_2=(-2,0,1)$$

بنابراین بردار نرمال صفحه برابر است با:

$$\vec{n}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,2,2)$$

بنابراین معادله صفحه برابر است با:

$$x+2y+2z=d$$

خط L_1 از نقطه‌ی $p_1(1,1,-1)$ و خط L_2 از نقطه‌ی $p_2(0,2,1)$ عبور می‌کند. برای اینکه صفحه فوق دارای فاصله مساوی از دو خط باشد باید فاصله آن از دو نقطه p_1 و p_2 روی دو خط یکسان باشد، با یادآوری فرمول فاصله یک صفحه از نقطه‌ی p_0 داریم: لذا:

$$p_0 \text{ فاصله صفحه از نقطه } = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \vec{u}=(a,b,c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 \text{ فاصله صفحه از نقطه } = \frac{|(1\times1)|+(2\times1)+(2\times-1)-d|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|1-d|}{3} \\ p_2 \text{ فاصله صفحه از نقطه } = \frac{|(1\times0)+(2\times2)+(2\times1)-d|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|6-d|}{3} \end{cases}$$

از تساوی دو عبارت فوق داریم:

$$\frac{|1-d|}{3}=\frac{|6-d|}{3} \Rightarrow 1-d=\pm(6-d) \Rightarrow \begin{cases} 1-d=6-d & \text{غ.ق.ق} \\ 1-d=-(6-d) \Rightarrow 1-d=-6+d \Rightarrow d=\frac{7}{2} \end{cases}$$

بنابراین معادله صفحه برابر است با:

$$x+2y+2z=\frac{7}{2}=\frac{63}{18}$$

۲۰ــ گزینه «۱» $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\pm\infty$ پس با استفاده از هم‌ارزی داریم:

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \simeq \frac{1}{x}$$

بنابراین حد داده شده برابر است با:

$$\lim_{x\to0} x^2(\sin\frac{1}{x})\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lim_{x\to0} x^2(\sin\frac{1}{x})\frac{1}{x} = \lim_{x\to0} x(\sin\frac{1}{x}) = 0\times\text{کراندار} = 0$$

۲۱ــ گزینه «۱» ابتدا از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x=3\sin u \Rightarrow dx=3\cos u\,du \;, \begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=3 \Rightarrow u=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

با جای‌گذاری تغییرمتغیر در انتگرال داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos u\,du}{3\sin u+\sqrt{9-9\sin^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u\,du}{\sin u+\cos u}$$

برای حل این انتگرال، طبق متن درس؛ از این نکته استفاده می‌کنیم که در بازه‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ با تبدیل $\sin u$ به $\cos u$ به یکدیگر مقدار I تغییر نمی‌کند:

$$I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sin u+\cos u}du+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{\cos u+\sin u}du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u+\sin u}{\cos u+\sin u}du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}du=\frac{\pi}{2} \Rightarrow I=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$$

۲۲ـ گزینه «۲»

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \sinh \mathrm{Ln}3 = \frac{e^{\mathrm{Ln}3} - e^{-\mathrm{Ln}3}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

با جایگذاری این مقدار در رابطه داده شده داریم:

$$\cos(\pi \sinh \mathrm{Ln}3) = \cos(\pi \times \frac{4}{3}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

۲۳ـ گزینه «۲» طول قوس منحنی پارامتری $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ برابر است با:

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$$

بنابراین برای منحنی داده شده داریم:

$$x'_t(t) = 2\sin t\cos t \times \sin(\frac{\pi}{2}\sin^4 t) = \sin(2t).\sin(\frac{\pi}{2}\sin^4 t)$$

$$y'_t(t) = 2\sin t\cos t \times \cos(\frac{\pi}{2}\sin^4 t) = \sin(2t).\cos(\frac{\pi}{2}\sin^4 t)$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه L داریم:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(2t)\sin^2(\frac{\pi}{2}\sin^4 t) + \sin^2(2t)\cos^2(\frac{\pi}{2}\sin^4 t)}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(2t)[\sin^2(\frac{\pi}{2}\sin^4 t) + \cos^2(\frac{\pi}{2}\sin^4 t)]}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2t|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = -\frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

۲۴ـ گزینه «۳» با استفاده از تعریف حد مجموع ریمانی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{n} = \int_0^1 \sin^2 \pi x\,dx = \int_0^1 \frac{1-\cos 2\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

۲۵ـ گزینه «۴» سری داده شده به دو سری زیر تفکیک می‌شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r^n + \frac{1}{r^n}) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}$$

بنابراین اشتراک مقادیر همگرایی سری‌های سمت راست تساوی جواب مورد نظر می‌باشد، لذا:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \xrightarrow{\text{بازه همگرایی}} |r| < 1 \Rightarrow -1 < r < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n} \xrightarrow{\text{بازه همگرایی}} \frac{1}{|r|} < 1 \Rightarrow |r| > 1 \Rightarrow \begin{cases} r > 1 \\ r < -1 \end{cases}$$

برای اعداد $-1 < r < 1$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ همگرا و سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}$ واگراست پس مجموع آن‌ها واگرا می‌باشد.

برای اعداد $r > 1$ و $r < -1$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ واگرا و سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}$ همگراست پس مجموع آن‌ها واگرا می‌شود.

با توجه به گزینه‌ها نیازی به بررسی $r = 1$ و $r = -1$ نیست و گزینه‌ی (۴) صحیح است.

با این حال در $r = 1$ و $r = -1$ نیز یک سری واگرا به دست می‌آید. زیرا حد جمله‌ی عمومیِ سری $\sum_{n=0}^{\infty}(r^n + \frac{1}{r^n})$ صفر نمی‌شود.

رشته تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳

۱ـ مقدار $\lim\limits_{h\to+\infty}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}e^{x^2-h^2}(x^2+1)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ∞

۲ـ قطر یک گوی یخی $6cm$ است. این قطر با آهنگ $0/5\,cm/h$ در اثر ذوب‌شدن کاهش می‌یابد. حجم گوی با کدام سرعت تغییر می‌کند؟

۱) $-18\pi cm/h$ ۲) $-9\pi cm/h$ ۳) $-6\pi cm/h$ ۴) $-3\pi cm/h$

۳ـ سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$،

۱) واگرا است. ۲) همگرا به ۲ است. ۳) همگرا به $\frac{1}{2}$ است. ۴) همگرا به $\ln\frac{1}{2}$ است.

۴ـ تعداد ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^{13}+7x^3-5=0$ کدام است؟

۱) یک ریشه دارد که مثبت نیز هست. ۲) دو ریشه دارد.
۳) یک ریشه دارد که منفی نیز است. ۴) ریشه ندارد.

۵ـ دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{2-x}}$ کدام است؟

۱) $D_f=[\frac{1}{2},2]$ و $R_f=[0,+\infty)$ ۲) $D_f=(2,+\infty)$ و $R_f=[0,+\infty)$
۳) $D_f=[\frac{1}{2},2]$ و $R_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ ۴) $D_f=[2,+\infty)$ و $R_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

۶ـ اگر θ زاویه بین دو بردار $(1,1,\cdots,1)$ و $(1,2,\cdots,n)$ در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\theta$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۷ـ بردارهای متعامد $\vec{M}$ و $\vec{N}$ با طول واحد در $\mathbb{R}^3$ مفروضند. اگر $\vec{A}$ در شرط $\vec{A}\times\vec{N}=\vec{M}-\vec{A}$ صدق کند، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

۱) $\vec{A}=\vec{M}-(\vec{M}\times\vec{N})$ ۲) $\vec{A}=\vec{M}+(\vec{M}\times\vec{N})$ ۳) $\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{M}+\frac{1}{2}(\vec{M}\times\vec{N})$ ۴) $\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{M}-\frac{1}{2}(\vec{M}\times\vec{N})$

۸ـ برای چه مقادیری از K نمودار تابع $f(x)=x^3-3x^2+K$، در سه نقطه متمایز محور x ها را قطع می‌کند؟

۱) $K>0$ ۲) $K=0,4$ ۳) $0<K<4$ ۴) تمام مقادیر K

۹ـ مقدار $\int_{-\pi/8}^{\pi/8}x^8\sin^9 x\,dx$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) ۱

۱۰ـ فرض کنید تابع دارای مشتق مرتبه‌ی دوم پیوسته در همسایگی x باشد. مقدار $\lim\limits_{h\to\infty}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ کدام است؟

۱) $f'(x)$ ۲) $f''(x)$ ۳) 0 ۴) $\frac{1}{2}f'(x)$

۱۱ـ تابع $f(x)=\begin{cases}e^{2x} & ;\ e^x\le 1\\ \frac{2}{1+e^x} & ;\ e^x>1\end{cases}$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$:

۱) به‌جز $x=0$ پیوسته است. ۲) به‌جز $x=1$ پیوسته است.
۳) به‌جز $x=0$ و $x=1$ پیوسته است. ۴) پیوسته است.

۱۲ـ انتگرال معادل عبارت $\int_1^2\int_x^{x^3}f(x,y)dydx+\int_2^8\int_x^8 f(x,y)dydx$ کدام است؟

۱) $\int_1^8\int_{y^3}^{y}f(x,y)dxdy$ ۲) $\int_1^4\int_{y^{\frac{1}{3}}}^{y}f(x,y)dxdy$ ۳) $\int_1^8\int_{y^{\frac{1}{3}}}^{y}f(x,y)dxdy$ ۴) $\int_1^8\int_{y^2}^{y}f(x,y)dxdy$

۱۳ـ مساحت درون دلوار $\rho = 1+\cos\theta$ و بیرون دایره‌ی $\rho = 1$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{4}$
۲) $1+\frac{\pi}{4}$
۳) $\frac{\pi}{2}+1$
۴) $\frac{\pi}{4}+2$

۱۴ـ کدام گزاره در مورد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ صحیح است؟

۱) برابر ۰ است.
۲) برابر $\frac{1}{2}$ است.
۳) برابر ۱ است.
۴) موجود نیست.

۱۵ـ مساحت آن قسمت از کره‌ی $\rho = 2$ که خارج از استوانه‌ی $r = 1$ قرار دارد، کدام است؟

۱) $4\pi\sqrt{3}$
۲) 12π
۳) 14π
۴) $8\pi\sqrt{3}$

۱۶ـ مقدار $\iint\limits_R \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ که در آن R ناحیه‌ی $\frac{\pi^2}{16} \le x^2+y^2 \le \frac{\pi^2}{9}$ است برابر کدام است؟

۱) $(\sqrt{2}+1)\pi$
۲) $(\sqrt{2}-1)\pi$
۳) $\sqrt{2}\pi$
۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

۱۷ـ مقدار $\iint\limits_S (3xy^2, xe^z, z^3)ds$ که در آن S رویه‌ی محصور به استوانه‌ی $y^2+z^2=1$ و صفحات $x=-1$ و $x=+2$ است برابر است با:

۱) $\frac{9\pi}{4}$
۲) $\frac{9\pi}{2}$
۳) $\frac{3\pi}{2}$
۴) 3π

۱۸ـ اکسترمم تابع $f(x,y,z) = 2x-3y+z-1$ با شرط $x^2+y^2+z^2=14$ برابر است با:

۱) ۱۵ و ۱۳
۲) ۱۵ و -13
۳) ۱۳ و -15
۴) -13 و -15

۱۹ـ اگر صفحات مماس بر دو رویه‌ی $x^2+(y-1)^2+z^2=1$ و $(x-c)^2+y^2+z^2=3$ در هر نقطه برخورد دو رویه بر هم عمود باشند آنگاه:

۱) $C=\pm\sqrt{3}$
۲) $C=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
۳) $C=0$
۴) $C=\pm1$

۲۰ـ تابع $f(x,y)=x^2+4y^2$ مفروض است. معادله‌ی خط مماس بر منحنی تراز $f(x,y)$ در نقطه $(2,1)$ برابر است با:

۱) $x-2y=4$
۲) $x+2y=4$
۳) $-x+2y=4$
۴) $-x-2y=4$

۲۱ـ صفحه‌ی مماس افقی بر رویه‌ی $z=x^2-4xy-2y^2+12x-12y-1$ برابر است با:

۱) $z=-36$
۲) $z=-31$
۳) $z=28$
۴) $z=29$

۲۲ـ مشتق سوئی تابع $f(x,y)=e^{-xy}$ در نقطه‌ی $(1,-1)$ و در امتداد $\theta=\frac{2\pi}{3}$، کدام است؟

۱) $-\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)e$
۲) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}e$
۳) $-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)e$
۴) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}e$

۲۳ـ طول منحنی $\begin{cases} x=\frac{1}{2}(t-\sin t) \\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t \end{cases}$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۸
۳) 4π
۴) 8π

۲۴ـ هرگاه $z=f(u,v)$ تابع مشتق‌پذیری از دو متغیر u و v باشد و $u=x-y$، $v=y-x$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}$ کدام است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) $y-x$
۴) $x-y$

۲۵ـ اگر $x>0$ مقدار عبارت $\int_0^{1/x}\frac{dt}{1+t^2}+\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$
۲) $\frac{\pi}{6}$
۳) $\frac{\pi}{2}$
۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخنامه رشته تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳

۱ـ گزینه «۲» برای سادگی بیشتر؛ ابتدا $e^{-h^۲}$ را از انتگرال خارج می‌کنیم. یعنی می‌نویسیم $e^{x^۲-h^۲}=e^{-h^۲}e^{x^۲}$ و $e^{-h^۲}$ را از انتگرال خارج می‌کنیم چون نسبت به x ثابت است. در ضمن $e^{-h^۲}=\frac{۱}{e^{h^۲}}$ است.

$$\text{جواب}=\lim_{h\to\infty}\frac{\int_۰^h e^{x^۲}(x^۲+۱)dx}{he^{h^۲}}$$

حد داده شده فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ دارد. از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to\infty}\frac{e^{h^۲}(h^۲+۱)}{e^{h^۲}+۲h^۲e^{h^۲}}=\lim_{h\to\infty}\frac{h^۲+۱}{۱+۲h^۲}\simeq\lim_{h\to\infty}\frac{h^۲}{۲h^۲}=\frac{۱}{۲}$$

۲ـ گزینه «۲» فرض کنیم $D(t)$ قطر گوی یخی در لحظه‌ی t باشد و $t_۰$ را لحظه‌ای فرض کنید که قطر گوی یخی $۶cm$ بوده است. اگر $V(t)$ حجم گوی در لحظه t باشد می‌دانیم که $V(t)=\frac{۴}{۳}\pi\left(\frac{D(t)}{۲}\right)^۳=\frac{\pi}{۶}D^۳(t)$. بنابر اطلاعات داده شده در لحظه $t_۰$ داریم $D(t_۰)=۶cm$ و سرعت تغییر $D(t)$ نسبت به زمان یعنی $\frac{dD(t)}{dt}$ در لحظه $t_۰$ برابر است با $-۰/۵\frac{cm}{h}$ به عبارتی $D'(t_۰)=-۰/۵$. حال سرعت تغییر حجم نسبت به زمان یعنی $\frac{dV}{dt}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\frac{dV(t)}{dt}\right|_{t_۰}=V'(t_۰)=\frac{\pi}{۶}۳D^۲(t_۰)D'(t_۰)=\frac{\pi}{۶}(۳)(۶)^۲(-۰/۵)=-۹\pi$$

۳ـ گزینه «۴» با مرتب‌کردن جملات و استفاده از ویژگی‌های لگاریتم؛ خواهیم دید که این سری یک سری تلسکوپی است:

$$\ln\left(\frac{n(n+۲)}{(n+۱)^۲}\right)=\ln(n)+\ln(n+۲)-۲\ln(n+۱)=\ln(n)-\ln(n+۱)+\ln(n+۲)-\ln(n+۱)=\underbrace{\ln\left(\frac{n}{n+۱}\right)}_{A_n}-\underbrace{\ln\left(\frac{n+۱}{n+۲}\right)}_{A_{n+۱}}$$

حالا از فرمول محاسبه‌ی مقدار سری تلسکوپی استفاده می‌کنیم:

$$\text{حاصل سری}=\sum_{n=۱}^{\infty}A_n-A_{n+۱}=A_۱-\lim_{n\to\infty}A_{n+۱}=\ln\left(\frac{۱}{۲}\right)-\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+۱}{n+۲}\right)=\ln\left(\frac{۱}{۲}\right)-\ln(۱)=\ln\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

۴ـ گزینه «۱»

روش اول: چند جمله‌ای $p(x)=x^{۱۳}+۷x^۳-۵$ دارای درجه فرد است. به همین دلیل $\lim_{x\to\infty}p(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}p(x)$ مختلف‌العلامه هستند. بنابراین $p(x)$ حداقل یک ریشه حقیقی دارد. به بیان دقیق‌تر می‌توانیم دو عدد پیدا کنیم که $p(x)$ در آن‌ها تغییر علامت داده باشد. مثلاً $p(۱)=۳>۰$ و $p(۰)=-۵<۰$ از طرفی $p'(x)=۱۳x^{۱۲}+۲۱x^۲$ پس برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $p'(x)\geq۰$ و با دقت بیش‌تر متوجه می‌شویم که $p'(x)$ فقط در $x=۰$ مقدار صفر دارد و برای هر $x\neq۰$ داریم $p'(x)>۰$. بنابراین $p(x)$ تابعی اکیداً صعودی است. هر تابع اکیداً صعودی حداکثر یک ریشه دارد. می‌توان نتیجه گرفت که $p(x)$ یک و فقط یک ریشه حقیقی دارد. در پایان با مقایسه علامت‌های $p(\infty)$ و $p(۰)$ و $p(-\infty)$ متوجه می‌شویم که $p(۰)<۰$ و $p(\infty)>۰$ بنابراین تنها ریشه‌ی $p(x)$ در ناحیه‌ی $۰<x<\infty$ قرار دارد.

روش دوم: اگر تعداد تغییر علامت‌ها در ضرائب $p(x)$ وقتی در فرم استاندارد مرتب شده باشد را k بنامیم تعداد ریشه‌های مثبت k یا $k-۲$ یا $k-۴$ … است. در این مثال داریم $p(x)=x^{۱۳}+۷x^۳-۵$ پس ضرائب عبارتند از $(+۱،+۷،-۵)$ فقط یک‌بار تغییر علامت داریم: $k=۱$ است پس تعداد ریشه‌های مثبت برابر است با یک ریشه.

همین استدلال را برای $p(-x)$ به‌کار می‌گیریم تعداد ریشه‌های منفی معلوم می‌شود. $p(-x)=-x^{۱۳}-۷x^۳-۵$ دنباله ضرائب $(-۱،-۷،-۵)$ است. تغییر علامت نداریم پس ریشه منفی وجود ندارد.

۵ـ گزینه «۱» جدول تعیین علامت را برای کسر $y=\frac{۲x-۱}{۲-x}$ تشکیل دهیم.

	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		۲		$+\infty$
$۲-x$		+		+	۰	−	
$۲x-۱$		−	۰	+		+	
$y=\frac{۲x-۱}{۲-x}$		−		+		−	

فقط در بازه‌ی $(\frac{1}{2},2)$ داریم $y>0$. در $x=2$ مخرج صفر می‌شود پس $x=2$ در دامنه نیست اما در $x=\frac{1}{2}$ داریم $y=0$. به این ترتیب دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{2-x}}$ برابر است با $D_f=[\frac{1}{2},2)$. اکنون به محاسبه‌ی برد می‌پردازیم.

به ازای $x=\frac{1}{2}$ داریم $y=0$ و وقتی‌که $x\to 2^-$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 2^-} y=\lim_{x\to 2^-}\sqrt{\frac{2x-1}{2-x}}=\sqrt{\frac{3}{0^+}}=+\infty$$

بنابراین $0\le y\le +\infty$ است. برد این تابع $R_f=[0,+\infty)$ است.

۶ـ گزینه «۱» فرض کنیم $\vec{A}=(1,1,\cdots,1)$ و $\vec{B}=(1,2,\cdots,n)$ و θ زاویه بین این بردارها باشد. داریم:

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{1^2+1^2+\cdots+1^2}\sqrt{1^2+2^2+\cdots+n^2}}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}$$

هرگاه $n\to\infty$، با استفاده از قانون بزرگ‌ترین درجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\theta)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n)}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{n(n)(2n)}{6}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^2}{\sqrt{\frac{2}{6}n^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\theta=\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{6}$$

۷ـ گزینه «۴»

مطابق گزینه‌ها فرض کنیم برای اعداد حقیقی a و b داشته باشیم اکنون از فرض استفاده کنیم:

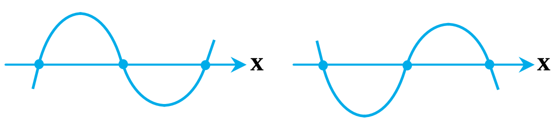
$$A=a\vec{M}+b(\vec{M}\times\vec{N})$$

$$\vec{A}\times\vec{N}=\vec{M}-\vec{A}$$
$$(a\vec{M}+b(\vec{M}\times\vec{N}))\times\vec{N}=\vec{M}-a\vec{M}-b(\vec{M}\times\vec{N})$$
$$a(\vec{M}\times\vec{N})+b(\vec{M}\times\vec{N}))\times\vec{N}=(1-a)\vec{M}-b(\vec{M}\times\vec{N})$$
$$a(\vec{M}\times\vec{N})-b\vec{M}=(1-a)\vec{M}-b(\vec{M}\times\vec{N})$$

و بردارهای $\vec{N}$ و $\vec{M}$ متعامد و یکه هستند پس $(\vec{M}\times\vec{N})\times\vec{N}=-\vec{M}$ بنابراین:

از این تساوی خواهیم داشت $a=-b$ و $-b=1-a$ پس $a=\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{1}{2}$.

۸ـ گزینه «۳» برای آن‌که یک تابع درجه ۳ بتواند سه ریشه متمایز داشته باشد لازم است مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی f مختلف‌العلامه باشند.



ابتدا محل اکسترمم‌های نسبی f را بیابیم:

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$$

پس $x=0$ و $x=2$ طول نقاط بحرانی f هستند. $f(0)=k$ و $f(2)=k-4$ باید داشته باشیم $f(0)f(2)<0$ پس $k(k-4)<0$.

اگر $k>4$ باشد هر دوی آن‌ها مثبت می‌شوند. اگر $k<0$ باشد هر دوی آن‌ها منفی می‌شوند. اما برای $0<k<4$ مقادیر $f(0)$ و $f(2)$ مختلف‌العلامه خواهند بود.

۹ـ گزینه «۴» تابع $f(x)=x^8\sin^9(x)$ تابعی فرد است و کران‌های بالا و پایین انتگرال قرینه یکدیگرند بنابراین حاصل انتگرال صفر خواهد بود.

$$f \text{ فرد است} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

توجه: $y=x^8$ تابعی زوج و $y=\sin^9(x)$ تابعی فرد است. حاصل‌ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد؛ تابعی فرد است.

۱۰ــ گزینه «۲» f تابعی دوبار مشتق‌پذیر است بنابراین تا آن‌جا که این حد از حالت مبهم خارج شود می‌توانیم از هوپیتال استفاده کنیم. متوجه باشید که متغیر مورد نظر ما h است و x را ثابت فرض می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}\ \underset{\text{هوپیتال}}{=}\ \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-0-f'(x-h)}{2h}$$
$$\underset{\text{هوپیتال}}{=}\ \lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)+f''(x-h)}{2}=\frac{f''(x)+f''(x)}{2}=f''(x)$$

۱۱ــ گزینه «۴» نامعادله $e^x\le 1$ معادل است با $\ln(e^x)\le \ln(1)$ به عبارتی $x\le 0$ پس ضابطه تابع f به این صورت است:

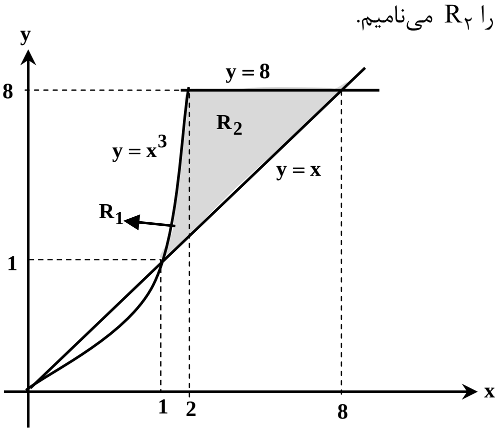
$$f(x)=\begin{cases} e^{2x} & x\le 0\\ \dfrac{2}{1+e^x} & x>0\end{cases}$$

در نواحی $x<0$ و $x>0$ هر کدام از توابع داده شده پیوسته هستند. کافیست پیوستگی در $x=0$ را بررسی کنیم.

$$f(0)=e^0=1$$
$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{1+e^x}=\frac{2}{1+e^0}=1$$
$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}e^{2x}=e^0=1$$

پس f در صفر نیز پیوسته است. به عبارتی f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۲ــ گزینه «۳» با توجه به حدود انتگرال‌های داده شده، خط $y=x$، منحنی $y=x^3$ را رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو نمودار در $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ قرار دارند. در اولین انتگرال داریم $0\le x\le 1$ و حدود y از پایین به بالا به صورت $y=x^3$ و $y=x$ داده شده‌اند. این ناحیه را R_1 می‌نامیم. در انتگرال دوم داریم $2\le x\le 8$ و حدود y به صورت $y=x$ و $y=8$ نوشته شده‌اند که ما این ناحیه را R_2 می‌نامیم.

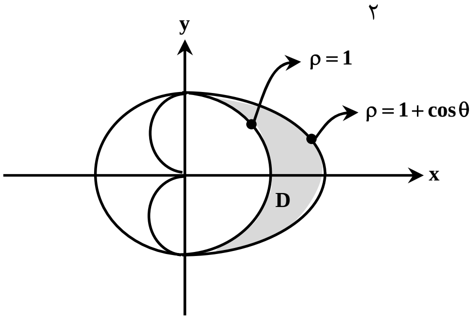


حالا فرض می‌کنیم $R=R_1\cup R_2$ باشد. با ترتیب $dxdy$ حدود انتگرال را می‌نویسیم. کمترین و بیشترین مقدار به صورت $y=1$ و $y=8$ به دست می‌آیند. با حرکت از چپ به راست؛ می‌بینیم که $x=\sqrt[3]{y}$ (یعنی همان $y=x^3$) مرز ورودی و $x=y$ مرز خروجی است.

$$I=\int_1^8\int_{\sqrt[3]{y}}^{y}f(x,y)\,dx\,dy$$

۱۳ــ گزینه «۴» دلوار $\rho=1+\cos\theta$ و دایره‌ی $\rho=1$ در نقاط $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ با یکدیگر برخورد می‌کنند:

$$1=1+\cos\theta\ \Rightarrow\ \cos\theta=0\ \Rightarrow\ \theta=\pm\frac{\pi}{2}$$



در نتیجه مساحت ناحیه‌ی D برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(\rho_1^2-\rho_2^2)\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[(1+\cos\theta)^2-1]\,d\theta$$

با استفاده از زوج بودن زیر انتگرال داریم:

$$S=\frac{1}{2}\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}]\,d\theta=[2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}}=2+\frac{\pi}{4}$$

۱۴ـ گزینه «۴» روش اول: ابتدا دقت کنید که $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$ پس می‌توانیم از هم‌ارزی $\sin xy \simeq xy$ استفاده کنیم. حالا روی مسیر $y = mx$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(mx)x}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

پس حد وجود ندارد زیرا وابسته به m است.

روش دوم: پس از استفاده از هم‌ارزی $\sin xy \simeq xy$ می‌توانیم از مختصات قطبی استفاده کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{r^2}=\cos\theta\sin\theta$$

پس حد وجود ندارد، زیرا جواب آن وابسته به θ است.

۱۵ـ گزینه «۴» مساحت کره‌ای به شعاع ۲ برابر است با $4\pi R^2 = 16\pi$. بهتر است مساحت بخشی از کره را که درون استوانه قرار می‌گیرد از آن کم کنیم. البته می‌دانیم که این سطح دارای دو نیمه‌ی یکسان در نواحی $z>0$ و $z<0$ است. ما مساحت قسمت بالایی را حساب کرده و ۲ برابر می‌کنیم.

از معادله‌ی استوانه‌ای $r=1$ معلوم است که $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1$. در واقع، سایه‌ی S بر صفحه‌ی xoy درون دایره‌ای واحد قرار می‌گیرد. روی سطح کره، با توجه به معادله‌ی $g: x^2+y^2+z^2=4$ داریم:

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dy\,dx \Rightarrow d\sigma=\sqrt{1+(\frac{x}{z})^2+(\frac{y}{z})^2}\,dy\,dx$$

$$d\sigma=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}\,dy\,dx=\sqrt{\frac{4}{z^2}}\,dy\,dx=\frac{2}{z}dy\,dx=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dy\,dx$$

$$\Rightarrow d\sigma=\frac{2}{\sqrt{4-r^2}}r\,dr\,d\theta$$

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}[-2(4-r^2)^{\frac{1}{2}}]_0^1 d\theta=(2\pi)[-2\sqrt{3}+4]=8\pi-4\pi\sqrt{3}$$

این مساحت نیمه‌ی بالایی کره است که درون استوانه قرار دارد. با دو برابر کردن آن مساحت بخشی از کره که درون استوانه است معلوم می‌شود.

$$S_1=2(8\pi-4\pi\sqrt{3})=16\pi-8\pi\sqrt{3}$$

حالا مساحت قسمتی از کره که درون استوانه است معلوم می‌شود:

$$S=\text{مساحت کره}-S_1=16\pi-(16\pi-8\pi\sqrt{3})=8\pi\sqrt{3}$$

۱۶ـ گزینه «۲» به وضوح حل انتگرال در مختصات قطبی ساده‌تر است. در نواری که بین این دو دایره قرار می‌گیرد داریم:

$$0\le\theta\le 2\pi \quad , \quad \frac{\pi}{4}\le r\le\frac{\pi}{3} \Rightarrow I=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin r}{r}r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin r\,dr\,d\theta=(2\pi)[-\cos r]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=(2\pi)[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}]=(\sqrt{2}-1)\pi$$

۱۷ـ گزینه «۲» با توجه به ادبیاتی که در صورت سؤال به کار رفته است، S یک رویه‌ی بسته است که از سطح استوانه و در پوش‌های $x=2$ و $x=-1$ تشکیل می‌شود. پس از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=P_x+Q_y+R_z=3y^2+0+3z^2=3(y^2+z^2)$$

با توجه به معادله‌ی $y^2+z^2=1$ و معادلات $x=-1$ و $x=2$ می‌توانیم در صفحه‌ی yoz از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. به این ترتیب داریم:

$$y^2+z^2=r^2 \;,\; 0\le r\le 1 \;,\; 0\le\theta\le 2\pi \;,\; -1\le x\le 2$$

$$I=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1}^2 3r^2 r\,dx\,dr\,d\theta=(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^1 r^3dr)(\int_{-1}^2 3\,dx)=(2\pi)(\frac{1}{4})(9)=\frac{9\pi}{2}$$

۱۸ـ گزینه «۳» تابع $f=2x-3y+z-1$ و قید $g: x^2+y^2+z^2=14$ را در نظر گرفته و از ضریب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z}\Rightarrow\lambda=\frac{2}{2x}=\frac{-3}{2y}=\frac{1}{2z}\Rightarrow 4y=-6x \;,\; 4z=2x \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x \;,\; z=\frac{1}{2}x$$

با جایگذاری این نتایج در معادله‌ی قید g داریم:

$$x^2+\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{4}x^2=14\Rightarrow\frac{14}{4}x^2=14\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow y=\pm 3\Rightarrow z=\pm 1$$

با جایگذاری این مقادیر در f داریم: $\min f=14-1=13$ و $\max f=14+1=15$.

۱۹ـ گزینه «۱» بردار نرمال صفحه مماس بر هر رویه، در هر نقطه از آن، برابر است با گرادیان آن رویه. رویه‌های داده شده را با f و g نشان می‌دهیم:

$$f = x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f = (2x, 2(y-1), 2z)$$

$$g = (x-c)^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} g = (2(x-C), 2y, 2z)$$

برای آن‌که صفحات مماس بر دو رویه، بر هم عمود باشند، شرط لازم و کافی آن است که بردارهای گرادیان بر هم عمود باشند یعنی:

$$\vec{\nabla} f . \vec{\nabla} g = 0 \Rightarrow 4x(x-C) + 4y(y-1) + 4z^2 = 0 \Rightarrow 4[x^2 + y^2 + z^2 - Cx - y] = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = y + Cx \qquad (1)$$

اکنون به این مطلب دقت می‌کنیم که نقطه‌ی (x, y, z) محل تلاقی رویه‌ای f و g است. از معادلات f و g داریم:

$$\begin{cases} f : x^2 + y^2 + z^2 = 2y \\ y : x^2 + y^2 + z^2 = -2Cx - C^2 + 3 \end{cases}$$

و از معادله‌ی (۱) داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = y + Cx$$

بنابراین به تساوی‌های روبه‌رو می‌رسیم:

$$2y = 2Cx - C^2 + 3 = y + Cx$$

از این تساوی‌ها داریم $(2y = y + Cx \Rightarrow y = Cx)$ در نتیجه:

$$2Cx - C^2 + 3 = 2Cx \Rightarrow C^2 = 3 \Rightarrow C = \pm\sqrt{3}$$

۲۰ـ گزینه «۲» روش اول: ابتدا دقت کنید که با جایگذاری $(x_0, y_0) = (2, 1)$ در معادله‌ی $z = x^2 + 4y^2$ داریم $z = 4 + 4 = 8$ پس منحنی تراز این نقطه، همان منحنی $x^2 + 4y^2 = 8$ است. معادله‌ی خط مماس بر منحنی در این نقطه را می‌نویسیم:

$$\text{شیب} = m = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{8y} = -\frac{2 \times 2}{8 \times 1} = -\frac{1}{2}$$

معادله خط مماس:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow x + 2y = 4$$

روش دوم: خط مماس باید از نقطه‌ی تماس یعنی از $(2, 1)$ عبور کند و فقط گزینه‌ی (۲) از این نقطه می‌گذرد.

۲۱ـ گزینه «۲» می‌دانیم که بردار نرمال صفحه مماس در هر نقطه از رویه، برابر با بردار گرادیان است. اگر می‌خواهیم صفحه مماس، صفحه‌ای افقی باشد، باید بردار نرمال آن به صورت $\vec{n} = (0, 0, c)$ است که $c \neq 0$. به عبارتی باید داشته باشیم:

$$\vec{\nabla} f = (0, 0, c) \Rightarrow f_x = 0 \ , \ f_y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 12 = 0 \\ -4x - 4y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x + 24 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow y = 1$$

با جایگذاری این مقادیر در z داریم:

$$z = 16 + 16 - 2 - 48 - 12 - 1 = -31$$

یک صفحه‌ی مماس افقی به معادله‌ی $z = -31$ وجود دارد.

۲۲ـ گزینه «۳» برداری که در امتداد زاویه‌ی $\theta = \frac{2\pi}{3}$ قرار دارد و یکه هم هست به این صورت نوشته می‌شود:

$$\vec{A} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \Rightarrow \vec{A} = \cos(\frac{2\pi}{3})\vec{i} + \sin(\frac{2\pi}{3})\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

بردار گرادیان f را هم در نقطه‌ی $(1, -1)$ تعیین می‌کنیم:

$$\vec{\nabla} f = (-ye^{-xy}, -xe^{-xy}) = (e, -e) \Rightarrow \vec{\nabla} f = e\vec{i} - e\vec{j}$$

بنابراین مشتق سوئی در این جهت برابر است با:

$$D_{\vec{A}} f = \frac{\vec{\nabla} f . \vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{-\frac{1}{2}e - \frac{\sqrt{3}}{2}e}{1} = -\frac{1}{2}e(1 + \sqrt{3})$$

۲۳ـ گزینه «۱» طول منحنی پارامتری در بازه‌ی $0 \le t \le 2\pi$ برابر است با:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt \Rightarrow L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[\frac{1}{2}(1-\cos t)]^2 + (\frac{1}{2}\sin t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4}(\cos^2 t + \sin^2 t + 1 - 2\cos t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4}(2 - 2\cos t)}\, dt$$

حالا از فرمول مثلثاتی $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$ استفاده می‌کنیم.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2}{4}(2\sin^2 \frac{t}{2})}\, dt = \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = [-2\cos\frac{t}{2}]_0^{2\pi} = 2 + 2 = 4$$

۲۴ــ گزینه «۱» طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = z_u(1) + z_v(-1) = z_u - z_v \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = z_u(-1) + z_v(1) = -z_u + z_v \end{cases}$$

با جمع‌کردن این دو معادله خواهیم داشت:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

۲۵ــ گزینه «۳» در انتگرال $\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$ اگر تغییر متغیر $u = \frac{1}{t}$ را انجام دهیم خواهیم داشت:

$$u = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{u} \Rightarrow dt = -\frac{du}{u^2}$$

در ضمن به ازای $t \to 0^+$ داریم $u \to +\infty$ و به ازای $t = \frac{1}{x}$ داریم $u = x$.

$$I = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_\infty^x \frac{-\frac{du}{u^2}}{1+\frac{1}{u^2}} = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} - \int_\infty^x \frac{du}{1+u^2} = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_x^\infty \frac{du}{1+u^2} = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = tg^{-1}(t)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

توجه کنید که انتگرال $\int_x^\infty \frac{du}{1+u^2}$ با انتگرال $\int_x^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ تفاوتی ندارد.

رشته تاریخ و فلسفه علم ــ سراسری ۹۴

۱ــ مقدار $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \dfrac{4-x^2}{y+2}$ **کدام است؟**

۱) -4　۲) 0　۳) 1　۴) وجود ندارد.

۲ــ بازه همگرایی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^n$ **کدام است؟**

۱) $(\frac{1}{2}, +\infty)$　۲) $[\frac{1}{2}, +\infty)$　۳) $(0, +\infty)$　۴) $[1, +\infty)$

۳ــ ریشه‌های معادلهٔ $(z+1)^5 + z^5 = 0$ **که در آن** $z = x + iy$ **روی کدام خط قرار دارند؟**

۱) $x = \frac{1}{5}$　۲) $x = \frac{1}{2}$　۳) $x = -\frac{1}{5}$　۴) $x = -\frac{1}{2}$

۴ــ صفحهٔ مماس بر سطح $z = x^3y^2$ **در کدام نقاط** (x,y) **بر خط** $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$ **عمود است؟**

۱) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$　۲) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

۳) $(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\sqrt{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$　۴) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$

۵ــ فرض کنید f **در همسایگی** a **تعریف شده و** f'' **در** a **پیوسته باشد. در این صورت مقدار** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}f''(a)$　۲) $f''(a)$　۳) $2f''(a)$　۴) موجود نیست.

۶ـ طول منحنی $\vec{r}(t)=(\frac{t}{\sqrt{2}})\vec{i}+(\frac{t^3}{6}+\frac{1}{2t})\vec{j}-(\frac{t}{\sqrt{2}})\vec{k}$ در بازهٔ $[1,2]$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{6}$　۲) $\frac{11}{6}$　۳) $\frac{4}{3}$　۴) $\frac{17}{12}$

۷ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی $x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{3}{4}}=2$ در نقطه $(1,1)$ کدام است؟

۱) $x+3y=4$　۲) $x-3y=-2$　۳) $-x+3y=2$　۴) $3x+y=4$

۸ـ مقدار $\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{\sin(tx)}{x^3}dt$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$　۲) 1　۳) $\frac{3}{2}$　۴) 2

۹ـ مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $y=1+\cos x$ حول محور x ها بر بازهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟

۱) $\int_0^{\pi}\pi(1+\cos x)\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$　۲) $\int_0^{\pi}2\pi(1+\cos x)\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$

۳) $\int_0^{\pi}2\pi x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$　۴) $\int_0^{\pi}2\pi x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$

۱۰ـ به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x}} & ; \quad 0<x\le\frac{\pi}{2}\\ a & ; \quad x=0\end{cases}$ در صفر پیوستگی راست دارد؟

۱) 0　۲) 1　۳) $\frac{1}{e}$　۴) e

۱۱ـ مقدار $\oiint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma$ کدام است که در آن $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+2y\vec{j}+4z^2\vec{k}$ و S سطح کل استوانهٔ $x^2+y^2\le 4$ و $0\le z\le 2$ و n بردار قائم یکه رو به خارج سطح می‌باشد.

۱) 80π　۲) $40\pi^2$　۳) $32\pi^2$　۴) 8π

۱۲ـ مقدار $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin x}\,dx$ کدام است؟

۱) $2(\sqrt{2}-1)$　۲) $2(\sqrt{2}+1)$　۳) $2\sqrt{2}$　۴) $\sqrt{2}+1$

۱۳ـ به ازای چه مقادیری از a و b ماکسیمم موضعی تابع $f(x)=\frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ در نقطه $x=2$ مساوی -1 است؟

۱) $a=1\ ,\ b=1$　۲) $a=-1\ ,\ b=0$　۳) $a=1\ ,\ b=0$　۴) $a=0\ ,\ b=1$

۱۴ـ مقدار سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n(n-1)}$ کدام است؟

۱) 1　۲) $\frac{2}{3}$　۳) $\frac{1}{2}$　۴) $\frac{1}{3}$

۱۵ـ f تابعی دوبار مشتق‌پذیر است که $f'(1)=1$ و $\int_0^1(f'(x)-xf''(x))dx=1$. مقدار $f(1)-f(0)$ کدام است؟

۱) 1　۲) 2　۳) $\frac{1}{2}$　۴) 0

۱۶ـ مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$　۲) $\frac{1}{12}$　۳) $\frac{5}{12}$　۴) $\frac{7}{12}$

۱۷ــ مقدار $\tanh(\ln x)$ که در آن $x>0$، کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ ۴) $\frac{x^2}{x^2+1}$

۱۸ــ ضریب x^4 در بسط مک لورن $\sin(e^x-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{24}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{5}{24}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

۱۹ــ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n e^{-\frac{1}{n}}\tanh n$ کدام است؟

۱) -1 ۲) وجود ندارد. ۳) 1 ۴) 0

۲۰ــ اگر $z=e^{\frac{2\pi i}{5}}$، حاصل $1+z+z^2+z^3+5z^4+4z^5+4z^6+4z^7+4z^8+5z^9$ کدام است؟

۱) $4e^{\frac{3\pi i}{5}}$ ۲) $-5e^{\frac{3\pi i}{5}}$ ۳) $-4e^{\frac{2\pi i}{5}}$ ۴) $5e^{\frac{4\pi i}{5}}$

۲۱ــ مقدار $\oint_C xydx+(x-y)dy$ کدام است که در آن C مرز ناحیهٔ $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1\ ,\ 1\le y\le 3\}$ در جهت مثلثاتی است؟

۱) 4 ۲) 3 ۳) 2 ۴) 1

۲۲ــ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec x}\right)$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 0 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۲۳ــ حجم جسم D محدود به صفحهٔ $y+z=4$ و رویه $y=x^2$ در $\frac{1}{8}$ اول فضا کدام است؟

۱) $\frac{128}{15}$ ۲) $\frac{134}{11}$ ۳) $\frac{106}{15}$ ۴) $\frac{77}{15}$

۲۴ــ انتگرال $\int_1^4\int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,dy\,dx$ کدام است؟

۱) $\int_0^1\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$

۲) $\int_1^2\int_{y^2}^4 f(x,y)\,dx\,dy$

۳) $\int_0^1\int_1^4 f(x,y)\,dx\,dy+\int_1^2\int_{y^2}^4 f(x,y)\,dx\,dy$

۴) $\int_1^2\int_1^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$

۲۵ــ اگر $f(x,y)=\frac{2x+y}{y-2x}$ و $x=2t-3s$ و $y=t+2s$ مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$ در $t=2$ و $s=1$ کدام است؟

۱) 112 ۲) 114 ۳) 116 ۴) 118

پاسخنامه رشته تاریخ و فلسفه علم ــ سراسری ۹۴

۱ــ گزینه «۴» از دو مسیر مختلف حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)}\frac{4-x^2}{y+2}=\lim\limits_{y\to-2}\frac{4-2^2}{y+2}=\lim\limits_{y\to-2}\frac{0}{y+2}=0 & x=2 \text{ مسیر}\\[2ex] \lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)}\frac{4-x^2}{y+2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(2-x)(2+x)}{-x+2}=\lim\limits_{x\to2}(2+x)=2+2=4 & y=-x \text{ مسیر}\end{cases}$$

می‌دانیم که حد در صورت وجود یکتاست، بنابراین چون از دو مسیر مختلف دو جواب متفاوت برای حد به‌دست آوردیم، نتیجه می‌گیریم که حد وجود ندارد.

۲ـ گزینه «۲» یک سری تابعی داده شده است. با استفاده از آزمون ریشه برای سری‌ها داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left|\frac{x-1}{x}\right|^n}=\left|\frac{x-1}{x}\right|<1\xrightarrow{x\neq 0}|x-1|<|x|\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان ۲}}x^2-2x+1<x^2\Rightarrow 2x>1\Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

حالا کافیست که همگرایی سری داده شده در $x=\frac{1}{2}$ را بررسی کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

یک سری متناوب همگرا به دست آمد، پس $x=\frac{1}{2}$ متعلق به بازهٔ همگرایی است. در نتیجه بازهٔ همگرایی این سری $[\frac{1}{2},+\infty)$ است.

نکته: از آزمون نسبت هم می‌توان برای تعیین بازهٔ همگرایی این سری تابعی استفاده نمود.

◆ ◆ ◆ ◆

۳ـ گزینه «۴» از معادله‌ی $(z+1)^5+z^5=0$ معلوم است که $(z+1)^5=-z^5$. پس: $|z+1|^5=|-z|^5$.

با فرض $z=x+iy$ خواهیم داشت:

$$|z+1|=|z|\Rightarrow\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow(x+1)^2+y^2=x^2+y^2\Rightarrow(x+1)^2=x^2\Rightarrow x^2+2x+1=x^2\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

پس همه‌ی جواب‌های این معادله روی خط $x=-\frac{1}{2}$ قرار دارند.

◆ ◆ ◆ ◆

۴ـ گزینه «۳» از آنجا که صفحهٔ مماس بر خط داده شده عمود است، پس بردار نرمال صفحهٔ مماس با بردار هادی خط داده شده موازی است:

بردار نرمال صفحهٔ مماس: $z=x^3y^2\Rightarrow f(x,y,z)=x^3y^2-z\Rightarrow\vec{n}=(f_x,f_y,f_z)=(3x^2y^2,2x^3y,-1)$

بردار هادی خط: $\vec{a}=(-3,4,1)$

چون $\vec{a}$ با $\vec{n}$ موازی است، پس داریم:

$$\frac{3x^2y^2}{-3}=\frac{2x^3y}{4}=\frac{-1}{1}$$

$$\Rightarrow -x^2y^2=-1\ ,\ \frac{1}{2}x^3y=-1\Rightarrow x^2y^2=1\ ,\ x^3y=-2\Rightarrow y=\frac{-2}{x^3}\ ,\ x^2y^2=1$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{-2}{x^3}\right)^2=1\Rightarrow\frac{4}{x^4}=1\Rightarrow x^4=4\Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{4}=\pm\sqrt{2}$$

$$\begin{cases}\text{if}\ \ x=\sqrt{2}\Rightarrow y=\dfrac{-2}{(\sqrt{2})^3}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\\[2ex]\text{if}\ \ x=-\sqrt{2}\Rightarrow y=\dfrac{-2}{(-\sqrt{2})^3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\left(\sqrt{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\ ,\ \left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵ـ گزینه «۲» با دو بار استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}\overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}=\frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}=\frac{f''(a)+f''(a)}{2}=f''(a)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶ـ گزینه «۴» با توجه به فرمول طول قوس برای یک منحنی برداری داریم:

$$\vec{r}(t):\begin{cases}x(t)=\dfrac{t}{\sqrt{2}}\\[2ex]y(t)=\dfrac{t^3}{6}+\dfrac{1}{2t}\\[2ex]z(t)=\dfrac{-t}{\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\[2ex]y'(t)=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2t^2}\\[2ex]z'(t)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$L=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt \Rightarrow L=\int_1^2\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2t^2})^2+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^2}\,dt$$

$$\Rightarrow L=\int_1^2\sqrt{\frac{t^4}{4}+\frac{1}{4t^4}+\frac{1}{2}}\,dt=\int_1^2\sqrt{(\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2t^2})^2}\,dt=\int_1^2(\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2t^2})dt=(\frac{t^3}{6}-\frac{1}{2t})\Big|_1^2=(\frac{8}{6}-\frac{1}{4})-(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})=\frac{7}{6}+\frac{1}{4}=\frac{17}{12}$$

۷ـ گزینه «۱» با استفاده از مشتق تابع ضمنی داریم:

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}y^{-\frac{1}{4}}}=\frac{-1}{3}\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}\xrightarrow[y=1]{x=1} m=\frac{-1}{3}$$ شیب خط مماس

بنابراین معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $(1,1)$ به این صورت است:

$$y-1=\frac{-1}{3}(x-1) \Rightarrow x+3y=4$$

۸ـ گزینه «۳» انتگرال نسبت به t گرفته می‌شود پس می‌توانیم x^3 را از انتگرال خارج کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_x^{2x}\sin(tx)\,dt$$

حالا با توجه به آن‌که محاسبه‌ی این انتگرال ساده است بهتر است به جای استفاده از مشتق انتگرال، حاصل آن را مستقیماً به دست آورده و سپس حد را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\Big[\frac{-\cos(tx)}{x}\Big]_x^{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2-\cos 2x^2}{x^4}\simeq\lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^4}{2!})-(1-\frac{4x^4}{2!})}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^4}{x^4}=\frac{3}{2}$$

۹ـ گزینه «۲» ابتدا منحنی $y=1+\cos x$ را به فرم پارامتری می‌نویسیم:

$$C:\begin{cases}x=t\\ y=1+\cos t\end{cases};\quad t\in[0,\pi]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=1\\ y'(t)=-\sin t\end{cases}\Rightarrow A=2\pi\int_0^\pi(1+\cos t)\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$$

یادآوری: مساحت سطح حاصل از دوران حول محور xها برابر است با:

$$A=2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

۱۰ـ گزینه «۲» تابع f در $x=0$ پیوستگی راست دارد هرگاه $\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$، بنابراین باید داشته باشیم:

$$a=f(0)=\lim_{x\to 0^+}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x}}=1^\infty$$

با استفاده از هم‌ارزی $\sin x$ مقدار حد را حساب می‌کنیم:

$$a=\lim_{x\to 0^+}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}(\frac{x-\frac{1}{6}x^3}{x})=\lim_{x\to 0^+}(\frac{x-\frac{1}{6}x^3}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}(1-\frac{x^2}{6})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{6}}=\lim_{x\to 0^+}e^{-\frac{x}{6}}=e^0=1$$

۱۱ـ گزینه «۱» مطابق با صورت سؤال S تمام سطح اطراف یک ناحیه است. بنابراین S یک سطح بسته است. با استفاده از قضیهٔ دیورژانس داریم:

$$\vec F=F_1\vec i+F_2\vec j+F_3\vec k$$

$$I=\iint_S\vec F.\vec n\,d\sigma=\iiint_T\mathrm{div}\vec F dv=\iiint_T(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z})dv=\iiint_T(2x+2+8z)dv$$

انتگرال را در دستگاه استوانه‌ای حل می‌کنیم:

$$I=\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^2(2r\cos\theta+2+8z)r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$=\int_0^2\int_0^{2\pi}(\frac{16}{3}\cos\theta+4+16z)d\theta\,dz=2\pi\int_0^2(4+16z)dz=2\pi(4z+8z^2)\Big|_0^2=2\pi(8+32)-0=80\pi$$

۱۲ـ گزینه «۱» با ضرب و تقسیم در مزدوج $\sqrt{1-\sin x}$ داریم:

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin x}\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\sin x}\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sqrt{1+\sin x}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos^2 x}}{\sqrt{1+\sin x}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $\begin{cases}1+\sin x=u\\ \cos x dx=du\end{cases}$ داریم:

$$I=2\sqrt{1+\sin x}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{1+\sin\frac{\pi}{2}}-2\sqrt{1+\sin(0)}=2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)$$

۱۳ـ گزینه «۳» بنا بر توضیحات سؤال $f(2)=-1$ و $f'(2)=0$، با اعمال این شرایط داریم:

$$\begin{cases}f(2)=-1\Rightarrow \dfrac{a(2)+b}{(2-1)(2-4)}=-1\Rightarrow 2a+b=2 \qquad (*)\\ f'(2)=0\Rightarrow f'(x)=\dfrac{a(x-1)(x-4)-(2x-5)(ax+b)}{(x-1)^2(x-4)^2}\Rightarrow a(2-1)(2-4)-(2(2)-5)(2a+b)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow -2a+2a+b=0\Rightarrow b=0\overset{(*)}{\Rightarrow} 2a+0=2\Rightarrow a=1$$

۱۴ـ گزینه «۴» به کمک تجزیه کسرها و با توجه به قاعدهٔ محاسبهٔ سری‌های تلسکوپی داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n(n-1)}=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2-1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}(1-0)=\frac{1}{3}$$

۱۵ـ گزینه «۱» با توجه به خاصیت خطی بودن انتگرال داریم:

$$\int_0^1(f'(x)-xf''(x))dx=\int_0^1 f'(x)dx-\int_0^1 xf''(x)dx=f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf''(x)dx=f(1)-f(0)-\int_0^1 xf''(x)dx$$

برای محاسبهٔ $\int_0^1 xf''(x)dx$ از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=u\Rightarrow du=dx\\ f''(x)dx=dv\Rightarrow v=f'(x)\end{cases}\Rightarrow \int xf''(x)dx=xf'(x)-\int f'(x)dx=xf'(x)-f(x)$$

$$\int_0^1 xf''(x)dx=xf'(x)-f(x)\Big|_0^1=f'(1)-f(1)-(0-f(0))=f'(1)-(f(1)-f(0))$$

$$\Rightarrow 1=\int_0^1(f'(x)-xf''(x))dx=f(1)-f(0)-f'(1)+(f(1)-f(0))\Rightarrow 2(f(1)-f(0))-1=1\Rightarrow f(1)-f(0)=1$$

۱۶ـ گزینه «۳» تابع زیر انتگرال را به این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}=\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\times\frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{1}{\cos^2 x}=tg^3x\sec^2x\sec^2x$$

حالا از این مطلب استفاده می‌کنیم که $\sec^2x$ مشتقِ tgx است. همچنین $\sec^2x=1+tg^2x$:

$$(u=tgx,du=\sec^2x\,dx)\Rightarrow \int tg^3x(1+tg^2x)\sec^2x\,dx=\int(tg^3x+tg^5x)\sec^2x\,dx=\int(u^3+u^5)du=\frac{u^4}{4}+\frac{u^6}{6}+c=\frac{1}{4}tg^4x+\frac{1}{6}tg^6x+c$$

با جایگذاری حدود انتگرال معین داریم:

$$I=\left[\frac{1}{4}tg^4x+\frac{1}{6}tg^6x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

۱۷ــ گزینه «۳» با توجه به تعاریف $\sinh t$ و $\cosh t$ داریم:

$$\begin{cases} \sinh(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{۲} \Rightarrow \sinh(Lnx)=\dfrac{e^{Lnx}-e^{-Lnx}}{۲}=\dfrac{x-\frac{۱}{x}}{۲} \\ \cosh(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{۲} \Rightarrow \cosh(Lnx)=\dfrac{e^{Lnx}+e^{-Lnx}}{۲}=\dfrac{x+\frac{۱}{x}}{۲} \end{cases}$$

حال با توجه به تعریف $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ داریم:

$$\Rightarrow \tanh(Lnx)=\frac{\sinh(Lnx)}{\cosh(Lnx)}=\frac{\frac{x-\frac{۱}{x}}{۲}}{\frac{x+\frac{۱}{x}}{۲}}=\frac{x-\frac{۱}{x}}{x+\frac{۱}{x}}=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$$

۱۸ــ گزینه «۳» ضریب $x^۴$ در بسط مک‌لورن $f(x)$ برابر است با $\dfrac{f^{(۴)}(۰)}{۴!}$ پس کافیست مشتق چهارم f را در $x=۰$ محاسبه کنیم می‌دانیم که $(e^x)'=e^x$ و $(\sin u)'=u'\cos u$، بنابراین داریم:

$$f(x)=\sin(e^x-۱)$$

$$f'(x)=e^x\cos(e^x-۱)$$

$$f''(x)=e^x\cos(e^x-۱)-e^{۲x}\sin(e^x-۱) \Rightarrow f'''(x)=(e^x-e^{۳x})\cos(e^x-۱)-۳e^{۲x}\sin(e^x-۱)$$

$$f^{(۴)}(x)=(e^x-۳e^{۳x})\cos(e^x-۱)-e^x(e^x-e^{۳x})\sin(e^{۳x}-۱)-۶e^{۲x}\sin(e^x-۱)-۳e^{۳x}\cos(e^x-۱) \Rightarrow f^{(۴)}(۰)=-۵$$

$$f(x)=f(۰)+f'(۰)x+\frac{f''(۰)}{۲!}x^۲+\frac{f'''(۰)}{۳!}x^۳+\frac{f^{(۴)}(۰)}{۴!}x^۴+\cdots$$

ضریب $x^۴$ برابر است با:

$$\frac{f^{(۴)}(۰)}{۴!}=\frac{-۵}{۴!}=\frac{-۵}{۲۴}$$

۱۹ــ گزینه «۲» ابتدا حدود $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{۱}{n}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\tanh(n)$ را به‌طور جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{۱}{n}}=e^۰=۱ \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\tanh(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sinh(n)}{\cosh(n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^n-۰}{e^n+۰}=۱ \end{cases}$$

با درنظر گرفتن مقادیر فوق، مقدار حد داده شده برابر است با:

$$\lim_{n\to+\infty}(-۱)^n e^{-\frac{۱}{n}}\tanh(n)=\lim_{n\to+\infty}(-۱)^n$$ وجود ندارد:

۲۰ــ گزینه «۲» می‌دانیم که $۱+z+z^۲+\cdots+z^n=\dfrac{۱-z^{n+۱}}{۱-z}$، از طرفی $z=e^{\frac{۲\pi i}{۵}} \Rightarrow z^۵=e^{۲\pi i}=\cos۲\pi+i\sin۲\pi=۱$،

در نتیجه با بازنویسی عبارت داده شده به صورت زیر داریم:

$$(۱+z+z^۲+z^۳+z^۴)+۴z^۴(۱+z+z^۲+z^۳+z^۴)+۵z^۹=\frac{۱-z^۵}{۱-z}+۴z^۴(\frac{۱-z^۵}{۱-z})+۵z^۹$$

$$=\frac{۱-۱}{۱-z}+۴z^۴(\frac{۱-۱}{۱-z})+۵z^۵z^۴=۵(۱)z^۴=۵z^۴=۵e^{\frac{۸\pi i}{۵}}=۵e^{(\pi+\frac{۳\pi}{۵})i}=-۵e^{\frac{۳\pi i}{۵}}$$

توجه کنید که $e^{i\pi}=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-۱$ است.

۲۱ــ گزینه «۴» C یک مرز بسته است و شرایط قضیهٔ گرین برقرار است و از قضیهٔ گرین می‌دانیم که $\oint_C Pdx+Qdy=\iint_R(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA$، در نتیجه داریم:

$$\oint_C xydx+(x-y)dy=\int_1^3\int_0^1(\frac{\partial(x-y)}{\partial x}-\frac{\partial(xy)}{\partial y})dx\,dy=\int_1^3\int_0^1(1-x)dx\,dy$$

$$=\int_1^3(x-\frac{x^2}{2})\Big|_0^1 dy=\frac{1}{2}\int_1^3 dy=\frac{1}{2}y\Big|_1^3=\frac{1}{2}(3-1)=1$$

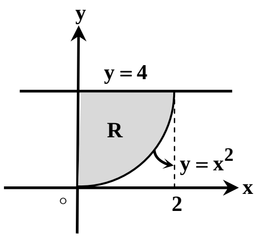
۲۲ــ گزینه «۳» ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم تا حد به صورت یک کسر نوشته شود. چون $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ پس:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec x})=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x^2})=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

با استفاده از هم‌ارزی $\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}$ وقتی $x\to 0$ داریم:

$$\text{مقدار حد}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$$

۲۳ــ گزینه «۱» طبق فرمول حجم داریم: $V=\iiint_D dz\,dy\,dx$



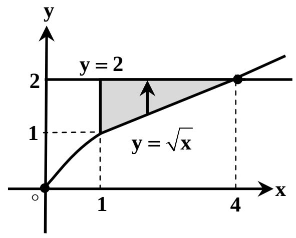
از صورت سؤال، حدود z عبارتند از $z=0$ و $z=4-y$.

در صفحهٔ xoy ناحیه‌ی محدود به محورهای مختصات و سهمی $y=x^2$ و خط $y=4$ را داریم.

(از برخورددادن $z=0$ و $z=4-y$ به معادلهٔ $y=4$ می‌رسیم.) این ناحیه را R می‌نامیم. مطابق شکل در ناحیه‌ی R داریم: $0\le x\le 2$ و $x^2\le y\le 4$. حالا انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

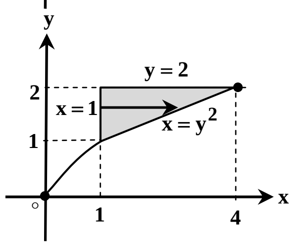
$$V=\int_0^2\int_{x^2}^4\int_0^{4-y}dzdydx=\int_0^2\int_{x^2}^4(4-y)dy\,dx=\int_0^2(4y-\frac{y^2}{2})\Big|_{x^2}^4dx=\int_0^2(8-4x^2+\frac{x^4}{2})dx=8x-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\Big|_0^2=\frac{128}{15}$$

۲۴ــ گزینه «۴» ابتدا ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم. ناحیه‌ی مورد نظر بالاتر از منحنی $y=\sqrt{x}$ و زیرخط $y=2$ قرار دارد و در این ناحیه $1\le x\le 4$ است.



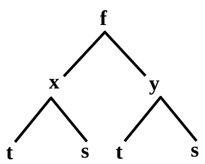
$$\begin{cases}\sqrt{x}\le y\le 2\\ 1\le x\le 4\end{cases}$$

طول و عرض نقاط گوشه‌ای را مشخص می‌کنیم. مثلاً $y=\sqrt{x}$ و $y=2$ در $x=4$ با هم برخورد می‌کنند. حالا با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری خواهیم داشت:



$$\begin{cases}1\le x\le y^2\\ 1\le y\le 2\end{cases}\Rightarrow\int_1^4\int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)dy\,dx=\int_1^2\int_1^{y^2}f(x,y)dx\,dy$$

۲۵ــ گزینه «۱» ابتدا با استفاده از قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای $\frac{\partial f}{\partial s}$ را حساب می‌کنیم:



$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{4y}{(y-2x)^2}(-3)+\frac{-4x}{(y-2x)^2}(2)$$

با جایگذاری $x=2t-3s$ و $y=t+2s$ در رابطهٔ فوق داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{-28t}{(8s-3t)^2}$$

حالا با مشتق‌گیری دوباره نسبت به s خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}=(\frac{-28t}{(8s-3t)^2})'=\frac{0-2(8)(8s-3t)(-28t)}{(8s-3t)^4}=\frac{2(8)(28t)}{(8s-3t)^3}\Big|_{t=2\,,\,s=1}=112$$

رشته عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۱

۱ـ حاصل عبارت روبرو کدام است؟ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{۲}(\sinh^{-۱} x-\ln x-\ln ۲)$

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲ـ فرض کنید $f(x)=\sinh x$. مقدار $\frac{d}{dx}f^{-۱}(\sqrt{۳})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳ـ اگر عدد مختلط $\frac{۳+۲i\sin\theta}{۱-۲i\sin\theta}$ فاقد جزء حقیقی باشد، θ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۴ـ حاصل انتگرال روبرو کدام است؟ $\int(\sec^{۲} x)(\csc^{۲} x)dx$

۱) $tgx-cotgx+c$ ۲) $tgx+cotgx+c$ ۳) $tg^{۲}x-cotg^{۲}x+c$ ۴) $tg^{۲}+cotg^{۲}x+c$

۵ـ حاصل انتگرال روبرو کدام است؟ $\int_{-۴}^{-۵} e^{(x+۵)^{۲}}dx+۳\int_{\frac{۱}{۳}}^{\frac{۲}{۳}} e^{۹(x-\frac{۲}{۳})^{۲}}dx$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{\pi}$ ۴) e

۶ـ همگرایی یا واگرایی سری‌های $S_{۱}=\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(\frac{n-۱}{n+۱})^{n(n+۱)}$ و $S_{۲}=\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ کدام است؟

۱) هر دو همگرا هستند. ۲) هر دو واگرا هستند. ۳) $S_{۱}$ همگرا و $S_{۲}$ واگرا است. ۴) $S_{۱}$ واگرا و $S_{۲}$ همگرا است.

۷ـ طول منحنی $\ln(\frac{۱}{۱-x^{۲}})$ از $x=۰$ تا $x=\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) $\ln ۳-\frac{۱}{۲}$ ۲) $۲\ln ۳-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\ln\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}$ ۴) $۲\ln\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}$

۸ـ مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)=(\frac{x}{y})^{z}$ در نقطه $(۱,۱,۱)$ و در جهت $(۲,۱,-۱)$ برابر است با:

۱) $-\frac{۲}{\sqrt{۶}}$ ۲) $-\frac{۱}{\sqrt{۶}}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۶}}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۶}}$

۹ـ اگر $u=tg^{-۱}\frac{x^{۳}+y^{۳}}{x-y}$ باشد، در این صورت حاصل عبارت روبرو کدام است؟ $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$

۱) $۲tgu$ ۲) $۲\sin u$ ۳) $tg۲u$ ۴) $\sin ۲u$

۱۰ـ حاصل انتگرال $\iiint\limits_{D} e^{\sqrt{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{۳}}}dx\,dy\,dz$ که در آن D ناحیه تعریف شده در $۱\le x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\le ۴$ و $z>۰$ است، کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۳}(e^{۶}-e)$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}(e^{۶}-e)$ ۳) $\frac{\pi}{۳}(e^{۸}-e)$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳}(e^{۸}-e)$

۱۱ـ مساحت عرقچینی که صفحه $z=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ از بالای کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ جدا می‌کند برابر است با:

۱) $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $۲\pi\sqrt{۲}$ ۳) $\pi(۲-\sqrt{۲})$ ۴) $\pi(\sqrt{۲}+۲)$

۱۲ـ شار برونسوی میدان نیروی $\vec{F}=(x+\sin y^{۲})\vec{i}+(y+\sin x^{۲})\vec{j}+z\vec{k}$ گذرنده از مرز ناحیه D که در آن D رویه توپُر $x^{۲}+۴y^{۲}+۴z^{۲}\le ۴$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۲) ۲π ۳) ۴π ۴) ۸π

۱۳ـ برای آن که $\int \vec{F}.d\vec{r}$ بین هر دو نقطه A و B مستقل از مسیر باشد؛ $\phi(z)$ را به دست آورید.

$$\vec{F}(x,y,z)=(xy-\sin z)\vec{i}+\left(\frac{1}{2}x^2+e^y\varphi(z)\right)\vec{j}+\left(\frac{e^y}{z}\ln z-x\cos z\right)\vec{k}$$

۱) $\ln z+c$　　۲) $\frac{\ln z}{z}+c$　　۳) $\frac{1}{2}(\ln z)^2+c$　　۴) $z(\ln z-1)+c$

پاسخنامه رشته عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۱

۱ـ گزینه «۲» روش اول:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(\sinh^{-1}x-\text{Ln}x-\text{Ln}2) \Rightarrow \text{می‌دانیم } \text{Arc}\sinh x=\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})-\text{Ln}x-\text{Ln}2)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{Ln}(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})-\text{Ln}2}{\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{hop}}\frac{\dfrac{\dfrac{\frac{2x\times x}{2\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}}{1+(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})}}{-2x^{-3}}=\frac{\dfrac{\dfrac{(\frac{x^2-x^2-1}{\sqrt{x^2+1}})}{(\frac{x^2}{1})}}{(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})}}{-2x^{-3}}$$

$$=\frac{\dfrac{-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})}}{\frac{1}{\frac{-2}{x^3}}}=\frac{\dfrac{\frac{-x^3}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})}}{-2}=\frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{-2(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\frac{-\frac{x}{x}}{-2(1+\frac{x}{x})}=\frac{-1}{-2(1+1)}=\frac{+1}{4}$$

روش‌دوم: در این روش، عبارت جلوی Ln را به صورت $\text{Ln}(1+u)$ می‌نویسیم، سپس از هم‌ارزی $\text{Ln}(1+u)\simeq u$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})-\text{Ln}x-\text{Ln}2=\text{Ln}(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x})=\text{Ln}(\frac{2x+\sqrt{x^2+1}-x}{2x})=\text{Ln}(1+\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{2x})\simeq\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{2x}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{2x}\times\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{(x^2+1)-x^2}{2x(\sqrt{x^2+1}+x)}\simeq\frac{1}{2x(x+x)}=\frac{1}{4x^2}$$

در محاسبات پایانی توجه کنیدکه از هم‌ارزی $\sqrt{x^2+1}\simeq x$ استفاده کرده‌ایم که وقتی $x\to+\infty$ میل می‌کند، معتبر است.

حالا به سادگی مقدار حد به دست می‌آید: $\text{جواب حد}=\lim_{x\to\infty}x^2(\frac{1}{4x^2})=\frac{1}{4}$

۲ـ گزینه «۲» روش اول: مسأله را با این فرض که ضابطه‌ی معکوس $\sinh x$ را نمی‌دانیم حل خواهیم کرد.

طبق فرمول مشتق تابع معکوس داریم: $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$　,　$\sinh x=\sqrt{3}\to e^x-e^{-x}=2\sqrt{3}\to e^{2x}-2\sqrt{3}e^x-1=0$

$$\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12+4}}{2}=e^x\to e^x=\frac{2\sqrt{3}\pm4}{2}=\sqrt{3}\pm2\to x=\ln(\sqrt{3}+2)$$

$$f(x)=\sinh x \to f'(x)=\cosh x \Rightarrow f'(a)=\cosh(\ln(\sqrt{۳}+۲))$$

$$f'(a)=\frac{e^{\ln(\sqrt{۳}+۲)}+e^{-\ln(\sqrt{۳}+۲)}}{۲}=\frac{(\sqrt{۳}+۲)+\frac{۱}{\sqrt{۳}+۲}}{۲}=۲ \Rightarrow (f^{-۱})'(b)=\frac{۱}{۲}$$

روش دوم: ضابطه‌ی معکوس $\sinh x$ را می‌دانیم:

$$f(x)=\sinh x \Rightarrow f^{-۱}(x)=\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^۲+۱}) \Rightarrow \frac{d}{dx}f^{-۱}(x)=\frac{۱+\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}}{x+\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-۱}(\sqrt{۳})=(\frac{d}{dx}f^{-۱})(\sqrt{۳})=\frac{۱+\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}}{\sqrt{۳}+۲}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲(\sqrt{۳}+۲)}=\frac{۱}{۲}$$

توضیح: علامت به‌کار رفته در صورت سؤال ایراد علمی دارد. $f^{-۱}(\sqrt{۳})$ یک عدد ثابت است پس مشتق آن صفر می‌شود یعنی: $\frac{d}{dx}f^{-۱}(\sqrt{۳})=۰$. البته اطمینان داریم که منظور طراح محترم محاسبه‌ی مشتق و سپس جایگذاری $x=\sqrt{۳}$ بوده است. به همین دلیل نماد صحیح برای این سؤال به صورت $(\frac{df^{-۱}}{dx})(\sqrt{۳})$ نوشته می‌شود. همچنین می‌توانستند از علامت $(f^{-۱})'(\sqrt{۳})$ استفاده کنند.

۳ـ گزینه «۳» ابتدا صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۳+۲i\sin\theta}{۱-۲i\sin\theta}\times\frac{۱+۲i\sin\theta}{۱+۲i\sin\theta}=\frac{۳+۶i\sin\theta+۲i\sin\theta-۴\sin^۲\theta}{۱+۴\sin^۲\theta}=\frac{(۳-۴\sin^۲\theta)+۸i\sin\theta}{۱+۴\sin^۲\theta}$$

وچون جزء حقیقی برابر با صفر است پس:

$$۳-۴\sin^۲\theta=۰ \to \sin^۲\theta=\frac{۳}{۴} \to \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲} \to \theta=\pm\frac{\pi}{۳}$$

در گزینه‌ها $\frac{\pi}{۳}$ قابل قبول است.

۴ـ گزینه «۱» ابتدا تابع زیر انتگرال را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی ساده‌تر می‌کنیم:

$$I=\int(\sec^۲x)(\csc^۲x)dx \Rightarrow \sec x=\frac{۱}{\cos x}\ ,\ \csc x=\frac{۱}{\sin x}$$

$$I=\int(\frac{۱}{\cos^۲x}\times\frac{۱}{\sin^۲x})dx=\int\frac{dx}{(\cos x\sin x)^۲}=\int\frac{dx}{\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x}=۲\int\frac{dx}{\sin^۲ ۲x}$$

حالا می‌دانیم که $\frac{۱}{\sin^۲ u}=\csc^۲ u=۱+\cot g^۲ u$. در نتیجه داریم:

$$I=+۲\int(۱+\cot^۲ ۲x)dx=-۲\cot ۲x=-۲\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x}=-۲\frac{\cos^۲x-\sin^۲x}{۲\sin x\cos x}+c=-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}+c=tgx-\cot x+c$$

۵ـ گزینه «۱»

$$\int_{-۴}^{-۵}e^{(x+۵)^۲}dx+۳\int_{\frac{۱}{۳}}^{\frac{۲}{۳}}e^{۹(x-\frac{۲}{۳})^۲}dx$$

با تغییر متغیر مناسب هر دو انتگرال را به صورت $\int_a^b e^{t^۲}dt$ می‌نویسیم:

$$I_۱=\int_{-۴}^{-۵}e^{(x+۵)^۲}dx \quad , \quad t=x+۵\ ,\ dt=dx \Rightarrow I_۱=\int_۱^۰ e^{t^۲}dt=-\int_۰^۱ e^{t^۲}dt$$

$$I_2=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} e^{9(x-\frac{2}{3})^2}dx \quad , \quad t=3(x-\frac{2}{3}) \ , \ dt=3dx \Rightarrow I_2=\int_{-1}^{0} e^{t^2}\times\frac{1}{3}dt \xrightarrow{\text{زوج بودن تابع}} I_2=\int_0^1\frac{1}{3}e^{t^2}dt$$

$$\Rightarrow I_1+3I_2=-\int_0^1 e^{t^2}dt+3(\frac{1}{3})\int_0^1 e^{t^2}dt=0$$

۶ـ گزینه «۱» ابتدا به جمله‌ی عمومی S_1 توجه کنید. این جمله عمومی فرم 1^∞ دارد. می‌توانیم از هم‌ارزی $f(n)^{g(n)} \sim e^{g(n)(f(n)-1)}$ در مورد آن استفاده کنیم:

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty} e^{n(n+1)(\frac{n-1}{n+1}-1)}=\lim_{n\to\infty} e^{-2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} e^{-2n}=0$$

پس S_1 شرط لازم همگرایی را دارد و در ضمن S_1 را می‌توان هم‌ارز با $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$ در نظر گرفت و این سری به وضوح همگراست چون سری هندسی با قدر نسبت $x=e^{-2}=\frac{1}{e^2}<1$ است.

اکنون به سری S_2 توجه می‌کنیم:

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n})(e^{\sqrt{n}})}$$

هرچند به دلیل وجود $e^{\sqrt{n}}$ در مخرج کسر و سرعت رشد آن می‌دانیم که S_2 همگراست، اما برای اثبات آن می‌توانیم از آزمون انتگرال استفاده کنیم:

$$\int_1^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=[-2e^{-\sqrt{x}}]_1^{\infty}=\frac{2}{e}$$

این انتگرال همگراست پس سری S_2 هم همگراست.

۷ـ گزینه «۱»

$$y=Ln(\frac{1}{1-x^2})=-Ln(1-x^2) \Rightarrow y'=\frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow L=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4}{(1-x^2)^2}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2+1}{1-x^2}dx$$

در این انتگرال، درجه‌ی صورت و مخرج برابر است. پس ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2+1}{1-x^2}=-\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\frac{(x^2-1)+2}{x^2-1}=-(1+\frac{2}{x^2-1})$$

حالا از تجزیه‌ی کسرها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{x^2+1}{1-x^2}=-(1+\frac{2}{x^2-1})=-(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}) \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2+1}{1-x^2}dx=-[x+Ln|x-1|-Ln|x+1|]_0^{\frac{1}{2}}=[Ln|\frac{x+1}{x-1}|-x]_0^{\frac{1}{2}}=Ln3-\frac{1}{2}$$

۸ـ گزینه «۳» ابتدا بردار گرادیان را در نقطه‌ی $P(1,1,1)$ به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{\nabla}f=(z(\frac{1}{y})(\frac{x}{y})^{z-1})\vec{i}+z(-\frac{x}{y^2})(\frac{x}{y})^{z-1}\vec{j}+Ln(\frac{x}{y})(\frac{x}{y})^z\vec{k} \Rightarrow \vec{\nabla}f=\vec{i}-\vec{j} \Rightarrow$$

مشتق سوئی در جهت بردار $\vec{u}$ $=(\vec{i}-\vec{j}).\frac{(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{2-1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$

۹ـ گزینه «۴»

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=?\quad ، \quad u=\mathrm{Arctg}\frac{x^3+y^3}{x-y}\rightarrow \mathrm{tg}u=\frac{x^3+y^3}{x-y}$$

طبق متن درس اگر $u=u(x,y)$ همگن از درجه‌ی α و f تابعی مشتق‌پذیر باشد که $z=f(u)$ آن‌گاه:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\alpha u f'(u)$$

پس چون u همگن از درجه‌ی ۲ می‌باشد پس $\alpha=2$ است.

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2z\times\frac{1}{1+z^2}=\frac{2z}{1+z^2}=\frac{2\mathrm{tg}u}{1+\mathrm{tg}^2u}=\frac{2\sin u}{\cos u}\times\cos^2 u=\sin 2u$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰ـ گزینه «۴»

$$I=\iiint_D e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,dx\,dy\,dz\quad , \quad 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\quad , \quad z>0$$

با توجه به کروی بودن ناحیه‌ی D از مختصات کروی استفاده می‌کنیم.

در دستگاه کروی همیشه $0\le\theta\le 2\pi$ است مگر آن‌که محدودیت خاصی روی x و y داشته باشیم.

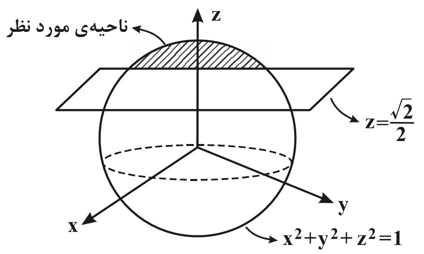
در نیم‌کره‌ی $z>0$ داریم $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ و حدود ρ هم شعاع کره‌ها هستند: $1\le\rho\le 2$.

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{2} e^{\rho^3}\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta=(\frac{1}{3}e^{\rho^3}]_1^2)(1)(2\pi)=\frac{2\pi}{3}(e^8-e)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱ـ گزینه «۳» سطح S بخشی از کره‌ی $g: x^2+y^2+z^2=1$ است.

پس المانِ سطح با توجه به معادله‌ی g به دست می‌آید:



$$S=\iint_S ds=\iint_A\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy\ ,\ z_x=\frac{\pm x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\quad ,\quad z_y=\frac{\pm y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$$

$$S=\iint_A\sqrt{1+\frac{x^2}{1-(x^2+y^2)}+\frac{y^2}{1-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy=\iint_A\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$$

ناحیه‌ی A یعنی تصویر S بر صفحه‌ی xoy یک دایره است. از برخورد صفحه‌ی $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ با معادله کره متوجه می‌شویم که دایره‌ی $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ به دست می‌آید:

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{1-r^2}}=(-\frac{1}{2}(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\times 2]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}})(2\pi)=(-2\pi)(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)\qquad ،\qquad S=\pi(2-\sqrt{2})$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲ـ گزینه «۴» سطح S بسته است. فرض می‌کنیم D ناحیه‌ی درون S باشد. از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\text{شار}=\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_D \mathrm{div}\vec{F}dv\quad ,\quad \mathrm{div}\vec{F}=1+1+1=3$$

$$\text{شار}=\iiint_D 3dv=3(D_{\text{حجم}})\quad ,\quad x^2+4y^2+4z^2=4\rightarrow\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$$

می‌دانیم که حجم بیضی گون با معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ از رابطه‌ی $v=\frac{4}{3}\pi abc$ محاسبه می‌گردد؛ پس خواهیم داشت:

$$(D_{\text{حجم}})=\frac{4}{3}\pi\times 2\times 1\times 1=\frac{8}{3}\pi\ \Rightarrow\ \text{شار}=3\times\frac{8}{3}\pi=8\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳ـ گزینه «۳»

$$\vec{F}=\underbrace{(xy-\sin z)}_{P}\,\vec{i}+\underbrace{(\frac{۱}{۲}x^{۲}+e^{y}\phi(z))}_{Q}\,\vec{j}+\underbrace{(\frac{e^{y}}{z}\ln z-x\cos z)}_{R}\,\vec{k}$$

برای این که انتگرال کار مستقل از مسیر باشد باید $\text{curl}\vec{F}=۰$ باشد، یعنی روابط زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\ \Rightarrow\ x=x$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\to -\cos z=-\cos z\quad ,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}\ \Rightarrow\ e^{y}\phi'(z)=\frac{e^{y}}{z}\text{Ln}z\ \Rightarrow\ \phi'(z)=\frac{\text{Ln}z}{z}\ \Rightarrow\ \phi(z)=\frac{(\text{Ln}z)^{۲}}{۲}+c$$

رشته عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۲

۱ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{۱\times۱!+۲\times۲!+\ldots+n\times n!}{(n+۱)!}$ ، برابر کدام است؟

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) e   ۴) $+\infty$

۲ـ فرض‌کنید $F(x)=\int_{\frac{۱}{x}}^{x}\dfrac{dt}{t^{۲}e^{tx}}$ باشد، در این‌صورت $F''(x)$، کدام است؟

۱) $\frac{-۲}{x^{۳}}(۱+۲x^{۲})e^{-x^{۲}}$ ۲) $\frac{-۱}{x^{۳}}(۲+x^{۲})e^{-x^{۲}}$ ۳) $\frac{-۱}{x^{۲}}(۱+۲x^{۲})e^{-x^{۲}}$ ۴) $\frac{-۲}{x^{۳}}(۱+x^{۲})e^{-x^{۲}}$

۳ـ حاصل انتگرال $I=\int\dfrac{dx}{\tanh x-۱}$، کدام است؟

۱) $-(\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\sinh^{۲}x+\frac{۱}{۴}\sinh ۲x)+c$
۲) $-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\sinh^{۲}x-\frac{۱}{۴}\sinh ۲x+c$
۳) $-\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\sinh^{۲}x+\frac{۱}{۴}\sinh ۲x+c$
۴) $(\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\sinh^{۲}x-\frac{۱}{۴}\sinh ۲x)+c$

۴ـ طول قوس خم $y=\text{Ln}(۱-x^{۲})$ کدام است؟ $|x|\le\frac{۱}{۲}$

۱) ۱   ۲) $۲\text{Ln}۳-۱$ ۳) $\text{Ln}\frac{۵}{۲}$ ۴) $۳\text{Ln}۲-۱$

۵ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی $\begin{cases}x=\cos^{۲}\theta\\ y=\sin^{۲}\theta\end{cases}$ در نقطه $\theta=\frac{\pi}{۴}$، کدام است؟

۱) $\frac{x}{y}=۱$ ۲) $x.y=۱$ ۳) $x-y=۱$ ۴) $x+y=۱$

۶ـ مقدار $\text{Arg}\left(\left|\frac{۲+i}{۵-۳i}\right|^{۱۳۹۲}(-۱+i)\right)$ ، برابر کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $-\frac{۳\pi}{۴}$

۷ـ همگرایی و واگرایی سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\dfrac{(n!)^{۳}}{(kn)!}$، به ازای $k=۳$ و $k=۴$، برابر کدام است؟

۱) به ازای $k=۳$ همگرا و به ازای $k=۴$ واگرا
۲) به ازای $k=۳$ واگرا و به ازای $k=۴$ همگرا
۳) به ازای هر دو همگرا
۴) به ازای هر دو واگرا

۸ـ مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)=x\text{Ln}(z^{۲}+y^{۲})$ در امتداد مماس بر منحنی $x=t$ و $y=۲t^{۲}$ و $z=-۲t^{۴}$، در نقطهٔ $M(۱,۲,-۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}(\text{Ln}۸+۶)$ ۲) $\frac{۱}{۴}\text{Ln}۸+۶$ ۳) $\frac{۱}{۲}\text{Ln}۸+۶$ ۴) $\text{Ln}۸+۶$

۹ــ اگر $u = xLn(xy)$ و نیز $x^3+y^3+3xy=1$ باشد، حاصل $\frac{du}{dx}$ کدام است؟

۱) $(1+Ln(xy))\frac{x^2+y}{x+y^2}+\frac{x}{y}$

۲) $1+Ln(xy)+\frac{x}{y}\frac{x^2+y}{x+y^2}$

۳) $-(1+Ln(xy))\frac{x^2+y}{x+y^2}+\frac{x}{y}$

۴) $1+Ln(xy)-\frac{x}{y}\frac{x^2+y}{x+y^2}$

۱۰ــ مقدار انتگرال $\iiint_D \frac{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}}{x^2+y^2+z^2+1}dV$ کدام است؟ D ناحیهٔ $x^2+y^2+z^2\le 1$ می‌باشد.

۱) $\frac{5\pi}{6}$
۲) $\frac{4\pi}{3}$
۳) $\frac{2\pi}{3}$
۴) π

۱۱ــ فرض کنید C دلگون $r=1-\cos\theta$ و در جهت مثلثاتی باشد. در این صورت مقدار انتگرال زیر، برابر کدام است؟

$$\int_c (x^3-y)dx+(3x-2y^2)dy$$

۱) -6π
۲) -3π
۳) 3π
۴) 6π

۱۲ــ حجم محدود به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=5$ از بالا و سهمی گون $x^2+y^2=4z$ از پایین، برابر کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{5}-2)$
۲) $\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-4)$
۳) $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{5}-1)$
۴) $\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{5}-4)$

۱۳ــ مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن $F(x,y,z)=(x^3,y^3,z^3)$ و S سطح کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ و n بردار قائم یکهٔ رو به خارج S است؛ برابر کدام است؟

۱) $\frac{12}{5}\pi$
۲) 4π
۳) $\frac{6}{5}\pi$
۴) 3π

۱۴ــ λ کدام یک از مقادیر زیر باشد، تا $\int_A^B (z^2dx+2ydy+\lambda xzdz)$ از مسیر انتگرال‌گیری مستقل باشد؟

۱) $\lambda=0$
۲) $\lambda=1$
۳) $\lambda=2$
۴) $\lambda=-1$

پاسخنامه رشته عمران ــ نقشه‌برداری ــ سراسری ۹۲

۱ــ گزینه «۲» ابتدا صورت کسر را به این شکل محاسبه می‌کنیم:

$$1\times 1!+2\times 2!+\cdots+n\times n! = \sum_{k=1}^{n} k\times k! = \sum_{k=1}^{n}((k+1)-1)k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1)!-k! = -\sum_{k=1}^{n} k!-(k+1)! = -(1!-(n+1)!) = (n+1)!-1$$

یادآوری می‌کنیم که در مجموع‌های تلسکوپی داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k - f_{k+1} = f_1 - f_n$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{مقدار حد} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!} \simeq \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1$$

۲ــ گزینه «۱» با استفاده از قاعده مشتق توابع انتگرالی داریم:

$$F'(x) = (x')\frac{1}{x^2e^{x^2}} - (\frac{1}{x})'\frac{x^2}{e} + \int_{\frac{1}{x}}^{x} -\frac{te^{-tx}dt}{t^2} \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x^2e^{x^2}} + \frac{1}{e} - \int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{e^{-tx}}{t}dt$$

با مشتق‌گیری مجدد از رابطه بدست آمده داریم:

$$F''(x) = \frac{-2xe^{x^2}-2x^3e^{x^2}}{x^4e^{2x^2}} - (x)'\frac{e^{-x^2}}{x} + (\frac{1}{x})'\frac{e^{-1}}{\frac{1}{x}} - \int_{\frac{1}{x}}^{x} -e^{-tx}dt = \frac{-2e^{-x^2}}{x^3}(1+x^2) - \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{e^{-1}}{x} - \frac{1}{x}e^{-tx}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}$$

$$= \frac{-2e^{-x^2}}{x^3}(1+x^2) - \frac{e^{-x^2}+e^{-1}}{x} - \frac{e^{-x^2}-e^{-1}}{x} = \frac{-2e^{-x^2}}{x^3}(1+x^2) - \frac{2e^{-x^2}}{x} = \frac{-2e^{-x^2}}{x^3}(1+x^2+x^2) = \frac{-2e^{-x^2}}{x^3}(1+2x^2)$$

۳ـ گزینه «۱» با توجه به تعریف تابع $tgh\,x$ داریم:

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

با جایگذاری عبارت فوق در انتگرال داده شده داریم:

$$I=\int\frac{dx}{\frac{\sinh x}{\cosh x}-1}=\int\frac{\cosh x}{\sinh x-\cosh x}dx$$

صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sinh x+\cosh x$ ضرب می‌کنیم:

$$I=\int\frac{\cosh x(\sinh x+\cosh x)}{(\sinh x-\cosh x)(\sinh x+\cosh x)}dx=\int\frac{\cosh x\sinh x+\cosh^2 x}{\sinh^2 x-\cosh^2 x}dx=-\int(\frac{1}{2}\sinh 2x+\cosh^2 x)dx$$

حال با استفاده از اتحادهای توابع هایپربولیک داریم:

$$\cosh 2x=2\cosh^2 x-1=2\sinh^2 x+1$$

با جایگذاری این روابط در انتگرال فوق داریم:

$$I=-\int\frac{1}{2}\sinh 2x dx-\int\frac{1+\cosh 2x}{2}dx=-\frac{1}{4}\cosh 2x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sinh 2x+c$$

$$\xrightarrow{\cosh 2x=1+2\sinh^2 x}I=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sinh 2x-\frac{1}{4}(1+2\sinh^2 x)+c\Rightarrow I=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sinh 2x-\frac{1}{2}\sinh^2 x+c_1$$

در آخرین تساوی منظور از c_1 همان $-\frac{1}{4}+c$ است.

۴ـ گزینه «۲» طول قوس منحنی $y=f(x)$ در فاصله $a\le x\le b$ برابر است با:

$$S=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

برای منحنی داده شده داریم:

$$f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}\Rightarrow S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(\frac{-2x}{1-x^2})^2}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{(1-x^2)^2+4x^2}}{1-x^2}dx$$

$$\Rightarrow S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{1+x^4-2x^2+4x^2}}{1-x^2}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{x^4+2x^2+1}}{1-x^2}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$$

درجه‌ی صورت و مخرج برابر است. پس ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم. سپس با تجزیه‌ی مخرج، کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}=-\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\frac{(x^2-1)+2}{x^2-1}=-(1+\frac{2}{x^2-1})=-(1+\frac{2}{(x-1)(x+1)})=-(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}-1$$

با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$S=[\text{Ln}|x+1|-\text{Ln}|x-1|-x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=[\text{Ln}|\frac{x+1}{x-1}|-x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=2\text{Ln}3-1$$

۵ـ گزینه «۴» برای یافتن معادله خط مماس ابتدا باید ضریب زاویه خط مماس را بیابیم، لذا:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\quad,\quad\begin{cases}x=\cos^2\theta\Rightarrow\frac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta\cos\theta\\ y=\sin^2\theta\Rightarrow\frac{dy}{d\theta}=2\sin\theta\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{-2\sin\theta\cos\theta}=-1$$

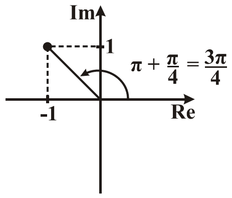
برای نقطه $\theta=\frac{\pi}{4}$ داریم:

$$\begin{cases}x=\cos^2\theta\xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{4}}x=\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\\ y=\sin^2\theta\xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{4}}y=\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

بنابراین معادله خط مماس بر منحنی داده شده برابر است با:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-\frac{1}{2}=-1(x-\frac{1}{2})\Rightarrow y+x=1$$

۶ــ گزینه «۳» عبارت $|\frac{۲+i}{۵-۳i}|^{۱۳۹۲}$ یک عدد حقیقی مثبت است پس هیچ تأثیری در نتیجه Arg ندارد. لذا کافیست که $\mathrm{Arg}(-۱+i)$ را محاسبه کنیم.



$$\mathrm{Arg}(-۱+i)=-\frac{\pi}{۴}+\pi=\frac{۳\pi}{۴}$$

توجه کنید که $tg^{-۱}(-۱)=-\frac{\pi}{۴}$ است، اما چون مقدار x منفی است باید π را به آن اضافه کنیم.

◆ ◆ ◆ ◆

۷ــ گزینه «۳» بهتر است از آزمون ریشه استفاده کنیم. زیرا می‌توانیم از هم‌ارزی استرلینگ کار را ساده‌تر کنیم.

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^{۳}}{(kn)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n}{e})^{۳}}{(\frac{kn}{e})^{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{k-۳}}{k^k}\frac{n^{۳}}{n^k}$$

مقدار k ثابت است پس $\frac{e^{k-۳}}{k^k}$ ضریب ثابت است.

به ازای $k=۳$ داریم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{۳}}{۲۷n^{۳}}=\frac{۱}{۲۷}<۱$$

پس سری همگراست.

به ازای $k=۴$ داریم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{۴^{۴}}\frac{n^{۳}}{n^{۴}}=۰<۱$$

پس سری باز هم همگراست.

◆ ◆ ◆ ◆

۸ــ گزینه «۱» ابتدا امتداد مماس بر منحنی داده شده در نقطه $(۱,۲,-۲)$ را می‌یابیم:

$$\vec{u}=(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t},\frac{\partial z}{\partial t})=(۱,۴t,-۸t^{۳})$$

در نقطه‌ی M داریم $(t,۲t^{۲},-۲t^{۴})=(۱,۲,-۲)$ پس $t=۱$ است. پس بردار $\vec{u}$ برابر است با:

$$\vec{u}=(۱,۴,-۸)$$

مشتق سویی تابع f در جهت بردار $\vec{u}$ برابر است با: $\frac{\vec{\nabla}f.\vec{u}}{|\vec{u}|}$. ابتدا گرادیان تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{\nabla}f=(Ln(z^{۲}+y^{۲}),\frac{۲xy}{z^{۲}+y^{۲}},\frac{۲xz}{z^{۲}+y^{۲}})\Rightarrow\vec{\nabla}f=(Ln۸,\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$$

بردار $\vec{u}$ را بر اندازه‌اش تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{(۱,۴,-۸)}{\sqrt{۱+۱۶+۶۴}}=\frac{۱}{۹}(۱,۴,-۸)$$

حالا بردار به دست آمده را در گرادیان ضرب داخلی می‌کنیم:

$$\frac{\vec{\nabla}f.\vec{u}}{|\vec{u}|}=(Ln۸,\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}).(\frac{۱}{۹},\frac{۴}{۹},-\frac{۸}{۹})=\frac{۱}{۹}(Ln۸+۶)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹ــ گزینه «۴» رابطه‌ی ضمنی داده شده نشان می‌دهد که y به x وابسته است. حالا با محاسبه‌ی $\frac{du}{dx}$ داریم:

$$\frac{du}{dx}=Ln(xy)+\frac{x\times y}{xy}+\frac{x\times xy'}{xy}=Ln(xy)+۱+\frac{xy'}{y}$$

از طرفی با استفاده از تعریف مشتق ضمنی برای محاسبه y' از عبارت دوم داریم:

$$f(x,y)=x^{۳}+y^{۳}+۳xy-۱=۰\Rightarrow y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۳x^{۲}+۳y}{۳y^{۲}+۳x}=-\frac{x^{۲}+y}{y^{۲}+x}$$

با جایگذاری عبارت فوق در $\frac{du}{dx}$ داریم:

$$\frac{du}{dx}=۱+Ln(xy)-\frac{x}{y}\frac{x^{۲}+y}{y^{۲}+x}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰ـ گزینه «۳» معادله‌ی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ با تبدیل x به y و y به x تغییری نمی‌کند. همچنین با تبدیل هر جفت از متغیرها به یکدیگر تغییری نمی‌کند. پس در تابع زیرانتگرال هم با تبدیل هر جفت از متغیرها به یکدیگر، مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند. در نتیجه داریم:

$$I=\iiint_D \frac{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}}{x^2+y^2+z^2+1}dv$$

با تبدیل $x \leftrightarrow z$ داریم:

$$I=\iiint_D \frac{z^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}}{z^2+y^2+x^2+1}dv$$

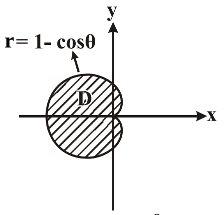
با جمع‌کردن این دو رابطه خواهیم داشت:

$$I+I=\iiint_D \frac{x^2+y^2+z^2+1}{x^2+y^2+z^2+1}dv=\iiint_D dv=(D\ \text{حجم})=\frac{4}{3}\pi \Rightarrow 2I=\frac{4}{3}\pi \Rightarrow I=\frac{2\pi}{3}$$

۱۱ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه منحنی c بسته است با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$I=\int_c (x^3-y)dx+(3x-2y^2)dy=\iint_D \left(\frac{\partial(3x-2y^2)}{\partial x}-\frac{\partial(x^3-y)}{\partial y}\right)dxdy \Rightarrow I=\iint_D(3+1)dxdy=4\iint_D dxdy$$

برای حل انتگرال فوق با استفاده از مختصات قطبی داریم:



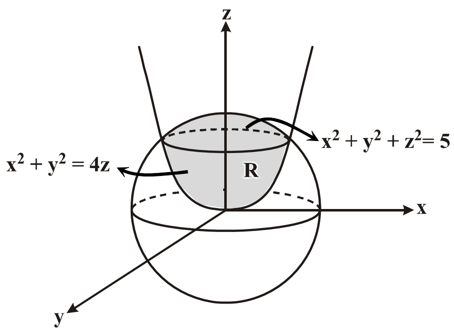
$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases} \qquad \begin{cases}0\le r\le 1-\cos\theta\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$I=4\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} rdrd\theta=4\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Big|_0^{1-\cos\theta}d\theta=2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta-2\cos\theta)d\theta=2\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1+\cos2\theta}{2}-2\cos\theta\right)d\theta \Rightarrow$$

$$I=2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos2\theta-2\cos\theta\right)d\theta=2\left(\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta-2\sin\theta\right)\Big|_0^{2\pi} \Rightarrow I=2(3\pi)=6\pi$$

۱۲ـ گزینه «۲» حدود z در این ناحیه واضح هستند. این شکل از پایین به سهمی‌گون $z=\frac{x^2+y^2}{4}$ و از بالا به کره‌ی $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ محدود است. می‌توانیم ابتدا انتگرال نسبت به z را به دست آوریم:

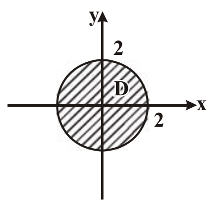


$$V=\iiint_R dv=\iint_D\int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^{\sqrt{5-x^2-y^2}}dydx$$

$$\Rightarrow V=\iint_D\left(\sqrt{5-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{4}\right)dydx$$

برای حل انتگرال فوق از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. لذا ابتدا ناحیه D یعنی تصویر این شکل بر صفحه‌ی xoy را بدست می‌آوریم.

از برخورد کره و سهمی‌گون خواهیم داشت:



$$D\ \text{ناحیه}:\ \left(\frac{x^2+y^2}{4}\right)^2=5-(x^2+y^2) \Rightarrow \left(\frac{r^2}{4}\right)^2=5-r^2 \Rightarrow \frac{r^4}{16}=5-r^2 \Rightarrow r^4+16r^2-80=0$$

$$\Rightarrow (r^2-4)(r^2+20)=0 \Rightarrow r=2 \Rightarrow \text{ناحیه D درون دایره‌ی ۲} = r \text{ است.} \Rightarrow \begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

بنابراین حجم V برابر است با:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(\sqrt{5-r^2}-\frac{r^2}{4}\right)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(r\sqrt{5-r^2}-\frac{r^3}{4}\right)drd\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}(5-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^4}{16}\right)\Big|_0^2 d\theta=2\pi\times\left(-\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\times5\sqrt5-0\right)=\frac{2\pi}{3}5(\sqrt5-4)$$

۱۳ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه سطح S بسته است، از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}dv \qquad (*)$$

$$\vec{F}(x,y,z)=(x^3,y^3,z^3) \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial(x^3)}{\partial x}+\frac{\partial(y^3)}{\partial y}+\frac{\partial(z^3)}{\partial z}=3(x^2+y^2+z^2)$$

با جایگذاری عبارت فوق در رابطه (*) داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_D 3(x^2+y^2+z^2)dv$$

ناحیه‌ی D درون کره‌ی واحد است، پس برای حل این انتگرال از دستگاه کروی استفاده می‌کنیم.

کران‌های انتگرال در مختصات کروی عبارتند از:

$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ درون کره‌ی } \Rightarrow \begin{cases} 0\le\rho\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\phi\le\pi \end{cases}$$

با جایگذاری این کران‌ها در انتگرال داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 3\rho^2\times\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^1 3\rho^4d\rho\right)$$

$$=(-\cos\phi)\Big|_0^{\pi}\times 2\pi\times\frac{3\rho^5}{5}\Big|_0^1=2\times 2\pi\times\frac{3}{5}=\frac{12\pi}{5}$$

۴ـ گزینه «۳» برای اینکه انتگرال داده شده مستقل از مسیر باشد باید تابع برداری زیر انتگرال پایستار باشد، یعنی:

$$\operatorname{curl}\vec{F}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 2y & \lambda xz \end{vmatrix}=(0,2z-\lambda z,0)=(0,0,0)$$

بنابراین کافیست داشته باشیم:

$$2z-\lambda z=0 \Rightarrow \lambda=2$$

رشته عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۳

۱ـ فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy$ و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=3$، در این صورت $f'(x)$، کدام است؟

۱) $3x$ ۲) $5x$ ۳) $3x+5$ ۴) $5x+3$

۲ـ مقدار انتگرال معین تابع $\int_0^1(\tan^{-1}x+\frac{x}{x^2+1})dx$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\ln 2-\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{4}+\ln 2$

۳ـ طول قوس منحنی $y=\sqrt{x-x^2}+\sin^{-1}\sqrt{x}$ عبارتست از:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۴ـ به ازای کدام‌یک از مقادیر a انتگرال زیر واگرا است؟

$$\int_0^{\infty}\frac{\sinh(ax)}{\sinh(\pi x)}dx$$

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) $-\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۵ـ مقدار $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{30}$، کدام است؟

۱) -1 ۲) $-i$ ۳) i ۴) ۱

۶ــ بسط تیلور تابع $\ln(\cos x)$ تا جمله x^3 کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}x^2$
۲) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$
۳) $-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$
۴) $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$

۷ــ شعاع همگرایی سری زیر، کدام است؟

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{n^2-2}{n^2-1}\right)^{n^2}(x-1)\right)^n$$

۱) $\frac{1}{e}$
۲) e
۳) $\frac{1}{e^2}$
۴) e^2

۸ــ محل تلاقی خط $\begin{cases}x-3=y\\ z=1\end{cases}$ با رویه‌ی $x^2+y^2-z^2=1$ چیست؟

۱) یک نقطه
۲) سه نقطه
۳) خط بر رویه منطبق است.
۴) هیچکدام

۹ــ شعاع انحنای خم $y=\frac{x^2}{1+x^2}$ در نقطه‌ی $(0,0)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) 2

۱۰ــ ماکزیمم مقدار تابع $f(x,y,z)=e^{x^2}$ روی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2$ کدام است؟

۱) $\sqrt{e}$
۲) $e^{\sqrt{2}}$
۳) e^2
۴) e^4

۱۱ــ مقدار انتگرال مقابل کدام است؟

$$\iint_D (1-2x-3y)\,dxdy$$

که در آن D ناحیه $x^2+y^2\le 4$ می‌باشد.

۱) 0
۲) π
۳) 2π
۴) 4π

۱۲ــ مقدار انتگرال $\int_C (x^2+y^2)dx+2xy\,dy$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(1,1)$ روی منحنی به معادله $y=x^3$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) 1

۱۳ــ شار میدان $\vec{F}=4x\vec{i}+4y\vec{j}+2\vec{k}$ بر روی سطحی که اشتراک رویه $z=x^2+y^2$ و صفحه $z=1$ است و جهت آن به سمت محور zها باشد، کدام است؟

۱) 2π
۲) $\frac{3\pi}{2}$
۳) π
۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۴ــ اگر $\vec{A}=(3x^2-6yz)\vec{i}+(2y+3xz)\vec{j}+(1-4xyz^2)\vec{k}$ باشد، مقدار انتگرال $\int_C \vec{A}.d\vec{r}$ روی مسیر C که خط واصل بین نقاط $(0,0,0)$ و $(1,1,1)$ است، کدام است؟

۱) $-\frac{6}{5}$
۲) $-\frac{5}{6}$
۳) $\frac{6}{5}$
۴) $\frac{5}{6}$

پاسخنامه رشته عمران ــ نقشه‌برداری ــ سراسری ۹۳

۱ــ گزینه «۴» ابتدا با فرض $x=y=0$ در معادله تابعی داده شده داریم $f(0+0)=f(0)+f(0)+0$ بنابراین $f(0)=0$.

اکنون با کمک معادله تابعی داده شده کسر تعریف مشتق را ایجاد می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+5hx-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+5hx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+5x=3+5x$$

توضیح: اگر ضابطه‌ی $f(x)$ را بخواهیم، با انتگرال‌گیری از $f'(x)$ داریم $f(x)=3x+\frac{5}{2}x^2+c$. حالا از آنجا که $f(0)=0$ است، باید $c=0$ باشد و در نتیجه $f(x)=3x+\frac{5}{2}x^2$.

۲ـ گزینه «۱» فرض کنیم $I=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ و $J=\int_0^1 \tan^{-1}(x)dx$

در انتگرال (I) با فرض $u=x^2+1$ داریم $du=2xdx$ بنابراین:

$$I=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln(2)$$

انتگرال (J) را با استفاده از جزء به جزء به این ترتیب حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} u=\tan^{-1}(x) \to du=\frac{1}{1+x^2}dx \\ dv=dx \to v=x \end{cases}$$

$$J=\int_0^1 \tan^{-1}(x)dx=x\tan^{-1}(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{xdx}{1+x^2}=(x\tan^{-1}(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2))\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)$$

بنابراین: $\text{جواب}=I+J=\frac{\pi}{4}$

۳ـ گزینه «۴» در منحنی $y=\sqrt{x-x^2}+\sin^{-1}(\sqrt{x})$ باید داشته باشیم $-1\le\sqrt{x}\le 1$ و $x\ge 0$ و $x-x^2\ge 0$. بنابراین $0\le x\le 1$.

طول منحنی برابر است با $L=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}dx$. با محاسبه مشتق داریم:

$$y'=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}=\frac{2-2x}{2\sqrt{x-x^2}}=\frac{2(1-x)}{2\sqrt{x(1-x)}}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

بنابراین:

$$L=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1-x}{x}}dx=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{x}}dx=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=2$$

۴ـ گزینه «۲» وقتی $x\to 0$ داریم $\frac{\sinh(ax)}{\sinh(\pi x)}\simeq\frac{ax}{\pi x}=\frac{a}{\pi}$ پس تابع زیر انتگرال در $x=0$ ناسره نیست. بنابراین کافیست شرط همگرایی را در کران بالایی (∞) انتگرال بررسی کنیم:

هرگاه $x\to\infty$ خواهیم داشت:

$$\frac{\sinh(ax)}{\sinh(\pi x)}=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\simeq\frac{\pm e^{|a|x}}{e^{\pi x}}=\pm(\frac{e^{|a|}}{e^{\pi}})^x$$

در واقع اگر $a>0$ باشد داریم $e^{ax}-e^{-ax}\simeq e^{ax}$ و اگر $a<0$ باشد $e^{ax}-e^{-ax}\simeq e^{-ax}$.

بنابراین شرط همگرایی انتگرال آن است که $|a|<\pi$ باشد. گزینه (۲) در این ناحیه قرار ندارد.

۵ـ گزینه «۴» برای عدد مختلط $z=1+\sqrt{3}i$ داریم $y=\sqrt{3}$ و $x=1$ بنابراین $r=|z|=\sqrt{1+3}=2$ و $\theta=\text{Arg}(z)=\tan^{-1}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$

پس $z=1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $\bar{z}=1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

به این ترتیب:

$$(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^{30}=(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}})^{30}=(e^{i\frac{2\pi}{3}})^{30}=e^{i20\pi}=\cos(20\pi)+i\sin(20\pi)=1$$

۶ـ گزینه «۱» یادآوری کنیم که: $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$ و $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$. با نوشتن جملاتی که درجه آن‌ها حداکثر ۳ است خواهیم داشت:

$$f(x)=\ln(\cos x)\simeq\ln(1-\frac{x^2}{2})=-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2})^2+\cdots=-\frac{1}{2}x^2-\cdots$$

روش دوم: تابع $f(x)=\text{Ln}(\cos x)$ زوج است. بنابراین در بسط مک‌لورن آن، فقط توان‌های زوج x می‌توانند وجود داشته باشند. پس گزینه (۱) صحیح است.

۷ــ گزینه «۲» در سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n (x-x_\circ)^n$ شعاع همگرایی برابر است با:

$$R = \frac{۱}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

در این تمرین داریم $a_n = (\frac{n^۲-۲}{n^۲-۱})^{n^۳}$. بنابراین:

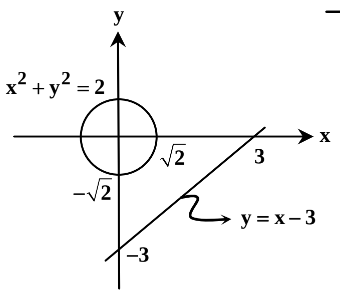
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n^۲-۲}{n^۲-۱})^{n^۲} = \lim_{n\to\infty} (\frac{(n^۲-۱)-۱}{n^۲-۱})^{n^۲} = \lim_{n\to\infty} (۱-\frac{۱}{n^۲-۱})^{n^۲} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-n^۲}{n^۲-۱}} = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$$

بنابراین شعاع همگرایی برابر است با $R = e$.

توجه: حد $\lim_{n\to\infty} (۱-\frac{۱}{n^۲-۱})^{n^۲}$ دارای فرم ۱^∞ است. در چنین مواردی از قاعده $(۱+u)^v \simeq e^{vu}$ کمک می‌گیریم تا حالت مبهم سریع‌تر رفع شده مقدار حد معلوم شود.

۸ــ گزینه «۴» **روش اول:** تلاقی رویه‌ی $x^۲+y^۲-z^۲=۱$ با صفحه $z=۱$ استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲$ است.

اکنون برخورد صفحه‌ی $y=x-۳$ با این استوانه را بررسی کنیم. از آن‌جا که مطابق شکل، خط $y=x-۳$ با دایره‌ی $x^۲+y^۲=۲$ هیچ نقطه برخوردی ندارد بنابراین صفحه‌ی $y=x-۳$ و استوانه $x^۲+y^۲=۲$ نیز برخوردی با هم ندارند.



روش دوم: به صورت جبری معادلات را برخورد دهیم:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲-z^۲=۱ \\ z=۱ \\ y=x-۳ \end{cases} \Rightarrow x^۲+(x-۳)^۲-۱=۱ \Rightarrow ۲x^۲-۶x+۷=\circ \Rightarrow \Delta=۳۶-۵۶<\circ \Rightarrow \text{نقطه برخوردی وجود ندارد}$$

۹ــ گزینه «۱» ابتدا انحنا را در این نقطه به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x^۲}{۱+x^۲} \Rightarrow y'=\frac{۲x}{(۱+x^۲)^۲} \Rightarrow y''=\frac{۲(۱+x^۲)^۲-۸x^۲(۱+x^۲)}{(۱+x^۲)^۴}$$

در نقطه $(\circ,\circ)$ داریم $y'=\circ$ و $y''=۲$.

بنابراین انحنا برابر است با $\kappa=\frac{|y''|}{(۱+(y')^۲)^{\frac{۳}{۲}}}=۲$. در نتیجه شعاع انحنا برابر است با $\rho=\frac{۱}{\kappa}=\frac{۱}{۲}$.

۱۰ــ گزینه «۳» نقاط بحرانی $f(x,y,z)=e^{x^۲}$ را تحت قید $g(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲=۲$ تعیین می‌کنیم. اگر λ ضریب لاگرانژ باشد داریم:

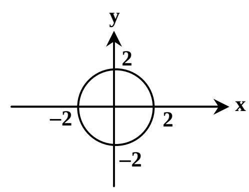
$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z} \Rightarrow \lambda=\frac{۲xe^{x^۲}}{۲x}=\frac{\circ}{۲y}=\frac{\circ}{۲z}$$

بنابراین یا $x=\circ$ است و y و z دلخواه هستند و یا $x\neq\circ$ است و $y=z=\circ$. که در این صورت با توجه به معادله‌ی $g=۲$ باید $x=\pm\sqrt{۲}$ باشد.

به عبارتی نقاط بحرانی عبارتند از نقاط $(\circ,y,z)$ و $(\pm\sqrt{۲},\circ,\circ)$.

مقادیر بحرانی f را حساب می‌کنیم: $f(\circ,y,z)=e^\circ=۱$ و $f(\pm\sqrt{۲},\circ,\circ)=e^۲$. پس بیش‌ترین مقدار f با شرط $g=۲$ برابر است با $e^۲$.

۱۱ــ گزینه «۴» ناحیه D دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ است. از آن‌جا که تابع $f(x,y,z)=x$ بر این ناحیه به ازای هر مقدار مثبت یک مقدار قرینه آن را نیز اختیار می‌کند خواهیم داشت: $\iint_D x\,dydx=\circ$



به همین ترتیب $\iint_D y\,dydx=\circ$.

بنابراین:

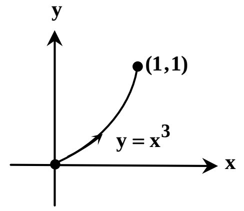
$$I=\iint_D (۱-۲x-۳y)dydx=\iint_D (۱)dydx=(D \text{ مساحت})=۴\pi$$

روش دوم: از دستگاه مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$I=\iint_D(1-2x-3y)dydx=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(1-2r\cos\theta-3r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{2}{3}r^3\cos\theta-\frac{3}{3}r^3\sin\theta\right)\Big|_0^{2}d\theta=\int_0^{2\pi}\left(2-\frac{16}{3}\cos\theta-8\sin\theta\right)d\theta=\left(2\theta-\frac{16}{3}\sin\theta+8\cos\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=4\pi$$

۱۲ـ گزینه «۳»



منحنی $y=x^3$ را در محدوده داده شده به این صورت پارامتری می‌کنیم:

$(x,y)=(t,t^3)$ و از آن‌جا که $0\le x\le 1$ پس $0\le t\le 1$.

به این ترتیب خواهیم داشت:

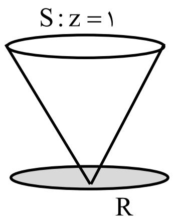
$$\int_c(x^2+y^2)dx+2xydy=\int_0^1[(t^2+t^6)(1)+(2t^4)(3t^2)]dt=\int_0^1(t^2+7t^6)dt=\left(\frac{t^3}{3}+t^7\right)\Big|_0^1=\frac{4}{3}$$

روش دوم: میدان برداریِ $\vec F=(P,Q)=(x^2+y^2,2xy)$ پایستار است زیرا $Q_x=2y=P_y$. بنابراین انتگرال مستقل از مسیر است و فقط به نقطه ابتدا و انتهای مسیر وابسته است.

تابع پتانسیل $\vec F$ را می‌یابیم. اگر G تابع پتانسیل $\vec F$ باشد داریم $G_x=x^2+y^2$ و $G_y=2xy$ و آنگاه به‌سادگی $G=\frac{1}{3}x^3+y^2x+c$ بدست می‌آید.

بنابراین: $\displaystyle\int_c Pdx+Qdy=G(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=G(1,1)-G(0,0)=\frac{4}{3}$

۱۳ـ گزینه «۱» فرض کنیم S بخشی از صفحه‌ی $g(x,y,z)=z=1$ باشد که درون مخروط $z=x^2+y^2$ قرار دارد.



برخورد این صفحه با مخروط دایره $x^2+y^2=1$ است، پس تصویر S بر صفحه xy دایره‌ای به شعاع یک است که آن را R می‌نامیم.

بردار قائم یکه برون‌سو بر سطح S برابر است با $\vec n=\frac{\vec\nabla g}{|\vec\nabla g|}=\frac{\vec k}{1}=\vec k$، بنابراین:

$$\text{جواب}=\iint_S\vec F.\vec n ds=\iint_S(4x\vec i+4y\vec j+2\vec k).(\vec k)ds=\iint_S 2ds=2\times(S\ \text{مساحت})=2\times(R\ \text{مساحت})=2\pi$$

توضیح: سطح S دایره‌ای به شعاع یک است که در ارتفاع $z=1$ قرار دارد، ناحیه‌ی R یعنی سایه‌ی S بر صفحه‌ی xy هم دایره‌ای به شعاع یک است. مساحت S و مساحت R با هم برابر است.

۱۴ـ گزینه «۳» معادله پارامتری پاره‌خطی که از $C(0,0,0)$ به $B(1,1,1)$ کشیده می‌شود چنین است: $\vec R(t)=C+t(B-C)=(t,t,t)$ که $0\le t\le 1$.

بنابراین $x=y=z=t$ و $dx=dy=dz=dt$ پس با پارامتری‌کردن مسیر خواهیم داشت:

$$\int\vec A.dr=\int_C(3x^2-6yz)dx+(2y+3xz)dy+(1-4xyz^2)dz=\int_0^1(3t^2-6t^2)+(2t+3t^2)+(1-4t^4)dt$$

$$=\int_0(1+2t-4t^4)dt=\left(t+\frac{2}{2}t^2-\frac{4}{5}t^5\right)\Big|_0^1=\frac{6}{5}$$

رشته عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴

۱ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-1}{x^n+1}\right)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) $+\infty$

۲ـ اگر $(\cos y)^x=(\sin x)^y$ باشد، مقدار $\dfrac{dy}{dx}$ در نقطه $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{\ln 2}{\pi}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\pi\ln 2$

۳ـ اگر $I_n=\int x^2(\ln x)^n\,dx$ باشد، کدام رابطه زیر صحیح است؟

۱) $I_{n+1}+(n+1)I_n=x^3(\ln x)^n$
۲) $3I_{n+1}+nI_n=x^3(\ln x)^{n+1}$
۳) $3I_{n+1}+(n+1)I_n=x^3(\ln x)^n$
۴) $3I_{n+1}+(n+1)I_n=x^3(\ln x)^{n+1}$

۴ـ اگر $b=\int_0^1\dfrac{x^4dx}{1+\tanh^4 x}$ آنگاه کدام مورد در رابطه با b صحیح است؟

۱) $b=\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{2}<b<1$ ۳) $\frac{1}{10}<b<\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{15}<b<\frac{1}{10}$

۵ـ مساحت ناحیه درون دایره $r=3\sin\theta$ و بیرون $r=2-\sin\theta$ واقع در ربع اول، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{3}$

۶ـ اگر θ_1 و θ_2 و θ_3 زوایای یک مثلث باشند، حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ $(\sin\theta_1-i\cos\theta_1)(\sin\theta_2-i\cos\theta_2)(\sin\theta_3-i\cos\theta_3)$

۱) $-i$ ۲) -1 ۳) $+i$ ۴) 1

۷ـ اگر $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(\cos\frac{1}{n})$ و $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5(\sqrt{3}+1)^n}{5^n}$ باشد، کدام مورد در خصوص A و B صحیح است؟

۱) A همگرا و B همگرا ۲) A همگرا و B واگرا ۳) A واگرا و B همگرا ۴) A واگرا و B واگرا

۸ـ انحنای منحنی $x^3+y^3=xy$ در نقطه $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{2}$ ۳) $16\sqrt{2}$ ۴) $32\sqrt{2}$

۹ـ اگر $u=\tan^{-1}\dfrac{x^3+y^3}{x-y}$ باشد، حاصل عبارت $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

۱) $\cos u$ ۲) $\sin u$ ۳) $\cos 2u$ ۴) $\sin 2u$

۱۰ـ حاصل انتگرال $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1(\dfrac{\cos(y^2)}{\sqrt{x}})dydx$ کدام است؟

۱) $\sin 1$ ۲) $\cos 1$ ۳) $\tan 1$ ۴) $\cot 1$

۱۱ـ اگر R ناحیه محصور به صفحات $x=-1,y=\frac{\pi}{2},z=0,z=y$ و $y-x=1$ باشد، حاصل $\iiint\limits_R y\cos z\,dv$، کدام است؟

۱) $\pi-2$ ۲) 2 ۳) π ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۱۲ـ اگر C مرز ذوزنقه با رئوس $(1,1)$ و $(1,2)$ و $(2,3)$ و $(2,1)$ باشد که یک بار در جهت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود و $\vec{F}(x,y)=(e^{x^4}+y^2,xy+\sin(\ln y))$ باشد، $\oint_C\vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۱۳ـ اگر D ناحیه داده شده با $x^2+y^2\ge a^2,x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ و S سطح ناحیه D باشد، انتگرال $\iint\limits_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$ برای میدان برداری $\vec{F}=(x+yz)\vec{i}+(y-xz)\vec{j}+(z-e^x\sin y)\vec{k}$ روی رویه S کدام است؟

۱) $4\pi a^3\sqrt{3}$ ۲) $8\pi a^3\sqrt{3}$ ۳) $12\pi a^3\sqrt{3}$ ۴) $16\pi a^3\sqrt{3}$

پاسخنامه رشته عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴

۱ـ گزینه «۳» با توجه به ترتیب نوشته شده، ابتدا x را عددی ثابت فرض می‌کنیم (البته $x>۱$ است) و n را به سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم. برای محاسبهٔ حد در بی‌نهایت، فقط جملاتی مهم هستند که دارای بیشترین رشد باشند و از آنجا که $x\to ۱^+$، بنابراین جملات x^n در صورت و مخرج باقی می‌مانند و اعداد ثابت ۱− و ۱+ حذف می‌شوند، در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۱^+}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-۱}{x^n+۱}\right)=\lim_{x\to ۱^+}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^n}\right)=۱$$

۲ـ گزینه «۲» ضابطهٔ تابع به‌طور ضمنی بیان شده، بنابراین به کمک مشتق‌گیری ضمنی داریم: $f(x,y)=(\cos y)^x-(\sin x)^y=۰$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{(\cos y)^x \operatorname{Ln}(\cos y)-y(\cos x)(\sin x)^{y-۱}}{x(-\sin y)(\cos y)^{x-۱}-(\sin x)^y \operatorname{Ln}(\sin x)}\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۴})}=-\frac{(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{\frac{\pi}{۲}}\operatorname{Ln}(\frac{۱}{\sqrt{۲}})-۰}{\frac{\pi}{۲}(\frac{-۱}{\sqrt{۲}})(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{\frac{\pi}{۲}-۱}-۰}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\frac{-۲\sqrt{۲}}{\pi}\right)\operatorname{Ln}\frac{۱}{\sqrt{۲}}=-\frac{\operatorname{Ln}۲}{\pi}$$

۳ـ گزینه «۴» به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء حاصل $I_{n+۱}$ را حساب می‌کنیم: $I_{n+۱}=\int x^۲(\operatorname{Ln}x)^{n+۱}dx$

$$\begin{cases}(\operatorname{Ln}x)^{n+۱}=u\ \to du=(n+۱)\frac{۱}{x}(\operatorname{Ln}x)^n\\ x^۲dx=dv\ \to v=\frac{x^۳}{۳}\end{cases}$$

$$I_{n+۱}=\int x^۲(\operatorname{Ln}x)^{n+۱}dx=\frac{x^۳}{۳}(\operatorname{Ln}x)^{n+۱}-\frac{(n+۱)}{۳}\underbrace{\int x^۲(\operatorname{Ln}x)^n dx}_{I_n}$$

در نتیجه $I_{n+۱}=\frac{x^۳}{۳}(\operatorname{Ln}x)^{n+۱}-\frac{n+۱}{۳}I_n$، با ضرب طرفین تساوی در ۳ داریم: $۳I_{n+۱}+(n+۱)I_n=x^۳(\operatorname{Ln}x)^{n+۱}$

۴ـ گزینه «۳» می‌دانیم که $-۱<\tanh x<۱$، بنابراین: $۰\le\tanh^۴ x<۱$ داریم و با جمع‌کردن یک واحد به طرفین داریم:

$$۱\le ۱+\tanh^۴ x<۲\xrightarrow{\text{وارون}}\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{۱+\tanh^۴ x}\le ۱$$

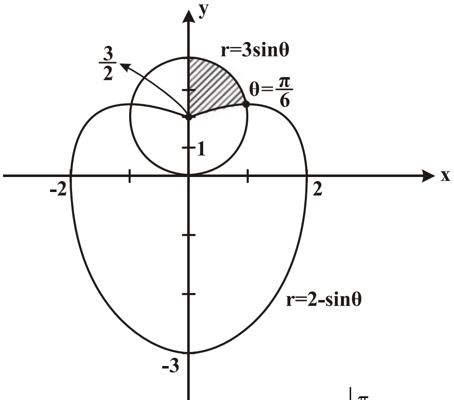
با ضرب طرفین در $x^۴$، $f(x)$ را به‌وجود می‌آوریم:

$$\frac{x^۴}{۲}<\frac{x^۴}{۱+\tanh^۴ x}<x^۴\Rightarrow\frac{x^۴}{۲}<f(x)<x^۴\xrightarrow{\text{انتگرال}}\int_۰^۱\frac{x^۴}{۲}dx<\int_۰^۱ f(x)dx<\int_۰^۱ x^۴dx\to\left.\frac{x^۵}{۱۰}\right|_۰^۱<b<\left.\frac{x^۵}{۵}\right|_۰^۱\Rightarrow\boxed{\frac{۱}{۱۰}<b<\frac{۱}{۵}}$$

۵ـ گزینه «۲» ابتدا محل تقاطع دو منحنی قطبی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}f(\theta)=۳\sin\theta\\ g(\theta)=۲-\sin\theta\end{cases}\Rightarrow f(\theta)=g(\theta)\Rightarrow ۳\sin\theta=۲-\sin\theta\Rightarrow\sin=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۶}$$

اگر سایر نقاط برخورد را می‌خواستیم معادله‌ی $f(\theta)=(-۱)^n g(\theta+n\pi)$ را حل می‌کردیم. اما چون ناحیه‌ی واقع در ربع اول را می‌خواهیم، مطابق شکل به سایر برخوردها نیازی نداریم.



ناحیه مورد نظر در شکل مقابل رسم شده است. در این ناحیه داریم $\frac{\pi}{۶}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$.

با توجه به فرمول محاسبهٔ مساحت در مختصات قطبی داریم:

$$A=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}((۳\sin\theta)^۲-(۲-\sin\theta)^۲)d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}(۹\sin^۲\theta-\sin^۲\theta-۴+۴\sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}(۸\underbrace{\sin^۲\theta}_{\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}}+۴\sin\theta-۴)d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}(۴(۱-\cos ۲\theta)+۴\sin\theta-۴)d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}(۴\theta-۲\sin ۲\theta-۴\cos\theta-۴\theta)\Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۱}{۲}\left(۰-\left(-۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)-۴\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\right)\right)=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

۶ـ گزینه «۱» با توجه به فرمول اویلر می‌دانیم که $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$، بنابراین: $ie^{i\theta}=i\cos\theta-\sin\theta \Rightarrow -ie^{i\theta}=\sin\theta-i\cos\theta$

به کمک تساوی اخیر داریم:

$$(\sin\theta_1-i\cos\theta_1)(\sin\theta_2-i\cos\theta_2)(\sin\theta_3-i\cos\theta_3)=(-ie^{i\theta_1})(-ie^{i\theta_2})(-ie^{i\theta_3})=-i^3e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=-i^2(i)e^{i\pi}=+i(\underbrace{\cos\pi}_{-1}+\underbrace{i\sin\pi}_{0})=-i$$

۷ـ گزینه «۱» برای n های به اندازهٔ کافی بزرگ $\cos\frac{1}{n}\sim 1-\frac{1}{2n^2}$ و $\mathrm{Ln}(\cos\frac{1}{n})\sim \mathrm{Ln}(1-\frac{1}{2n^2})\sim\frac{-1}{2n^2}$ و بنابراین $\sum_n \mathrm{Ln}(\cos\frac{1}{n})$ رفتاری مشابه سری $\sum_n\frac{-1}{2n^2}$ که یک سری از نوع P با $P=2>1$ و همگراست، دارد و این یعنی سری A همگراست.

برای تعیین همگرایی B از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^5(\sqrt{3}+1)^n}{5^n}}=\frac{\sqrt{3}+1}{5}<1\Rightarrow (\text{پس سری B همگراست } L<1)$$

۸ـ گزینه «۲» به کمک مشتق‌گیری ضمنی، مشتق y نسبت به x را از معادله‌ی $f(x,y)=x^3+y^3-xy=0$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} y'=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}=-\dfrac{3x^2-y}{3y^2-x}\xrightarrow{x=y=\frac{1}{2}} y'=-\dfrac{3(\frac{1}{4})-\frac{1}{2}}{3(\frac{1}{4})-\frac{1}{2}}=-1 \\ y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{(6x-y')(3y^2-x)-(6yy'-1)(3x^2-y)}{(3y^2-x)^2}\xrightarrow[y'=-1]{x=y=\frac{1}{2}} y''=-32 \end{cases}$$

با توجه به فرمول انحنا داریم:

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{32}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{2^5}{2^{\frac{3}{2}}}=2^{\frac{7}{2}}=8\sqrt{2}$$

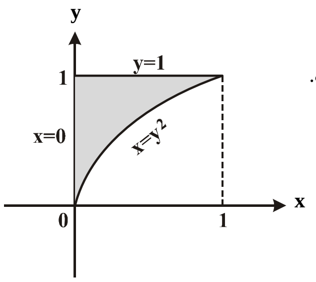
۹ـ گزینه «۴» قرار می‌دهیم: $f(u)=\mathrm{tg}u=\frac{x^3+y^3}{x-y}$، در کسر $z=\frac{x^3+y^3}{x-y}$، درجه‌ی صورت ۳ و درجه مخرج ۱ است. پس این کسر همگن از مرتبهٔ ۲ است، بنا به قضیهٔ اویلر برای همگن داریم: $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2f$. از طرفی با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=x\underbrace{(\frac{\partial f}{\partial u})}_{\sec^2u}\frac{\partial u}{\partial x}+y\underbrace{(\frac{\partial f}{\partial u})}_{\sec^2u}\frac{\partial u}{\partial y}=2\mathrm{tg}u\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2\mathrm{tg}u}{\sec^2u}=2\mathrm{tg}u\cos^2u=\frac{2\sin u}{\cos u}\cos^2u=2\sin u\cos u=\sin 2u$$

یادآوری: تابع $z=f(x,y)$ همگن از درجهٔ n است هرگاه به ازای هر $\lambda>0$ داشته باشیم: $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$

و بنابر قضیهٔ اویلر برای چنین تابعی داریم: $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$

۱۰ـ گزینه «۱» انتگرال‌گیری با این ترتیب مشکل است، پس ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را که بین $y=\sqrt{x}$ و $y=1$ قرار دارد و در آن $0\le x\le 1$ است، رسم می‌کنیم و سپس با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری، مسأله را حل می‌کنیم.



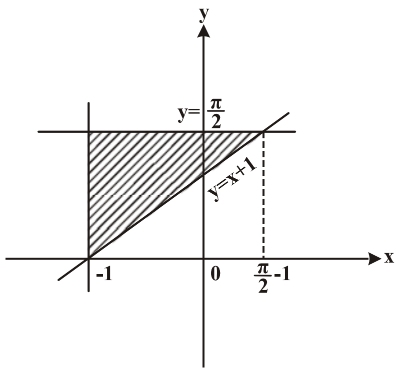
حدود y عبارتند از $0\le y\le 1$ و اگر در جهت محور x ها حرکت کنیم، $x=0$ مرز ورودی و $x=y^2$ مرز خروجی است.

با این ترتیب، انتگرال به سادگی حل می‌شود:

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\frac{\cos y^2}{\sqrt{x}}dy\,dx=\int_0^1\int_0^{y^2}\frac{\cos y^2}{\sqrt{x}}dx\,dy=\int_0^1(\cos y^2)2\sqrt{x}\Big|_0^{y^2}dy=\int_0^1 2y\cos y^2dy=\sin y^2\Big|_0^1=\sin 1-\sin 0=\sin 1$$

۱۱ـ گزینه «۱» کران‌های z واضح هستند. در این ناحیه داریم $0 \le z \le y$. برای تعیین حدود x و y، در صفحه‌ی xoy خطوط $y-x=1$، $x=-1$ و $y=\frac{\pi}{2}$ را رسم می‌کنیم. خطوط $y=x+1$ و $y=\frac{\pi}{2}$ در $x=\frac{\pi}{2}-1$ با هم برخورد می‌کنند.

پس در این ناحیه داریم: $-1 \le x \le \frac{\pi}{2}-1$ و $x+1 \le y \le \frac{\pi}{2}$

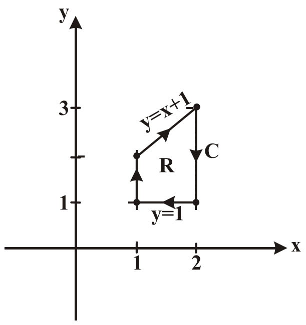


$$I=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}\int_{x+1}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{y} y\cos z\,dz\,dy\,dx=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}\int_{x+1}^{\frac{\pi}{2}}[y\sin z]_{0}^{y}\,dy\,dx=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}\int_{x+1}^{\frac{\pi}{2}} y\sin y\,dy\,dx$$

به کمک انتگرال‌گیری جزء به جز (روش جدول) داریم:

$$I=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}(\sin y-y\cos y)\Big|_{x+1}^{\frac{\pi}{2}}dx=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}(1-\sin(x+1)+(x+1)\cos(x+1))dx=x+2\cos(x+1)+(x+1)\sin(x+1)\Big|_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}=\pi-2$$

۱۲ـ گزینه «۴» مرز C و ناحیهٔ محصور شده توسط آن در شکل زیر نمایش داده شده است:



منحنی C در جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده است کـه عکس جهت مثلثاتی است، پس طبق قضیهٔ گرین داریم:

$$I=\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=-\iint_R(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA$$

$$=-\iint_R(y-2y)dA=\int_1^2\int_1^{x+1}y\,dy\,dx$$

$$\Rightarrow I=\int_1^2\frac{y^2}{2}\Big|_1^{x+1}dx=\int_1^2(\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{1}{2})dx=\frac{1}{2}\int_1^2(x^2+2x)dx=\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3}+x^2)\Big|_1^2=\frac{8}{3}$$

۱۳ـ گزینه «۳» S یک سطح بسته است که ناحیه T را محدود کرده است. پس به کمک قضیهٔ دیورژانس داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_T \text{div}\vec{F}dv=\iiint_T(1+1+1)dv=3(T\ \text{حجم جسم})$$

که در آن T جسم توپُر بین کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4a^2$ و استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ است. برای محاسبهٔ این حجم از انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای کمک می‌گیریم.

حدود z از معادله‌ی کره به دست می‌آیند: $z=\pm\sqrt{4a^2-x^2-y^2}=\pm\sqrt{4a^2-r^2}$. البته چون تبدیل z به ‎$-z$‎ معادله‌ی کره را تغییر نمی‌دهد پس می‌توانیم حجم ناحیه‌ی $z\ge 0$ را حساب کرده و ۲ برابر کنیم. یعنی $0\le z\le\sqrt{4a^2-r^2}$.

برای تشخیص حدود r دقت کنید که سایه‌ی این شکل بین دو دایره با شعاع‌های a و 2a قرار دارد.

$$V=2\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}}\int_0^{2\pi}\int_a^{2a}r\,dz\,dr\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\int_a^{2a}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{2a}d\theta=\frac{-4\pi}{3}(0-(3a^2)^{\frac{3}{2}})=\frac{4\pi}{3}(3\sqrt{3}a^3)=4\sqrt{3}\pi a^3$$

بنابراین: $\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=12\pi\sqrt{3}a^3$.

رشته مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۲

۱ـ نقاط بحرانی تابع $z=x^3+y^3-9xy+27$ کدام است؟

۱) زینی $B\Big|_{3}^{3}$ ماکزیمم $A\Big|_{0}^{0}$
۲) زینی $B\Big|_{-1}^{1}$ مینیمم $A\Big|_{0}^{0}$
۳) ماکزیمم $B\Big|_{3}^{3}$ مینیمم $A\Big|_{0}^{0}$
۴) مینیمم $B\Big|_{3}^{3}$ زینی $A\Big|_{0}^{0}$

۲ـ اگر $(x \quad y \quad z)=(1 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$ باشد، مقدار $x-y-2z$ کدام است؟

۱) -2
۲) -1
۳) 1
۴) 2

۳ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) $\frac{2}{\pi}$
۳) 2π
۴) 3π

۴ـ شعاع همگرایی سری توانی $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n+1}}x^n$، کدام است؟

۱) $R=\infty$
۲) $R=1$
۳) $R=e$
۴) $R=\frac{1}{e}$

۵ـ در تابع $z=xe^y-\cos\frac{y}{x}$ مقدار $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ در نقطه $A\Big|_{0}^{1}$ کدام است؟

۱) -1
۲) صفر
۳) 1
۴) 2

پاسخنامه رشته مهندسی هوافضا ـ سراسری ۹۲

۱ـ گزینه «۴» ابتدا مشتق‌های جزئی را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}f_x=3x^2-9y=0 \Rightarrow 3y=x^2\\ f_y=3y^2-9x=0 \Rightarrow 3x=y^2\end{cases}$$

با جایگذاری معادله‌ی اول در معادله‌ی دوم داریم $3x=(\frac{x^2}{3})^2$ پس $27x=x^4$، یعنی $x(x^3-27)=0$ که به جواب‌های $x=0$ و $x=3$ منجر می‌شود. به ازای $x=0$ داریم $y=0$ و به ازای $x=3$ داریم $y=3$. (دقت کنید که باید تساوی $3y=x^2$ برقرار باشد).

پس نقاط بحرانی $A(0,0)$ و $B(3,3)$ به‌دست می‌آیند. با استفاده از آزمون Δ نوع آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$f_{xx}=6x \;,\; f_{yy}=6y \;,\; f_{xy}=-9$$
$$\Delta=(6x)(6y)-(-9)^2 \Rightarrow \Delta=36xy-81$$

در نقطه‌ی $A(0,0)$ مقدار Δ منفی است پس A نقطه‌ی زینی است.

در نقطه‌ی $B(3,3)$ مقادیر Δ و f_{xx} مثبت هستند پس B نقطه‌ی مینیمم است.

۲ـ گزینه «۲» با محاسبه‌ی ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$[x \quad y \quad z]=[1 \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&2&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}=[1+0-1 \quad -1+4+0 \quad 2-4+1] \Rightarrow [x \quad y \quad z]=[0 \quad 3 \quad -1]$$

حالا مقدار عبارت خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$x-y-2z=0-3+2=-1$$

۳ـ گزینه «۲» $\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})$ را به صورت $\frac{1}{\cot g(\frac{\pi x}{2})}$ می‌نویسیم تا فرم مبهم $\frac{0}{0}$ به وجود آید. سپس از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cot g(\frac{\pi x}{2})}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}(1+\cot g^2(\frac{\pi x}{2}))}=\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

۴ـ گزینه «۳» با توجه به جمله‌ی عمومی این سری که $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$ است و با استفاده از هم‌ارزی استرلینگ داریم:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{e}}{n} = \frac{1}{e}$$

پس $R = e$ است.

توضیح: در مخرج کسر دقت کنید که $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ پس داریم:

$$\sqrt[n]{n^{n+1}} = \sqrt[n]{n^n \times n} \simeq n \times 1$$

۵ـ گزینه «۳» با مشتق‌گیری نسبت به y آغاز می‌کنیم:

$$z = xe^y - \cos(\frac{y}{x}) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = xe^y + \frac{1}{x}\sin(\frac{y}{x}) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^y - \frac{1}{x^2}\sin(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x^2} \times \frac{1}{x}\cos(\frac{y}{x})$$

حالا با جایگذاری $(x, y) = (1, 0)$ داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^0 - \sin(0) - 0 = 1$$

رشته مهندسی هوافضا ــ سراسری ۹۳

۱ـ مختصات مرکز ثقل $\frac{1}{4}$ از بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ واقع در ربع اول با چگالی ثابت یک برابر است با:

۱) $X_C = \frac{2b}{3\pi}$, $Y_C = \frac{2a}{3\pi}$
۲) $X_C = \frac{2a}{3\pi}$, $Y_C = \frac{2b}{3\pi}$
۳) $X_C = \frac{4b}{3\pi}$, $Y_C = \frac{4a}{3\pi}$
۴) $X_C = \frac{4a}{3\pi}$, $Y_C = \frac{4b}{3\pi}$

۲ـ مقدار انتگرال $\int_0^a e^{-x^2} dx$ برابر است با:

۱) $a + \frac{a^3}{1!} + \frac{a^5}{2!} + \frac{a^7}{3!} + \cdots$
۲) $a - \frac{a^3}{1! \times 3} + \frac{a^5}{2! \times 5} - \frac{a^7}{3! \times 7} + \cdots$
۳) $a + \frac{a^3}{1! \times 3} + \frac{a^5}{2! \times 5} + \frac{a^7}{3! \times 7} + \cdots$
۴) انتگرال وجود دارد ولیکن قابل محاسبه نمی‌باشد.

۳ـ حد $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^p}$ (m و n و p اعداد صحیح و نامنفی) موجود است هرگاه:

۱) $m + n < 2p$
۲) $m + n > 2p$
۳) $m + n \le 2p$
۴) $m + n \ge 2p$

۴ـ اگر $\lim_{x\to 0^-} f(x) = B$ ، در این صورت، $\lim_{x\to 0^+} f(x^5 - x^2)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) B
۳) $B^3 - B^5$
۴) $B^5 - B^3$

پاسخنامه رشته مهندسی هوافضا ــ سراسری ۹۳

۱ــ گزینه «۴» چگالی ثابت یک است. یعنی $\rho(x,y)=1$ است. پس مرکز ثقل این شکل، همان مرکز هندسی است. طول و عرض مرکز ثقل با این روابط به‌دست می‌آیند:

$$x_c=\frac{\iint_D x\,dA}{\iint_D dA}=\frac{\iint_D x\,dA}{\text{مساحت } D}$$

مساحت این بیضی برابر است با πab، البته ناحیه‌ی D فقط ربع اول از این بیضی است و مساحت آن $\frac{1}{4}\pi ab$ است.

مطابق متن درس برای نواحی بیضوی از تغییر متغیر بیضوی استفاده می‌کنیم پس برای محاسبه‌ی صورت کسر، از تغییر متغیر بیضوی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}\Rightarrow J_{r\theta}=abr$$

در ربع اول بیضی داریم $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و چون با انجام این تغییر متغیر، بیضی مورد نظر به دایره‌ی واحد تبدیل می‌شود، پس $0\le r\le 1$ است.

$$\iint_D x\,dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(ar\cos\theta)\,(abr)\,dr\,d\theta=a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=a^2b[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{r^3}{3}]_0^1=\frac{a^2b}{3}$$

بنابراین:

$$x_c=\frac{\frac{1}{3}a^2b}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4a}{3\pi}$$

در نتیجه گزینه‌ی (۴) صحیح است.

برای حل کامل‌تر، محاسبه‌ی y_c را به صورت خلاصه می‌نویسیم:

$$y_c=\frac{\iint_D y\,dA}{(\text{مساحت } D)}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(br\sin\theta)\,(abr)\,dr\,d\theta}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{a^2b[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{r^3}{3}]_0^1}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4b}{3\pi}$$

۲ــ گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها جواب باید به صورت یک سری به‌دست آید. بنابراین ابتدا بسط مک‌لورن e^{-x^2} را می‌نویسیم و سپس جمله به جمله انتگرال می‌گیریم:

$$e^u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\Rightarrow e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\Rightarrow I=\int_0^a e^{-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^a x^{2n}dx\Rightarrow I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}]_0^a\Rightarrow I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{a^{2n+1}}{2n+1})$$

$$\Rightarrow I=a-\frac{a^3}{1!\times 3}+\frac{a^5}{2!\times 5}-\cdots$$

۳ــ گزینه «۲» با توجه به وجود x^2+y^2 در مخرج کسر می‌توانیم از فرم قطبی استفاده کنیم. با جایگذاری $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ داریم:

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^m(r\sin\theta)^n}{(r^2)^p}=\lim_{r\to 0}\frac{r^{n+m}\cos^m\theta\sin^n\theta}{r^{2p}}$$

اگر $2p>n+m$ باشد، مقدار این حد، $\pm\infty$ خواهد بود. پس حد وجود ندارد.

اگر $2p=n+m$ باشد، متغیر r حذف می‌شود و جواب حد به θ بستگی پیدا می‌کند. پس حد وجود ندارد.

اگر $2p<n+m$ باشد، متغیر r از مخرج ساده می‌شود و در صورت باقی می‌ماند. در این حالت جواب حد برابر با صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار حد فقط در حالت $2p<n+m$ موجود است.

۴ــ گزینه «۲» با توجه به قاعده‌ی کمترین درجه، وقتی $x\to 0^+$ خواهیم داشت: $x^5-x^2\simeq -x^2$ در نتیجه وقتی $x\to 0^+$ خواهیم داشت $-x^2\to 0^-$ (زیرا $-x^2$ همواره منفی است). بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x^5-x^2)=\lim_{x\to 0^+}f(-x^2)=f(0^-)=B$$

رشته معماری کشتی ـ سراسری ۹۱

۱ـ سطح محصور بین منحنی $y=x^۲$ و خط $y=۲$ توسط خط $y=c$ به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. در آن صورت c کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۲ـ اگر $F(x)$ یک تابع زوج باشد، آنگاه مشتق آن همواره چگونه است؟

۱) زوج ۲) فرد ۳) گاهی زوج و گاهی فرد ۴) ممکن است نه زوج باشد نه فرد

۳ـ کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{n+۱}}{(n+۱)^۲}$ صحیح است؟

۱) همگرا نیست. ۲) همگرای بی‌قید و شرط است. ۳) در فاصله $[۰,۱]$ همگرا است. ۴) در فاصله $[-۱,۱]$ همگرا است.

۴ـ ماکزیمم تابع F که به صورت $t>۰$, $F(t)=\frac{\mathrm{Ln}\, t}{t}$ تعریف شده کدام است؟

۱) $\frac{۱}{e}$ ۲) ۱ ۳) e ۴) $۱+e$

۵ـ مقادیر اکسترمم مطلق تابع $f(x,y)=e^{-۲x^۲-۲y^۲}$ روی دایره واحد $x^۲+y^۲\le ۱$ چگونه‌اند؟

۱) ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع وجود ندارد. ۲) ماکزیمم مطلق برابر با ۱ ولی مینیمم مطلق ندارد.

۳) مقدار ماکزیمم مطلق برابر با ۱ و مینیمم مطلق برابر با $\frac{۱}{e^۲}$ است. ۴) مینیمم مطلق برابر با ۰ است ولی ماکزیمم مطلق برابر با ۱ است.

۶ـ منحنی c با معادلات ضمنی مقابل داده شده است: $\begin{cases} x+y=۱ \\ xy=t \end{cases}$

انحناء منحنی همواره برابر است با:

۱) ۰ پس منحنی c یک خط است. ۲) ۱ پس منحنی c یک دایره است.

۳) بستگی به نقطه منحنی دارد و شکل c یک بیضی است. ۴) ۱ پس منحنی c یک سهمی است.

۷ـ هرگاه برای تابعی $f(۰)=۰$ و برای هر x داشته باشیم $f'(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}$ آنگاه کدام گزینه برای $f(۲)$ صحیح است؟

۱) $۱<f(۲)<۲$ ۲) $\frac{۱}{۵}<f(۲)<\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}<f(۲)<\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۵}<f(۲)<۲$

پاسخنامه رشته معماری کشتی ـ سراسری ۹۱

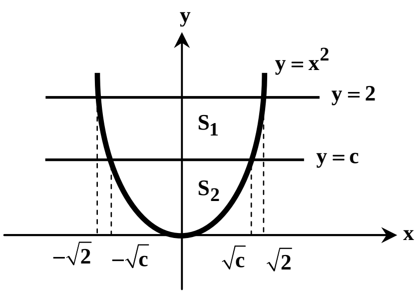
۱ـ گزینه «۳» منحنی $y=x^۲$ و خط $y=۲$ را برخورد می‌دهیم.

$x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$

حالا خط $y=c$ را با $y=x^۲$ برخورد می‌دهیم:

$x^۲=c \Rightarrow x=\pm\sqrt{c}$

مطابق شکل داریم:



$$S_۱=S_۲ \Rightarrow \iint_{S_۱} dxdy=\iint_{S_۲} dxdy$$

چون حدود y عدد ثابت هستند بهتر است آن‌ها را در انتگرال بیرونی بنویسیم. به همین علت ترتیب $dx\,dy$ را انتخاب کرده‌ایم. حدود x از معادله‌ی $y=x^۲$ به صورت $x=\pm\sqrt{y}$ به دست می‌آیند.

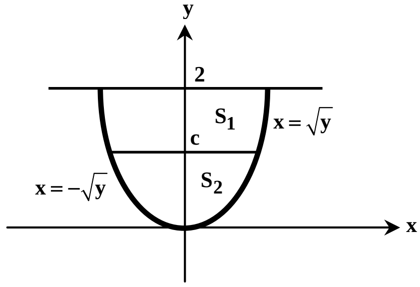
$$I_۱=\iint_{S_۱} dxdy=\int_c^۲\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdy=\int_c^۲ ۲\sqrt{y}dy=[\frac{۴}{۳}y^{\frac{۳}{۲}}]_c^۲$$

$$I_۲=\iint_{S_۲} dxdy=\int_۰^c\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdy=\int_۰^c ۲\sqrt{y}dy=[\frac{۴}{۳}y^{\frac{۳}{۲}}]_۰^c$$

$$I_۱=I_۲ \Rightarrow \frac{۴}{۳}(۲^{\frac{۳}{۲}}-c^{\frac{۳}{۲}})=\frac{۴}{۳}(c^{\frac{۳}{۲}}-۰) \Rightarrow ۲c^{\frac{۳}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow c^{\frac{۳}{۲}}=۲^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow c=۲^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۲}$$

روش دوم: با استفاده از انتگرال یگانه هم می‌توانیم مسأله را حل کنیم. ابتدا همانند روش قبل نقاط برخورد $y=x^۲$ را با خطوط $y=۲$ و $y=c$ مشخص می‌کنیم.

ناحیه‌ی $S_۱$ در بازه‌ی $c\le y\le ۲$ و بین منحنی‌های $x=\pm\sqrt{y}$ قرار دارد.



$$S_۱=\int_c^۲[\sqrt{y}-(-\sqrt{y})]dy=\int_c^۲ ۲\sqrt{y}\,dy=[\frac{۴}{۳}y^{\frac{۳}{۲}}]_c^۲$$

برای $S_۲$ داریم:

$$S_۲=\int_۰^c[\sqrt{y}-(-\sqrt{y})]dy=[\frac{۴}{۳}y^{\frac{۳}{۲}}]_۰^c$$

ادامه‌ی حل مانند روش اول خواهد بود.

۲ـ گزینه «۲» مشتق هر تابع زوج، تابعی فرد است. اثبات این موضوع ساده است:

$F(x)$ زوج است $\Rightarrow F(-x)=F(x) \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} -F'(-x)=F'(x) \Rightarrow$ $F'(x)$ فرد است

۳ـ گزینه «۴» جمله‌ی عمومی این سری توانی $a_n=\frac{۱}{(n+۱)^۲}$ است و برای هر چند جمله‌ای داریم $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{P(n)}=۱$ پس:

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{۱}{(n+۱)^۲}}=۱ \Rightarrow R=۱$$

شعاع همگرایی این سری $R=۱$ است. این سری حول $c=۰$ نوشته شده است. پس در بازه‌ی $(-۱,۱)$ همگراست.

در نقاط $x=\pm۱$ به سری‌های $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(n+۱)^۲}$ و $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n+۱)^۲}$ می‌رسیم که هر دو همگرایند. پس بازه‌ی همگرایی این سری، $[-۱,۱]$ است.

۴ـ گزینه «۳» ابتدا نقاط بحرانی $F(t)$ را در بازه‌ی $(۰,\infty)$ پیدا می‌کنیم:

$$F'(t)=-\frac{۱}{t^۲}Lnt+\frac{۱}{t}\frac{۱}{t}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{t^۲}(-Lnt+۱)=۰ \Rightarrow Lnt=۱ \Rightarrow t=e$$

حالا مقدار $F(t)$ را در نقطه‌ی $t=e$ و در مرزهای دامنه، محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to۰^+}F(t)=\frac{Ln(۰^+)}{۰^+}=\frac{-\infty}{۰^+}=-\infty\\ F(e)=\frac{Lne}{e}=\frac{۱}{e}\\ \lim\limits_{t\to\infty}F(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{Ln(t)}{t}=۰\ (\text{سرعت رشد مخرج بیشتر است})\end{cases}$$

پس بیشترین مقدار $F(t)$ برابر با e است.

۵ـ گزینه «۳» **روش اول:** ابتدا نقاط بحرانی درون دایره‌ی واحد را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}f_x=-۴xe^{-۲x^۲-۲y^۲}=۰ \Rightarrow x=۰\\ f_y=-۴ye^{-۲x^۲-۲y^۲}=۰ \Rightarrow y=۰\end{cases}$$

پس نقطه‌ی $(۰,۰)$ تنها نقطه بحرانی درون این ناحیه است. در این نقطه داریم $f(۰,۰)=e^۰=۱$.

حالا روی مرز $x^۲+y^۲=۱$ داریم:

$$f(x,y)=e^{-۲(x^۲+y^۲)}=e^{-۲}$$

به این ترتیب دیدیم که $\max f=۱$ و $\min f=\frac{۱}{e^۲}$ است.

روش دوم: در این ناحیه داریم $۰\le x^۲+y^۲\le ۱$ در نتیجه:

$$e^{-۲(۱)}\le e^{-۲(x^۲+y^۲)}\le e^{-۲(۰)} \Rightarrow \frac{۱}{e^۲}\le f(x,y)\le ۱$$

۶ـ گزینه «۱» اگرچه صورت سؤال ظاهراً مشکل است اما راه‌حل بسیار ساده‌ای دارد. معادله‌ی $x+y=۱$ نشان می‌دهد که منحنی c قسمتی از خط $x+y=۱$ است و همان‌طور که می‌دانید، انحنای یک خط راست در همه‌ی نقاط، برابر با صفر است.

۷ـ گزینه «۴» در این سؤال هدف ما یافتن ضابطه‌ی $f(x)$ نیست، بلکه یافتن کران بالا و پایین برای $f(۲)$ است.

طبق قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$f(۲)-f(۰)=f'(c)(۲-۰)\ ,\ c\in(۰,۲) \Rightarrow f(۲)-۰=\frac{۲}{۱+c^۲}$$

حالا $c\in(۰,۲)$ پس داریم:

$$\frac{۲}{۱+۴}<\frac{۲}{۱+c^۲}<\frac{۲}{۱+۰} \Rightarrow \frac{۲}{۵}<f(۲)<۲$$

رشته معماری کشتی ــ سراسری ۹۲

۱ــ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}$ در صورت وجود، برابر کدام است؟

۱) 0
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) وجود ندارد زیرا حد چپ و راست برابر نیستند.

۲ــ ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی $r = 1+\sin\theta$ و $0 \le \theta \le 2\pi$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\cos\theta-\sin 2\theta}{\cos 2\theta+\sin\theta}$
۲) $\dfrac{\cos\theta-\sin 2\theta}{\cos 2\theta-\sin\theta}$
۳) $\dfrac{\cos\theta+\sin 2\theta}{\cos 2\theta-\sin\theta}$
۴) $\dfrac{\cos\theta+\sin 2\theta}{\cos 2\theta+\sin\theta}$

۳ــ مساحت محصور به منحنی $x^2-y^2 = 2(x^2+y^2)^2$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) 1
۳) $\sqrt{2}$
۴) 2

۴ــ حاصل $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}dx$ برابر کدام است؟

۱) $\ln\frac{2}{5}$
۲) $\ln\frac{4}{5}$
۳) $\ln\frac{5}{4}$
۴) $\ln\frac{5}{2}$

۵ــ حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx$ برابر کدام است؟

۱) $-\tan^{-1}\frac{1}{2}$
۲) $-\tan^{-1}1$
۳) $\tan^{-1}1$
۴) $\tan^{-1}\frac{1}{2}$

۶ــ اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد و $a_n \ge 0$، آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ ....

۱) همواره واگرا است.
۲) همواره همگرا است.
۳) همگرای مطلق است.
۴) در حالت کلی همگرا نیست.

پاسخنامه رشته معماری کشتی ــ سراسری ۹۲

۱ــ گزینه «۲» با جایگذاری $x=0$ به فرم مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم زیرا $\int_0^0 \sin\sqrt{t}\,dt = 0$ است:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3} = \frac{0}{0}$$

با توجه به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ از قاعده هوپیتال و مشتق‌گیری از انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$\text{حد} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2} \sim \lim_{x\to 0}\frac{2x(x)}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

۲ــ گزینه «۳» ضریب زاویه‌ی خط مماس برابر است با $\frac{dy}{dx}$ و همچنین، با توجه به ضابطه‌ی x و y بر حسب θ داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \ ,\ \begin{cases} y = f(\theta)\sin\theta \\ x = f(\theta)\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

کافیست که تابع $f(\theta) = 1+\sin\theta$ و $f'(\theta) = \cos\theta = \cos\theta$ را در رابطه فوق جایگذاری کنیم:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta\sin\theta + (1+\sin\theta)\cos\theta}{\cos^2\theta - (1+\sin\theta)\sin\theta} = \frac{\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta - \sin\theta}$$

بنابراین ضریب زاویه خط مماس برابر است با:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta+\sin 2\theta}{\cos 2\theta - \sin\theta}$$

۳ـ گزینه «۱» معادله‌ی منحنی $x^2-y^2=2(x^2+y^2)^2$ را در دستگاه قطبی می‌نویسیم:

$$r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=2r^4 \Rightarrow r^2\cos2\theta=2r^4$$

از همین معادله دو کران برای r به‌دست می‌آید که عبارتند از $r=0$ و $r=\sqrt{\frac{\cos2\theta}{2}}$. با توجه به تساوی $r=\sqrt{\frac{\cos2\theta}{2}}$ می‌توانیم حدود θ را هم پیدا کنیم.

باید $\cos2\theta\ge 0$ باشد. پس 2θ باید در ربع اول یا ربع چهارم باشد.

$$0\le2\theta\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{2}\le2\theta\le2\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi$$

البته با توجه به آن‌که تبدیل x به $-x$ و تبدیل y به $-y$ معادله‌ی منحنی $x^2-y^2=(x^2+y^2)^2$ را تغییر نمی‌دهد، متوجه می‌شویم این ناحیه نسبت به هر دو محور x و y تقارن دارد. پس می‌توانیم قسمت واقع در ربع اول آن را حساب کرده و ۴ برابر کنیم.

پس کافیست ناحیه‌ی $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ و $0\le r\le\sqrt{\frac{\cos2\theta}{2}}$ را محاسبه کرده و ۴ برابر کنیم.

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{r^2}{2}\right)d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\frac{\cos2\theta}{2}}\right)^2d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

۴ـ گزینه «۲» با استفاده از تفکیک کسرها داریم:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases}A+B=1\\ C=0\\ A=-1\Rightarrow B=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}$$

بنابراین انتگرال داده شده برابر است با:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=[-\mathrm{Ln}x+\mathrm{Ln}(x^2+1)]\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\mathrm{Ln}\frac{x^2+1}{x}\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\mathrm{Ln}2-\mathrm{Ln}\frac{5}{2}=\mathrm{Ln}\frac{2}{\frac{5}{2}}=\mathrm{Ln}\frac{4}{5}$$

۵ـ گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر $u=\sin^2x$ داریم:

$$\sin^2x=u \Rightarrow 2\sin x\cos x\,dx=du \Rightarrow \sin2x\,dx=du\ ,\ \begin{cases}x=0\Rightarrow u=0\\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=\frac{1}{2}\end{cases}$$

با جایگذاری این روابط در انتگرال داده شده داریم:

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{du}{1+u^2}=\mathrm{tg}^{-1}u\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{2}$$

۶ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست می‌توان دو مثال زیر را در نظر گرفت که در یکی از آن‌ها $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ همگراست ولی برای دیگری سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ واگراست.

برای $a_n=\frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow$ همگراست

برای $a_n=\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \Rightarrow$ واگراست

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) غلط می‌باشند و گزینه‌ی (۴) صحیح است.

رشته معماری کشتی ـ سراسری ۹۳

۱ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n}{2n-1}\right)^2$ چه وضعیتی را دارد؟

۱) همگراست. ۲) واگراست.

۳) همگرایی و واگرایی به زوج یا فرد بودن n بستگی دارد. ۴) نمی‌توان نظر خاصی داد و بستگی به توان جمله سری دارد.

۲ـ مجموع جملات سری $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}]$ کدام است؟

۱) $\ln\frac{2}{3}$ ۲) $\ln 1$ ۳) $\ln\frac{1}{2}$ ۴) $\ln 2$

۳ـ حد دنباله با جمله عمومی $x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ ۲) $\frac{a-\sqrt{1+4a}}{2}$ ۳) $\frac{a+\sqrt{1+4a}}{2}$ ۴) $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$

۴ـ کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ صحیح است؟

۱) همواره واگرا است. ۲) برای $|x|<1$ همگرای مطلق است.

۳) برای $|x|<1$ واگراست. ۴) برای $|x|>1$ همگرای مطلق است.

۵ـ مشتق nام تابع $f(x)=e^{ax}x^2$ کدام است؟

۱) $e^{ax}[a^{n+1}x^2+2na^{n+2}+n(n+1)a^n]$ ۲) $e^{ax}[a^nx^2+2na^{n+1}x+n(n+1)a]$

۳) $e^{ax}[a^nx^2+2na^{n-1}x+n(n-1)a^{n-2}]$ ۴) $e^{ax}[a^{n-1}x^2+2na^nx+n(n-1)a^{n-1}]$

۶ـ اگر $f(x)=\sqrt[n]{1+x}, x>0, n\geq 2, n\in N$ و $g(x)=1+\frac{x}{n}$ کدام رابطه صحیح است؟

۱) $f(x)<g(x)$ ۲) $f'(x)>g'(x)$ ۳) $f(x)>g(x)$ ۴) $f'(x)=g'(x)$

۷ـ در کدام نقطه از منحنی $y=x^2$ خط مماس بر منحنی موازی خطی است که از نقاط $A(-1,1)$ و $B(3,9)$ می‌گذرد؟

۱) $(2,4)$ ۲) $(0,0)$ ۳) $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ ۴) $(1,1)$

۸ـ $z=(-1+i)^7$ معادل کدام است؟

۱) $-8(1+i)$ ۲) $8(1+i)$ ۳) $-8(1-i)$ ۴) $8(1-i)$

پاسخنامه رشته معماری کشتی ـ سراسری ۹۳

۱ـ گزینه «۱» می‌دانیم که برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $|\cos n|\leq 1$ بنابراین $|(\frac{\cos n}{2n-1})^2|\leq\frac{1}{(2n-1)^2}$ و سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ همگراست. زیرا یک P− سری است که درجه مخرج از درجه صورت ۲ واحد بیشتر است. در واقع با مقایسه حدی می‌توان گفت رفتار این سری مانند رفتار سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}$ است که همگرای مطلق است.

حالا که این سری همگرای مطلق است پس همگرا هم هست.

تذکر: جملاتی مانند $\cos(n)$ و $\sin(n)$ و $\cos(n^2)$ و ... که در آن‌ها کمانِ موردنظر به بی‌نهایت میل می‌کند را اغلب با آزمون مقایسه حدی مورد تحلیل قرار می‌دهیم. البته مراقب حالات خاص باشد برای مثال $\sin(n\pi)$ که همواره صفر است.

تذکر: رفتار سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(cn)}{n^P}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(cn)}{n^P}$ مانند سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^P}$ است.

۲ــ گزینه «۳» این سری را به‌صورت تلسکوپی درمی‌آوریم. برای این‌کار از ویژگی‌های لگاریتم استفاده می‌کنیم:

$$Ln(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2})=Ln(n)+Ln(n+2)-2Ln(n+1)=[Ln(n)-Ln(n+1)]+[Ln(n+2)-Ln(n+1)]=Ln(\frac{n}{n+1})-Ln(\frac{n+1}{n+2})$$

با فرض $A_n=Ln(\frac{n}{n+1})$ می‌بینیم که A_n-A_{n+1} به‌دست آمده است.

$$\text{حاصل سری}=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{Ln(\frac{n}{n+1})}_{A_n}-\underbrace{Ln(\frac{n+1}{n+2})}_{A_{n+1}}=A_1-\lim_{n\to\infty}A_{n+1}=Ln(\frac{1}{2})-Ln(1)=Ln(\frac{1}{2})$$

۳ــ گزینه «۱» با توجه به تعریف x_n داریم:

$$x_{n+1}=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\cdots+\sqrt{a}}}}}_{\text{مرتبه } n+1}=\sqrt{a+x_n}$$

از رابطه بازگشتیِ $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$ متوجه می‌شویم که دنباله‌ی (x_n) نامنفی است. پس $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geq 0$ است.

برای یافتن مقدار حد فرض کنیم $L=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ بنابراین $L=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$ خواهد بود. از طرفین رابطه بازگشتی به‌دست آمده حد بگیریم.

$$L=\sqrt{a+L}\Rightarrow L^2=a+L\Rightarrow L^2-L-a=0\xrightarrow{\Delta=1+4a}L=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$$

از صورت سؤال معلوم است که $a\geq 0$ پس $\Delta=1+4a\geq 1$ پس $\sqrt{1+4a}\geq 1$. از طرفی می‌دانیم که حد این دنباله نامنفی است پس:

$$L=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

۴ــ گزینه «۲» با استفاده از تست ریشه بررسی همگرایی را آغاز کنیم.

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{|n+1|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{\sqrt[n]{n+1}}=|x|$$

(یادآوری کنیم که برای هر چند جمله‌ای مانند $p(n)$ داریم: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p(n)}=1$)

پس اگر $|x|<1$ باشد این سری همگرای مطلق است و اگر $|x|>1$ باشد واگراست.

۵ــ گزینه «۳» فرض کنیم $v(x)=e^{ax}$ و $u(x)=x^2$ و $f(x)=u(x)v(x)$ باشد. طبق فرمول لایب نیتز مشتق nاُم f برابر است با:

$$f^{(n)}=\binom{n}{0}uv^{(n)}+\binom{n}{1}u^{(1)}v^{(n-1)}+\binom{n}{2}u^{2}v^{(n-2)}+\cdots+\binom{n}{n}u^{(n)}v$$

اما $u(x)=x^2$ چند جمله‌ای درجه دو است و به همین دلیل $u^{(3)}=u^{(4)}=\cdots=u^{(n)}=0$ پس فقط ۳ جمله اول از این مجموع باقی خواهند ماند.

برای تابع $v(x)=e^{ax}$ نیز به‌وضوح $v^{(k)}(x)=a^ke^{ax}$.

$$f^{(n)}(x)=\binom{n}{0}x^2a^ne^{ax}+\binom{n}{1}2xa^{n-1}e^{ax}+\binom{n}{2}2a^{n-2}e^{ax}$$

$$=a^nx^2e^{ax}+2na^{n-1}xe^{ax}+n(n-1)a^{n-2}e^{ax}=e^{ax}[a^nx^2+2na^{n-1}x+n(n-1)a^{n-2}]$$

روش کوتاه‌تر: از آن‌جا که گزینه‌ها در دسترس ما است و یکی از آن‌ها جواب صحیح است باید به ازای $n=0$ تابع $f(x)$ به‌دست آید. یعنی مشتقِ صفرمِ تابع $f(x)$ باید برابر با خودِ $f(x)$ باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۴) رد می‌شوند.

از طرفی $f'(x)=e^{ax}[2x+ax^2]$ و در گزینه صحیح به ازای $n=1$ باید $f'(x)$ به‌دست آید پس گزینه (۳) پاسخ درست است.

۶ـ گزینه «۱» در $x=\circ$ داریم $f(\circ)=g(\circ)=۱$.

اکنون برای $x>\circ$ مشتق‌های f و g را با هم مقایسه می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{۱}{n\sqrt[n]{(۱+x)^{n-۱}}} \quad , \quad g'(x)=\frac{۱}{n}$$

$x>\circ$ پس $۱+x>۱$ در نتیجه $\sqrt[n]{(۱+x)^{n-۱}}>۱$ و این نشان می‌دهد که $f'(x)<g'(x)$ است.

بنابراین $g'(x)-f'(x)>\circ$، یعنی تابع $g(x)-f(x)$ در بازه‌ی $[\circ,\infty)$ صعودی است. پس برای هر $x>\circ$ داریم:

$$g(x)-f(x)>g(\circ)-f(\circ)\Rightarrow g(x)-f(x)>\circ\Rightarrow g(x)>f(x)$$

۷ـ گزینه «۴» شیب خطی که از دو نقطه A و B می‌گذرد برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۱-۹}{-۱-۳}=۲$$

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی (x,y) واقع بر آن برابر است با:

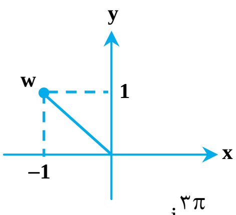
$$m=\frac{dy}{dx}=۲x$$

می‌خواهیم این خطوط موازی باشند پس باید شیب یکسانی داشته باشند.

$$۲x=۲\Rightarrow x=۱$$

پس در نقطه $(۱,۱)$ این اتفاق رخ می‌دهد.

۸ـ گزینه «۱» برای عدد مختلط $w=-۱+i$ داریم $r=|w|=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$ و $\theta=\mathrm{Arg}(w)=\frac{۳\pi}{۴}$



پس نمایش قطبی w به صورت $w=re^{i\theta}=\sqrt{۲}e^{i\frac{۳\pi}{۴}}$ است.

$$z=w^{۷}=(\sqrt{۲}e^{i\frac{۳\pi}{۴}})^{۷}=\sqrt{۲}^{۷}e^{i\frac{۲۱\pi}{۴}}=۸\sqrt{۲}(\cos(\frac{۲۱\pi}{۴})+i\sin(\frac{۲۱\pi}{۴}))=۸\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۸(۱+i)$$

زاویه‌ی $\frac{۲۱\pi}{۴}=۴\pi+\frac{۵\pi}{۴}$ همان زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۴}$ است.

رشته معماری کشتی ـ سراسری ۹۴

۱ـ مقدار $\lim\limits_{h\to\circ}\frac{۱}{h}\int_x^{x+h}\frac{dt}{t+\sqrt{t^{۲}+۱}}$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۱+x^{۲}}+x$ ۲) $\sqrt{۱+x^{۲}}-x$ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۲ـ اگر $g(x)=۲-\int_{\circ}^{x}(x^{۲}+t)f(t)dt$ و $f(\circ)=۳$ باشد، مقدار $g''(\circ)$، کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) صفر ۴) ۶

۳ـ گشتاور ماند جسمی که دارای چگالی واحد بوده و ناحیه درون کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴a^{۲}$ را اشغال کرده حول محور z چقدر است؟

۱) $\frac{۸\pi a^{۵}}{۱۵}$ ۲) $\frac{۳۶\pi a^{۵}}{۱۵}$ ۳) $\frac{۶۴\pi a^{۵}}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲۵۶\pi a^{۵}}{۱۵}$

۴ـ مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{۱}\int_{x}^{۱}e^{y^{۲}}dydx$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(e-۱)$ ۲) $\frac{۱}{۲}(e+۱)$ ۳) $\frac{۱}{۲}e$ ۴) e

۵ـ فرض کنید f یک تابع اسکالر و $\vec{u}$ یک تابع برداری باشد، در این صورت رابطه صحیح کدام است؟

۱) $\vec{\nabla}.(f\vec{u})=\vec{\nabla}f.\vec{u}+f\vec{\nabla}.\vec{u}$ ۲) $\vec{\nabla}.(f\vec{u})=(\vec{\nabla}f)\times(\vec{\nabla}\vec{u})$

۳) $\vec{\nabla}.(f\vec{u})=f(\vec{\nabla}.\vec{u})\times(\vec{\nabla}f).\vec{u}$ ۴) $\vec{\nabla}.(f\vec{u})=\vec{u}\times(\vec{\nabla}f)+f\,\vec{\nabla}.\vec{u}$

رشته معماری کشتی ــ سراسری ۹۴

۱ــ گزینه «۲» وقتی $h=0$ قرار می‌دهیم، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رخ می‌دهد. به کمک قاعدهٔ مشتق‌گیری از انتگرال و قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}\frac{dt}{t+\sqrt{t^2+1}}}{h}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)+\sqrt{(x+h)^2+1}}}{1}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\times\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-(x^2+1)}=\sqrt{x^2+1}-x$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲ــ گزینه «۱» با استفاده از فرمول لایب نیتز مشتق انتگرال را حساب می‌کنیم:

$$g'(x)=0-\int_0^x 2xf(t)dt-(x^2+x)f(x)=-2x\int_0^x f(t)dt-(x^2+x)f(x)$$

$$\Rightarrow g''(x)=-2\int_0^x f(t)\,dt-2xf(x)-(2x+1)f(x)-(x^2+x)f'(x)$$

با جایگذاری $x=0$ در تساوی فوق به دست می‌آوریم:

$$g''(0)=-f(0)=-3$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳ــ گزینه «۴» با توجه به فرمول گشتاور ماند و با توجه به اینکه چگالی ثابت $\rho=1$ داده شده است داریم:

$$I_z=\iiint_T(x^2+y^2)\rho dv=\iiint_T(x^2+y^2)dv$$

در مختصات کروی داریم:

$$x^2+y^2=(\rho\sin\phi\cos\theta)^2+(\rho\sin\phi\sin\theta)^2=\rho^2\sin^2\phi$$

بنابراین با محاسبهٔ I_z در مختصات کروی داریم:

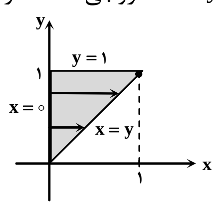
$$I_z=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2a}(\rho^2\sin^2\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi=2\pi\int_0^{\pi}(\sin^3\phi)\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^{2a}d\phi$$

$$=2\pi\left(\frac{32a^5}{5}\right)\int_0^{\pi}\underbrace{\sin^2\phi}_{1-\cos^2\phi}\sin\phi d\phi=\frac{64\pi a^5}{5}\left(-\cos\phi+\frac{\cos^3\phi}{3}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{256\pi a^5}{15}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴ــ گزینه «۱» انتگرال داده شده با این ترتیب حل نمی‌شود یا به سختی حل می‌شود. ابتدا ناحیه را رسم می‌کنیم که بین خط $y=x$ و $y=1$ قرار دارد و در آن $0\le x\le 1$ است. حالا با تعویض ترتیب انتگرال داریم $0\le y\le 1$ و از چپ به راست، $x=0$ ورودی و $x=y$ خروجی است. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases}x\le y\le 1\\ 0\le x\le 1\end{cases}$$



$$\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}dydx=\int_0^1\int_0^y e^{y^2}dxdy=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^1(2y)e^{y^2}dy=\left(\frac{1}{2}e^{y^2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵ــ گزینه «۳» فرض کنید $\vec{u}=(u_1,u_2)$، در این صورت بنا به تعریف گرادیان و ضرب داخلی داریم:

$$\begin{cases}\vec{\nabla}.(f\,\vec{u})=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}).(fu_1\,,\,fu_2)=\frac{\partial(fu_1)}{\partial x}+\frac{\partial(fu_2)}{\partial y}\\ f(\vec{\nabla}.\vec{u})=f(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}).(u_1\,,\,u_2)=f(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y})=f\frac{\partial u_1}{\partial x}+f\frac{\partial u_2}{\partial y}\\ \vec{\nabla}f.\vec{u}=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}).(u_1\,,\,u_2)=u_1\frac{\partial f}{\partial x}+u_2\frac{\partial f}{\partial y}\end{cases}$$

بنا به قاعدهٔ مشتق حاصل‌ضرب داریم:

$$\frac{\partial(fu_1)}{\partial x}+\frac{\partial(fu_2)}{\partial y}=(f\frac{\partial u_1}{\partial x}+f\frac{\partial u_2}{\partial y})+(u_1\frac{\partial f}{\partial x}+u_2\frac{\partial f}{\partial y})\Rightarrow\vec{\nabla}.(f\,\vec{u})=f(\vec{\nabla}.\vec{u})+\vec{\nabla}f.\vec{u}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

◆ ◆ ◆ ◆

رشته آمار ـ سراسری ۹۱

۱ـ اگر $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ که در آن a_n و b_n اعداد گویا هستند. مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۲ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) e ۴) ∞

۳ـ مقدار $\sup\{\sqrt[n]{n}\mid n=1,2,3,\dots\}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{3}$ ۲) $\sqrt[4]{4}$ ۳) ۲ ۴) e

۴ـ مقدار ... $A = 2+3+\frac{12}{4}+\frac{20}{8}+\frac{30}{16}+\frac{42}{32}+\frac{56}{64}+\dots$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

۵ـ اگر مشتق تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ همه جا منفی باشد و $f(0)=1$ و $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = -\frac{1}{1+x^2}$ آنگاه مقدار $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}\ln 2$ ۴) ∞

۶ـ ضریب زاویه خط عمود بر منحنی $x^3+y^3=28$ در نقطه‌ای به طول یک کدام است؟

۱) $\frac{-1}{12}$ ۲) $-\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۹

۷ـ نقطه‌های $P(0,0,0)$، $Q(0,1,-1)$ نقاط بحرانی تابع $f(x,y,z)=x^2+12yz+(y-z)^3$ هستند. نوع این نقاط کدام است؟

۱) P نقطه زینی و Q نقطه می‌نیمم ۲) P و Q هر دو نقطه زینی

۳) P و Q هر دو نقطه ماکسیمم ۴) P و Q هر دو نقطه ماکسیمم

۸ـ مقدار شار برونسوی از نیم کره بسته $x^2+y^2+z^2=1$، $z\ge 0$، توسط میدان $\vec{F}(x,y,z)=(xz,yz,2y)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 2π

۹ـ مقدار $\iint\limits_R \sqrt{xy}\,dxdy$ که در آن $R=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) ۱

۱۰ـ مقدار کار انجام شده به وسیله $\vec{F}=-x^2y\vec{i}+\arctan y^2\vec{j}$ در امتداد مربع به رئوس $(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)$ که در جهت مثبت طی می‌شود، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{6}{3}$

۱۱ـ با این فرض که u تابعی هموار از دو متغیر t و x است و $\frac{\partial u}{\partial x}=-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ عبارت $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ برابر است با:

۱) $(1)^k g a^k \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ ۲) $(-1)^k\alpha^k\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ ۳) $(-1)^k\alpha^k\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}$ ۴) $(-1)^k\alpha^k\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}$

۱۲ـ فرض کنید تابع دو متغیره حقیقی f تا مرتبه ۳ به طور پیوسته مشتق پذیر باشد، در این‌صورت: $\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\nabla}f)-(f_{xxx}\vec{i}+f_{yyy}\vec{j})$ برابر است با:

۱) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(f_x\vec{i}+f_y\vec{j})$ ۲) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(f_y\vec{i}-f_x\vec{j})$ ۳) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(f_x\vec{i}-f_y\vec{j})$ ۴) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(f_y\vec{i}+f_x\vec{j})$

۱۳ـ برای منحنی $r=a(1-\cos\theta)$ شعاع انحنا کدام است؟

۱) $\rho=\frac{2a|\cos\frac{\theta}{2}|}{3}$ ۲) $\rho=\frac{2a|\sin\frac{\theta}{2}|}{3}$ ۳) $\rho=\frac{4a|\cos\frac{\theta}{2}|}{3}$ ۴) $\rho=\frac{4a|\sin\frac{\theta}{2}|}{3}$

۱۴ـ فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد. در این صورت $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+mh)-f(x_0-nh)}{h}$ برابر است با:

۱) $(m+n)f'(x_0)$ ۲) $(mn)f'(x_0)$ ۳) $(m-n)f'(x_0)$ ۴) $(n-m)f'(x_0)$

پاسخنامه رشته آمار ــ سراسری ۹۱

۱ــ گزینه «۲» با استفاده از فرمول بسط دوجمله‌ای داریم:

$$(1+\sqrt{2})^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\sqrt{2})^k(1)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\sqrt{2})^k$$

می‌دانیم که a_n به ازای kهای زوج به‌دست می‌آید و b_n به‌ازای kهای فرد حاصل خواهد شد. اگر به جای $\sqrt{2}$، از $-\sqrt{2}$ استفاده کنیم، علامت جملات فرد تغییر می‌کند. پس برای محاسبه‌ی a_n و b_n به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases}(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}\\(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_n=\dfrac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{2}\\[2mm]b_n=\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

حالا می‌توانیم حد مورد نظر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\right]}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right]}$$

اکنون توجه کنید که $\sqrt{2}\simeq 1/4$ پس $\left|1-\sqrt{2}\right|\simeq 0/4$ به عبارتی $\left|1-\sqrt{2}\right|<1$ است. در نتیجه داریم: $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\sqrt{2})^n=0$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n}{\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n}=\sqrt{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲ــ گزینه «۲» همان‌طور که می‌دانید وقتی $n\to\infty$ میل می‌کند داریم: $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\simeq \mathrm{Ln}n$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathrm{Ln}n}=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{Ln}n)^{\frac{1}{n}}$$

طبق متن کتاب، حد ریشه‌ی nاُم چند جمله‌ای‌ها و $\mathrm{Ln}n$ برابر با یک است. اما حل تشریحی آن به این صورت است:

$$A=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{Ln}n)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow \mathrm{Ln}A=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}n)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\mathrm{Ln}A=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}n)}{n}$$

این حد فرم $\frac{\infty}{\infty}$ دارد. با استفاده از هوپیتال داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Ln}A=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\mathrm{Ln}n}}{1}=\frac{1}{\infty}=0$$

بنابراین $A=e^0=1$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

۳ــ گزینه «۱» مفهوم سوپریمم مانند مفهوم ماکزیمم است، با این تفاوت که ممکن است تابع یا دنباله مورد نظر به آن مقدار نرسد بلکه به آن میل کند. در اینجا دنباله‌ی $f(n)=\sqrt[n]{n}$ را در نظر می‌گیریم. اولین جمله این دنباله $f(1)=1$ است و حد آن نیز در بی‌نهایت $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\sqrt[n]{n}=1$ است. برای تشخیص بیشترین مقدار این دنباله، از مشتق‌گیری استفاده می‌کنیم.

$$f(n)=n^{\frac{1}{n}}\Rightarrow \mathrm{Ln}f(n)=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}(n)\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}\frac{f'(n)}{f(n)}=-\frac{1}{n^2}\mathrm{Ln}n+\frac{1}{n^2}=\frac{1-\mathrm{Ln}n}{n^2}=0\Rightarrow \mathrm{Ln}n=1\Rightarrow n=e$$

بیشترین مقدار این تابع به‌ازای $n=e$ به‌دست می‌آید. اما n یک عدد طبیعی است پس به‌جای e باید نزدیک‌ترین عدد طبیعی به e یعنی $n=3$ را در نظر بگیریم. به عبارتی داریم: $\sup\{f(n)|n=1,2,3,\ldots\}=f(3)=\sqrt[3]{3}$

◆ ◆ ◆ ◆

۴ــ گزینه «۳» با کمی دقت به این کسرها متوجه می‌شویم که مخرج کسرها توان‌های متوالی عدد ۲ و صورت کسرها حاصل‌ضرب دو عدد متوالی به‌صورت $n(n+1)$ هستند. به بیان دقیق‌تر داریم:

$$A=\frac{1\times 2}{2^0}+\frac{2\times 3}{2^1}+\frac{3\times 4}{2^2}+\frac{4\times 5}{2^3}+\frac{5\times 6}{2^4}+\ldots\Rightarrow A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$$

برای محاسبه‌ی مقدار این سری ابتدا به فرمول مجموع سری هندسی توجه می‌کنیم:
$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\quad ;|x|<1$$

با دو بار مشتق‌گیری از طرفین خواهیم داشت:
$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

حالا با استفاده از قاعده‌ی لغزاندن حدود سری، کاری می‌کنیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$ ایجاد شود. اما قبل از آن توجه کنید که به‌ازای $n=0$ و $n=1$ جمله‌ی عمومیِ سری $\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$ برابر با صفر است. پس با کنار گذاشتن این دو جمله‌ی صفر خواهیم داشت:

$$0+0+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

حالا با استفاده از لغزاندن حدود داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$$

حالا به‌جای x در طرفین $x=\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\frac{1}{2^n}=\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3}=16\Rightarrow A=2+3+\frac{12}{4}+\ldots=16$$

روش رد گزینه: جملات این سری را تا رسیدن به جمله‌ای که کوچکتر از $\frac{1}{2}$ باشد ادامه می‌دهیم. به شکل تولید جملات A توجه کنید:

$$A=\frac{1\times 2}{1}+\frac{2\times 3}{2}+\frac{3\times 4}{4}+\frac{4\times 5}{8}+\frac{5\times 6}{16}+\frac{6\times 7}{32}+\frac{7\times 8}{64}+\frac{8\times 9}{128}+\frac{9\times 10}{256}\simeq 2+3+3+2/5+2+1/3+0/9+0/6+0/35$$

مجموع همه‌ی این جملات برابر با ۱۵/۶۵ است. طبق فرمول داریم: $15/65<$ مقدار سری $<15/65+2\times 0/35$

بنابراین گزینه (۳) جواب است.

◆◆◆◆

۵ـ گزینه «۳» ابتدا با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه $\frac{d}{dx}f^{-1}(x)=\frac{-1}{1+x^2}$ ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و سپس مقدار $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ را می‌یابیم.

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x)=\frac{-1}{1+x^2}\xrightarrow{\int}f^{-1}(x)=-\text{Arctg}x+c$$

طبق صورت سؤال $f(0)=1$ پس نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(1)=0$ به‌عبارتی $-\frac{\pi}{4}+c=0$ پس $c=\frac{\pi}{4}$ است.
$$\int_0^1 f^{-1}(x)dx=\int_0^1(-\text{Arctg}x+\frac{\pi}{4})dx$$

برای حل انتگرال $\int_0^1-\text{Arc tg}x dx$ با استفاده از روش جزء به جزء با انتخاب $-\text{Arctg}x=u$ و $dx=dv$ داریم: $du=-\frac{1}{1+x^2}$ و $V=x$ در نتیجه:

$$\int_0^1 f^{-1}(x)dx=[-x\text{Arctg}x]_0^1+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+[\frac{\pi}{4}x]_0^1=-\frac{\pi}{4}+[\frac{1}{2}\text{Ln}(1+x^2)]_0^1+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\text{Ln}2$$

◆◆◆◆

۶ـ گزینه «۴» ضریب زاویه خط قائم از رابطهٔ $m'=-\frac{1}{m}$ به دست می‌آید که در آن m مشتق y نسبت به x است و در حالت ضمنی برابر $m=-\frac{f'_x}{f'_y}$ می‌باشد.

$$m=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{3x^2}{3y^2}=-\frac{x^2}{y^2}$$

با جایگذاری $x=1$ در معادله‌ی منحنی، $y=3$ به دست می‌آید در نتیجه:
$$m=-\frac{1}{3^2}=-\frac{1}{9}\Rightarrow m'=9$$

◆◆◆◆

۷ـ گزینه «۱» مطابق متن درس، برای تابع سه متغیره باید ماتریس زیر را تشکیل دهیم:

$$H=\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}&f_{xz}\\f_{yx}&f_{yy}&f_{yz}\\f_{zx}&f_{zy}&f_{zz}\end{bmatrix}$$

در این مثال داریم:

$$H=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6(y-z) & 12-6(y-z) \\ 0 & 12-6(y-z) & 6(y-z) \end{bmatrix}$$

در نقطه‌ی $P(0,0,0)$ داریم:

$$H=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس، معین مثبت یا معین منفی نیست. زیرا دترمینانِ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ برابر با صفر می‌شود. پس نقطه‌ی P نقطه‌ی زینی است.

در نقطه‌ی $Q(0,1,-1)$ داریم:

$$H=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

این ماتریس به وضوح معین مثبت است زیرا دترمینان خودش و ماتریس‌های $[2]$ و $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ مثبت می‌شود. بنابراین نقطه‌ی Q نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع f است.

۸ـ گزینه «۲» سطح داده شده بسته است. پس از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=P_x+Q_y+R_z=z+z+0=2z$$

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV=\iiint_V 2z\,dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 2\rho\cos\phi.\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\phi.\sin\phi\rho[\frac{\phi^4}{4}]_0^1 d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin 2\phi d\phi d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(-\frac{1}{2}\cos 2\phi)_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta=\frac{\pi}{2}$$

۹ـ گزینه «۳» با محاسبه مستقیم به سادگی انتگرال موردنظر به دست می‌آید.

$$\int_0^1\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dxdy=\int_0^1[\frac{2}{3}y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}]_0^1 dy=\int_0^1\frac{2}{3}y^{\frac{1}{2}}dy=[\frac{2}{3}.\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}]_0^1=\frac{4}{9}$$

۱۰ـ گزینه «۳» مقدار کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ برابر است با $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ یعنی برابر است با انتگرال $\int_c -x^2ydx+\operatorname{Arc\,tg}y^2dy$. حالا چون مرز C بسته است، با استفاده از قضیه گرین مقدار کار انجام شده را می‌یابیم:

$$\text{کار}=\int_C(-x^2ydx+\operatorname{Arctg}y^2dy)=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy=\int_{-1}^1\int_{-1}^1 x^2dxdy=\int_{-1}^1[\frac{x^3}{3}]_{-1}^1 dy=\int_{-1}^1\frac{2}{3}dy=\frac{4}{3}$$

۱۱ـ گزینه «۳» طبق فرض داریم $\frac{\partial u}{\partial x}=-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ یعنی یک بار مشتق‌گیری نسبت به x مانند ۲ بار مشتق‌گیری نسبت به t است که در $-\alpha$ ضرب شده باشد. پس می‌توان از همین تساوی نتیجه گرفت که k بار مشتق‌گیری نسبت به x معادل است با 2k بار مشتق‌گیری نسبت به t که k بار در $-\alpha$ ضرب شده باشد. مثلاً:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(-\alpha)(-\alpha)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=(-1)^2\alpha^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^2}$$

و به همین ترتیب:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}=(-\alpha)^k\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}$$

روش دیگری که می‌توان به‌کار برد، یافتن ضابطه‌ی کلی u است به‌طوری‌که در تساوی $\frac{\partial u}{\partial x}=-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ صدق کند.

مثلاً تابع $u(x,t)=e^{-\alpha x+t}$ دارای این ویژگی است:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=-\alpha e^{-\alpha x+t}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=e^{-\alpha x+t}\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حالا اگر از این تابع، k بار نسبت به x مشتق بگیریم داریم:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}=(-\alpha)^k e^{-\alpha x+t}$$

که با $\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}$ برابر است.

[اگر تابع $u=e^{-c\alpha x+ct}$ را در نظر بگیرید، نادرستی گزینه‌ی (۴) مشخص می‌شود.]

۱۲ـ گزینه «۴» با توجه به این که $\nabla^2 f=\operatorname{div}(\vec{\nabla} f)$ و این که تابع f حقیقی دو متغیره است:

$$\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\nabla} f)=\vec{\nabla}(\nabla^2 f)=\vec{\nabla}(f_{xx}+f_{yy})=(f_{xxx}+f_{yyx},f_{xxy}+f_{yyy})$$

اکنون عبارت موردنظر را تشکیل می‌دهیم:

$$\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\nabla} f)-(f_{xxx}\vec{i}+f_{yyy}\vec{j})=(f_{xxx}+f_{yyx},f_{xxy}+f_{yyy})-(f_{xxx},f_{yyy})=(f_{yyx},f_{xxy})=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(f_y\vec{i}+f_x\vec{j})$$

۱۳ـ گزینه «۴» شعاع انحناء در منحنی‌های قطبی از رابطه $\rho=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|2r'^2+r^2-rr''|}$ محاسبه می‌شود.

$$r=a(1-\cos\theta)\quad\Rightarrow\quad r'=a\sin\theta\quad\Rightarrow\quad r''=a\cos\theta$$

$$r^2+r'^2=a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta=a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+a^2-2a^2\cos\theta=2a^2-2a^2\cos\theta=2a^2(1-\cos\theta)=4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$2r'^2+r^2-rr''=3a^2-3a^2\cos\theta=3a^2(1-\cos\theta)=6a^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \rho=\frac{(4a^2.\sin^2\frac{\theta}{2})^{\frac{3}{2}}}{6a^2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{8a^3\left|\sin^3\frac{\theta}{2}\right|}{6a^2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{4}{3}a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

۱۴ـ گزینه «۱» علاوه بر فرمولی که در متن درس آمده است، با استفاده از قاعده هوپیتال هم می‌توانیم حد فوق را محاسبه کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0-nh)}{h}\overset{HOP}{=}\lim_{h\to 0}(mf'(x_0+mh)+nf'(x_0-nh))=(m+n)f'(x_0)$$

رشته آمار ـ سراسری ۹۲

۱ـ مقدار $\int_0^{\frac{e+e^{-1}}{2}}\cosh^{-1}x\,dx+\int_0^1\cosh x\,dx$ برابر است با:

۱) $\cosh 1$ ۲) $2\cosh 1$ ۳) $\cosh 2-2\sinh 1+1$ ۴) $\cosh 2-\cosh 1$

۲ـ اگر تابع $f(x)$ فرد باشد آگاه تابع $g(x)=\frac{e^{f(x)}-1}{e^{f(x)}+1}$:

۱) فرد است. ۲) زوج است. ۳) نه فرد است و نه زوج. ۴) هم فرد است و هم زوج.

۳ـ فرض کنید a_n یک دنباله حقیقی باشد به طوری که برای دو عدد حقیقی b و c داریم:

$$|a_n|<bc^n\quad n=0,1,2,\cdots$$

برای کدام مقادیر x سری $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{x^n}$ همگرا است؟

۱) برای $|x|>\frac{b}{c}$ ۲) برای $|x|<\frac{b}{c}$ ۳) برای $|x|<c$ ۴) برای $|x|>c$

۴ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n}))^{\frac{1}{n}}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{e}$ ۲) $\frac{4}{e}$ ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) $\frac{3}{e}$

۵ـ مشتق تابع $f(x)=\mathrm{Ln}(\frac{\sin x}{2})+\mathrm{Ln}(1+\tan^2\frac{x}{2})$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $-\mathrm{Ln}2$ ۲) صفر ۳) 1 ۴) $\mathrm{Ln}2$

۶ـ حجم ناحیه R که بالای صفحه xy است و از اطراف به هذلولی گون یک پارچه $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$ و از بالا به رویه $4-z=x^2+y^2$ محدود می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}-\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ ۲) $5\pi-\pi\sqrt{3}$ ۳) $10\pi-4\pi\sqrt{3}$ ۴) $\frac{14\pi}{3}$

۷ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) ∞

۸ـ برای تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) f در مبدا ناپیوسته است. ۲) f_y در مبدا پیوسته است.

۳) f_x در مبدا ناپیوسته است. ۴) مشتقات پاره‌ای f در مبدا موجود نیست.

۹ـ انتگرال $\int_1^4\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$ برابر است با:

۱) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{4\sin\theta} f(r)rdrd\theta$ ۲) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{4\sin\theta} f(r)rdrd\theta$ ۳) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{2}}\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{4\cos\theta} f(r)rdrd\theta$ ۴) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{4\cos\theta} f(r)rdrd\theta$

۱۰ـ معادله خط مماس بر محل تلاقی رویه‌های $x+z-4=0$ و $x^2+y^2-2=0$ در نقطه $p(0,\sqrt{2},4)$ عبارت است از:

۱) $x=2t\sqrt{2}, y=\sqrt{2}, z=4$ ۲) $x=2t\sqrt{2}, y=\sqrt{2}, z=4-2t\sqrt{2}$

۳) $x=t, y=\sqrt{2}, z=4+t$ ۴) $x=0, y=2\sqrt{2}-t\sqrt{2}, z=4$

۱۱ـ بیشترین میزان تغییرات تابع $f(x,y,z)=z\mathrm{Ln}(x^2+y^2-1)$ در نقطه $p(1,1,1)$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) $2\sqrt{2}$

۱۲ـ حاصل $\int_0^1\int_{x^2}^{x}\frac{e^{\sqrt{y}}}{y-y\sqrt{y}}dydx$ کدام است؟

۱) $e-1$ ۲) $2(e-1)$ ۳) e ۴) $2e$

۱۳ـ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد نامنفی باشد، در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ همگرا باشد، آن گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا است.

۲) اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_{n^2}$ همگرا باشد، آن گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا است.

۳) اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگرا باشد، آن گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ همگرا است.

۴) اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگرا باشد، آن گاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{a_n}$ همگرا است.

پاسخنامه رشته آمار ـ سراسری ۹۲

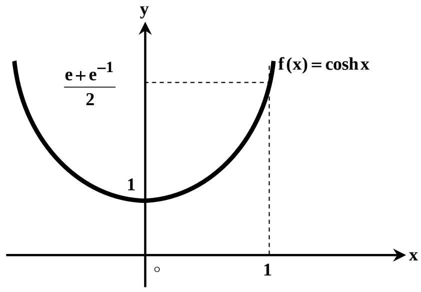
۱ـ گزینه «۱» طبق متن درس، اگر f تابعی صودی باشد، که $f(a)=\alpha$ و $f(b)=\beta$، آنگاه داریم:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx=\beta b-a\alpha$$

در این مثال تابع $f(x)=\cosh x$ را داریم که در بازه‌ی $[0,1]$ صعودی است و $f(0)=1$ و $f(1)=\frac{e+e^{-1}}{2}$ پس داریم:

$$\int_0^1 \cosh x\,dx+\int_1^{\frac{e+e^{-1}}{2}}\cosh^{-1}x\,dx=\frac{e+e^{-1}}{2}\times 1-0\times 1=\frac{e+e^{-1}}{2}=\cosh 1$$

در پایان، نمودار این تابع را برای فهم بهتر مسأله، رسم کرده‌ایم.



۲ـ گزینه «۱» با توجه به این که تابع $f(x)$ فرد است داریم:

$$f(-x)=-f(x)$$

برای بررسی زوج یا فرد بودن تابع $g(x)$ کافیست $g(-x)$ را مورد بررسی قرار دهیم:

$$g(-x)=\frac{e^{f(-x)}-1}{e^{f(-x)}+1}$$

از آن جایی که $f(-x)=-f(x)$ است داریم:

$$\Rightarrow g(-x)=\frac{e^{-f(x)}-1}{e^{-f(x)}+1}\xrightarrow{\text{ضرب صورت و مخرج در } e^{f(x)}}\frac{1-e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}=-\frac{e^{f(x)}-1}{e^{f(x)}+1}=-g(x)$$

دیدیم که $g(-x)=-g(x)$ می‌باشد بنابراین تابع $g(x)$ فرد است.

۳ـ گزینه «۴» طبق فرض داریم $|a_n|<bc^n$ از همین نامساوی که برای هر $n\geq 0$ برقرار است، معلوم می‌شود که b و c اعداد نامنفی هستند. در ضمن $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leq c$ (به‌خاطر داشته باشید که برای عدد ثابت b داریم $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1$).

پس در مورد سری تابعی $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}$ با استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{|x|^n}}\leq\frac{c}{|x|}<1\Rightarrow c<|x|$$

این سری برای x هایی‌که $c<|x|$ باشد همگراست و گزینه (۴) صحیح است. (در ضمن از آنجا که اطلاع دقیقی در مورد ضابطه‌ی دنباله‌ی a_n نداریم نمی‌توانیم $x=\pm c$ را جداگانه مورد بررسی قرار دهیم.)

۴ـ گزینه «۲» دنباله‌ی داده شده را به این صورت در نظر می‌گیریم:

$$A=\left((1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})\right)^{\frac{1}{n}}$$

از طرفین عبارت فوق Ln می‌گیریم:

$$LnA=\frac{1}{n}Ln[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})]=\frac{1}{n}[Ln(1+\frac{1}{n})+Ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+Ln(1+\frac{n}{n})]$$

بنابراین می‌توانیم حد این دنباله را به صورت حد مجموع بنویسیم:

$$\lim_{n\to\infty}LnA=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ln(1+\frac{i}{n})$$

یک حد مجموع ریمانی داریم که در آن $f(\frac{i}{n})=Ln(1+\frac{i}{n})$ پس $f(x)=Ln(1+x)$:

$$\lim_{n\to\infty}LnA=\int_0^1 Ln(1+x)dx$$

برای حل این انتگرال از روش جز به جز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}u=Ln(1+x)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{1+x}\\ v=x\end{cases}$$

$$\int_0^1 Ln(1+x)dx=uv-\int vdu=[xLn(1+x)]\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=Ln2-\int_0^1(1-\frac{1}{1+x})dx$$

$$=Ln2-(x-Ln(1+x))\Big|_0^1=Ln2-1+Ln2=2Ln2-1=Ln4-1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با:

$$LnA=Ln4-1\Rightarrow A=e^{(Ln4-1)}=e^{Ln4}\times e^{-1}=4e^{-1}=\frac{4}{e}$$

۵ــ گزینه «۳» ابتدا ضابطه‌ی f را ساده‌تر می‌کنیم. با استفاده از رابطه‌ی مثلثاتی $1+\tan^2\frac{x}{2}=\sec^2\frac{x}{2}$ می‌توان نوشت:

$$f(x)=Ln(\sin x)-Ln2+Ln(\sec^2\frac{x}{2})$$

می‌دانیم که $\sec\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$ پس $\sec^2\frac{x}{2}=\cos^{-2}\frac{x}{2}$ در نتیجه: $Ln(\sec^2\frac{x}{2})=Ln(\cos^{-2}\frac{x}{2})=-2Ln(\cos\frac{x}{2})$ و ضابطه‌ی $f(x)$ به این صورت ساده می‌شود:

$$f(x)=Ln(\sin x)-Ln2-2Ln(\cos\frac{x}{2})$$

بنابراین مشتق عبارت داده شده برابر است با:

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}+2\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\Rightarrow f'(x)=\cot gx+tg\frac{x}{2}$$

با جایگذاری $x=\frac{\pi}{2}$ در این عبارت داریم:

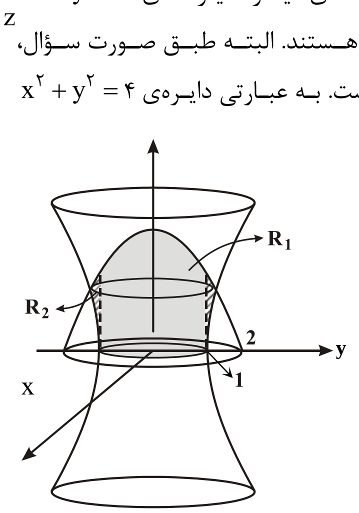
$$f'(\frac{\pi}{2})=\cot g\frac{\pi}{2}+tg\frac{\pi}{4}=0+1=1$$

۶ــ گزینه «۴» برخورد سهمی گون و هذلولی گون را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1\\ 4-z=x^2+y^2\end{cases}\Rightarrow 4-z-\frac{z^2}{4}=1\Rightarrow z^2+4z-12=0\Rightarrow z=2\Rightarrow x^2+y^2=2$$

پس این دو رویه در ارتفاع $z=2$ با هم برخورد می‌کنند و تقاطع آن‌ها دایره‌ی $x^2+y^2=2$ است.

از طرفی، با توجه به صورت سؤال، صفحه‌ی xoy یعنی $z=0$ هم یکی از رویه‌ها است. از برخورد، این صفحه بارویه‌های دیگر، دایره‌های $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=1$ به دست می‌آیند که به ترتیب تقاطع سهمی‌گون و هذلولی گون با صفحه‌ی $z=0$ هستند. البته طبق صورت سؤال، سهمی‌گون $4-z=x^2+y^2$، سقف این شکل را تشکیل می‌دهد پس برخورد دادن آن با صفحه‌ی $z=0$ لازم نیست. به عبارتی دایره‌ی $x^2+y^2=4$ نقشی در این مثال ندارد.



با این اطلاعات می‌توانیم شکل ناحیه‌ی مورد نظر را هم رسم کنیم.

با توجه به این‌که تصویر این شکل بر صفحه‌ی xoy دایره است، بهتر است از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم.

معادله‌ی سهمی‌گون به صورت $4-z=r^2$ یعنی $z=4-r^2$ و معادله‌ی هذلولی‌گون به صورت $r^2-\frac{z^2}{4}=1$ نوشته می‌شود. از این معادله داریم $z^2=4(r^2-1)$ و با توجه به آن‌که $z\geq 0$ است داریم $z=2\sqrt{r^2-1}$.

اکنون آماده هستیم که حجم مورد نظر را در مختصات استوانه‌ای حساب کنیم.

ناحیه‌ی که تصویر آن درون دایره‌ی $x^2+y^2=1$ قرار دارد را R_1 و ناحیه‌ای که تصویر آن بین دو دایره‌ی $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=2$ قرار دارد را R_2 می‌نامیم. در ناحیه‌ی R_1 داریم $0\leq\theta\leq 2\pi$، $0\leq r\leq 1$ و حدود z از $z=0$ تا سهمی‌گون یعنی $z=4-r^2$ ادامه دارند.

اما در ناحیه‌ی R_2، داریم $0\leq\theta\leq 2\pi$، $1\leq r\leq\sqrt{2}$ و حدود z از سطح هذلولی‌گون یعنی $z=2\sqrt{r^2-1}$ تا سطح سهمی‌گون یعنی $z=4-r^2$ ادامه دارند.

بنابراین حجم ناحیه R برابر است با:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{z=0}^{z=4-r^2}rdzdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_{z=2\sqrt{r^2-1}}^{z=4-r^2}rdzdrd\theta\Rightarrow$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1[rz]_0^{4-r^2}drd\theta+\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}[rz]_{2\sqrt{r^2-1}}^{4-r^2}drd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1(4r-r^3)drd\theta+\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}(4r-r^3-2r\sqrt{r^2-1})drd\theta$$

$$\Rightarrow V=\int_0^{2\pi}[2r^2-\frac{r^4}{4}]_0^1d\theta+\int_0^{2\pi}[2r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{2}{3}(r^2-1)^{\frac{3}{2}}]_1^{\sqrt{2}}d\theta$$

$$\Rightarrow V=2\pi\times[(2-\frac{1}{4})+(4-1)-(2-\frac{1}{4})-\frac{2}{3}(2-1)+\frac{2}{3}(0)]\Rightarrow V=2\pi\times(3-\frac{2}{3})=2\pi\times\frac{7}{3}=\frac{14\pi}{3}$$

تذکر: می‌توانیم ناحیه‌ی داده شده را به دو بخش تقسیم کنیم که یکی از آن‌ها بین $z=0$ و $z=2$ قرار دارد و دیگری در بالای $z=2$ قرار گرفته است. البته با این‌کار، چیزی از حجم محاسبات مورد نیاز کاسته نخواهد شد.

۷ــ گزینه «۳» ابتدا دقت کنید که وقتی $x\to 0^+$ میل می‌کند انتگرال $\int_0^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$ به‌وجود می‌آید که ناسره است. در $t=0$ داریم $\frac{\cos t}{t^2}\simeq\frac{1}{t^2}$ پس این انتگرال واگراست چون $p=2$ است (یادآوری: $\int_0^1 \frac{dt}{t^p}$ با شرط $p<1$ همگرا و با شرط $p\ge 1$ واگراست).

بنابراین حد داده شده فرم مبهم $0\times\infty$ دارد. با نوشتن x به صورت $\frac{1}{x}$ در مخرج کسر، فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را ایجاد می‌کنیم. سپس از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt}{\frac{1}{x}}\xrightarrow{\text{قاعده‌ی هوپیتال}}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{\cos x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1$$

یادآوری: با استفاده از قاعده‌ی لایب نیتز داریم:

$$G=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt \Rightarrow \frac{dG}{dx}=\beta'(x)f(\beta(x))-\alpha'(x)f(\alpha(x))$$

۸ــ گزینه «۳»

بررسی گزینه ۱: حد تابع $f(x,y)$ در مبدأ را می‌یابیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

برای یافتن حد فوق از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta=0\times\text{کران‌دار}=0$$

با توجه به این که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ با مقدار $f(0,0)$ برابر است بنابراین $f(x,y)$ در نقطه $(0,0)$ پیوسته می‌باشد.

بررسی گزینه ۲: برای بررسی این گزینه ابتدا ضابطه‌ی تابع f_y را می‌یابیم. در $(0,0)$ از تعریف مشتق و در سایر نقاط از قواعد مشتق‌گیری استفاده می‌کنیم.

در نقاط $(x,y)\neq(0,0)$ داریم:

$$f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2\times(x^2+y^2)-2y(x^2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+x^2y^2-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

در نقطه‌ی $(0,0)$ از تعریف مشتق داریم:

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

حالا می‌توانیم پیوسته بودن تابع f_y را در مبدأ بررسی کنیم.

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & ;\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\quad (0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

طبق متن درس، به دلیل هم درجه بودن صورت و مخرج می‌دانیم که این حد وجود ندارد.

البته برای اثبات این مطلب می‌توانیم روی مسیرهای $y=0$ و $x=0$ جداگانه حد بگیریم که روی اولی مقدار حد برابر با یک و روی دومی مقدار حد صفر است یا حتی از نمایش قطبی استفاده می‌کنیم و با حذف r^4 از صورت و مخرج، جواب حد به θ بستگی پیدا می‌کند پس حد وجود ندارد.

با این توضیحات متوجه شدیم که f_y در مبدأ پیوسته نیست.

بررسی گزینه ۳: به طور مشابه ابتدا مشتق تابع $f(x,y)$ را نسبت به x در نقاطی به جز $(0,0)$ محاسبه می‌کنیم:

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy\times(x^2+y^2)-2x\times x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^3y+2xy^3-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

و با استفاده از تعریف مشتق داریم $f_x(0,0)=0$

با توجه به هم درجه بودن صورت و مخرج باز هم $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ وجود ندارد پس f_x در مبدأ ناپیوسته است.

بررسی گزینه ۴: همان‌طور که دیدید مشتقات جزئی تابع $f(x,y)$ در مبدأ به این صورت به‌دست می‌آیند:

$$f_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,h)-0}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{h^3}=0$$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{f(h,0)-0}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{h^3}=0$$

بنابراین مشتقات پاره‌ای f در مبدأ موجود می‌باشد.

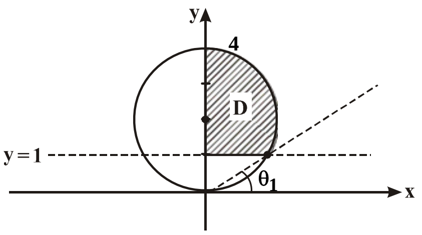
◆ ◆ ◆ ◆

۹ـ گزینه «۱» برای یافتن گزینه درست کافیست انتگرال را در مختصات قطبی بنویسیم. در دستگاه قطبی داریم:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=r^2,\ \ dxdy=rdrd\theta$$

حالا باید حدود انتگرال در مختصات قطبی را بیابیم، لذا ابتدا ناحیه D در مختصات دکارتی را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=0\\ x=\sqrt{4y-y^2}\Rightarrow x^2=4y-y^2\Rightarrow x^2+y^2-4y=0\Rightarrow\end{cases}$$
$$x^2+y^2-4y+4=4\Rightarrow x^2+(y-2)^2$$



دایره‌ای به مرکز $(0,2)$ و شعاع ۲ به‌دست آمد. البته شرط $x\ge 0$ و $y\ge 1$ را هم داریم. محل برخورد خط $y=1$ با دایره را در ربع اول حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+(y-2)^2=4\\ y=1\end{cases}\Rightarrow x=\sqrt{3}\Rightarrow \theta_1=tg^{-1}(\frac{y}{x})=tg^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{6}$$

محدوده‌ی تغییرات θ برابر است با $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ برای یافتن حدود r باید معادله‌ی مرزها را در مختصات قطبی بنویسیم:

$$y=1\Rightarrow r\sin\theta=1\Rightarrow r=\frac{1}{\sin\theta}$$
$$x^2+y^2-4y=0\Rightarrow r^2-4r\sin\theta=0\Rightarrow r=4\sin\theta$$

بنابراین بازه تغییرات r به این صورت است:

$$\frac{1}{\sin\theta}\le r\le 4\sin\theta$$

پس انتگرال داده شده در مختصات قطبی به این صورت می‌باشد:

$$\int_1^4\int_0^{\sqrt{4y-y^2}}f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2}f(r,\theta)rdrd\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\theta}{2}}\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{4\sin\theta}f(r)rdrd\theta$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰ـ گزینه «۲» بردار هادی خط مماس بر دو رویه برابر با حاصلضرب خارجی بردارهای گرادیان دو رویه در نقطه داده شده است، پس داریم:

$$\begin{cases}F:x+z-4=0\to\vec{\nabla}F=(1,0,1)\\ G:x^2+y^2-2=0\to\vec{\nabla}G=(2x,2y,0)\xrightarrow{z=4\ ,\ y=\sqrt{2},\ x=0}\vec{\nabla}G=(0,2\sqrt{2},0)\end{cases}$$

حاصلضرب خارجی بردارهای گرادیان را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{n}=\vec{\nabla}F\times\vec{\nabla}G=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&0&1\\ 0&2\sqrt{2}&0\end{vmatrix}=(-2\sqrt{2},0,2\sqrt{2})$$

البته هر برداری که مضرب $\vec{n}$ باشد نیز می‌تواند بردار هادی خاط مورد نظر باشد. پس با توجه به گزینه‌ها بردار $(+2\sqrt{2},0,-2\sqrt{2})$ را درنظر می‌گیریم.
بنابراین‌معادله پارامتری خط مماس بر دو رویه داده شده در نقطه $(0,\sqrt{2},4)$ برابر است با:

$$\begin{cases}x=2\sqrt{2}t+0=2t\sqrt{2}\\ y=0\times t+\sqrt{2}=\sqrt{2}\\ z=-2\sqrt{2}t+4=4-2t\sqrt{2}\end{cases}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱ـ گزینه «۴» بیشترین میزان تغییرات یک تابع چند متغیره در نقطه P برابر با اندازه‌ی بردار گرادیان تابع در آن نقطه می‌باشد، لذا:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z)=(\frac{۲xz}{x^۲+y^۲-۱},\frac{۲yz}{x^۲+y^۲-۱},Ln(x^۲+y^۲-۱))$$

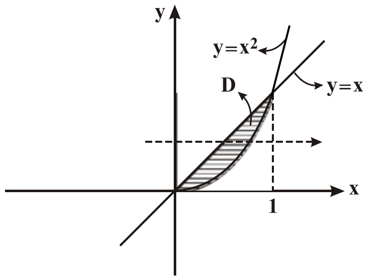
بردار گرادیان در نقطه $p(۱,۱,۱)$ برابر است با:

$$\Rightarrow\ \vec{\nabla} f(۱,۱,۱)=(\frac{۲}{۱},\frac{۲}{۱},Ln(۱))=(۲,۲,۰)$$

بنابراین بیشترین میزان تغییرات تابع داده شده در نقطه $p(۱,۱,۱)$ برابر است با:

$$\max f=|\vec{\nabla} f(۱,۱,۱)|=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۱۲ـ گزینه «۲» تابع زیر انتگرال یک متغیره و به صورت $f(y)$ است، اگر dx را به انتگرال میانی بیاوریم، انتگرال خیلی ساده‌تر حل می‌شود. توجه کنید که $x=\sqrt{y}$ همان $y=x^۲$ است البته با شرط $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$. ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم، ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:



$$D:\begin{cases} y\leq x\leq \sqrt{y} \\ ۰\leq y\leq ۱\end{cases}\Rightarrow I=\int_۰^۱\int_y^{\sqrt{y}}\frac{e^{\sqrt{y}}}{y-y\sqrt{y}}dxdy$$

$$\Rightarrow I=\int_۰^۱[\frac{e^{\sqrt{y}}}{y-y\sqrt{y}}\times x]_y^{\sqrt{y}}dy=\int_۰^۱\frac{e^{\sqrt{y}}}{y-y\sqrt{y}}(\sqrt{y}-y)dy=\int_۰^۱\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}dy\ \Rightarrow\ I=\int_۰^۱\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}dy$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $u=\sqrt{y}$ استفاده می‌کنیم، لذا:

$$\sqrt{y}=u\Rightarrow y=u^۲\Rightarrow dy=۲udu\ ,\ \begin{cases} y=۰\Rightarrow u=۰ \\ y=۱\Rightarrow u=۱\end{cases}$$

با جایگذاری عبارات فوق در I داریم:

$$I=\int_۰^۱\frac{e^u}{u}۲udu=۲\int_۰^۱e^udu=۲e^u\Big|_۰^۱=۲(e-۱)$$

۱۳ـ گزینه «۴» طبق صورت سؤال a_n دنباله‌ای نزولی و نامنفی است. بنابراین $\sqrt{a_n}$ هم دنباله‌ای نزولی و نامنفی است. حالا اگر $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^na_n$ همگرا باشد، خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty}(-۱)^na_n=۰$ پس $\lim_{n\to\infty}a_n=۰$ بنابراین $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=۰$. به این ترتیب $\sqrt{a_n}$ دنباله‌ای نامنفی، نزولی و همگرا به صفر است، پس سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\sqrt{a_n}$ همگراست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱) نادرست است. برای مثال فرض کنید $a_n=\frac{۱}{n}$ و $b=-\frac{۱}{n}$ باشد در این‌صورت سریِ $\sum_{n=۱}^{\infty}(۰)=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n+b_n$ همگراست اما سری $\sum_{n=۱}^{\infty}b_n$ واگراست.

گزینه‌ی (۲) شکل ناقص قضیه‌ی تراکم کوشی است. اگر به جای سری $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ از سری $\sum_{n=۱}^{\infty}۲^na_{۲^n}$ صحبت می‌کرد، درست بود اما برای جمله‌ی فعلی می‌توان مثال نقض پیدا کرد. مثلاً $a_n=\frac{۱}{n}$ را در نظر بگیرید. در این صورت داریم: $a_{۲n}=\frac{۱}{۲n}$ و می‌دانیم که سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{۲^n}=\sum_{n=۱}^{\infty}na_{۲^n}$ همگراست در حالی‌که سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ واگراست.

گزینه‌ی (۳) هم با درنظر گرفتن $a_n=\frac{۱}{\sqrt{n}}$ رد می‌شود. می‌دانیم که سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^na_n$ همگراست اما سریِ مثبتِ $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n^۲$ واگراست.

رشته آمار ـ سراسری ۹۳

توضیح: دانشجویان گرامی در آزمون سراسری سال ۹۳ سؤالات ریاضی عمومی رشته آمار و رشته ریاضی مشترک بودند.

۱ـ در کدام بازه سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{(n+1)3^n}$ همگراست؟

۱) $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ ۲) $[-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ ۳) $[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$ ۴) $(-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$

۲ـ با فرض پیوستگی تابع g، مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)g(t)dt}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) $2g(0)$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}g(0)$ ۴) $g(0)$

۳ـ مقدار $\int_0^1\sqrt{x-x^2}dx$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{\pi}{8}$

۴ـ اگر $\frac{d}{dx}(f(x))=g(x)$ و $\frac{d}{dx}(g(x))=f(x^2)$، مقدار $\frac{d^2}{dx^2}(f(x^3))$ کدام است؟

۱) $9x^4f(x^6)+6xg(x^3)$ ۲) $f(x^6)+g(x^3)$ ۳) $9x^4f(x^3)+6xg(x^6)$ ۴) $f(x^3)+g(x^6)$

۵ـ مساحت ناحیه محدود به نمودار معادله $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۶ـ اگر θ زاویه بین بردار نرمال بر رویه $z=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ در نقطه‌ی $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ و محور zها باشد و $L=\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}|\cos\theta|$، گزینه صحیح کدام است؟

۱) $L=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $L=0$ ۳) $L=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $L=\frac{\sqrt{2}}{2}$

۷ـ اگر $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2-xy+y^2=2\}$، مقدار انتگرال دوگانه $\iint_D(x^2-xy+y^2)dA$ کدام است؟

۱) $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{8\pi}{3}$ ۴) $\frac{4\pi}{3}$

۸ـ برای ثابت $k>0$، اگر $g(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{kt}}$ و $f(x,t)=\int_0^{g(x,t)}e^{-u^2}du$، آن‌گاه گزینه صحیح کدام است؟

۱) $k\frac{\partial f}{\partial x}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ ۲) $k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial f}{\partial t}$ ۳) $k\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ ۴) $k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=x\frac{\partial f}{\partial t}$

۹ـ بیش‌ترین انحنای منحنی $y=e^x$ در کدام نقطه اتفاق می‌افتد؟

۱) $(\frac{1}{2}\text{Ln}2,\frac{\sqrt{2}}{2})$ ۲) $(-\text{Ln}2,\sqrt{2})$ ۳) $(-\frac{1}{2}\text{Ln}2,\frac{\sqrt{2}}{2})$ ۴) $(\text{Ln}2,\sqrt{2})$

پاسخنامه رشته آمار ـ سراسری ۹۳

۱ـ گزینه «۲» با استفاده از آزمون ریشه همگرایی سری را بررسی می‌کنیم. برای همگرایی لازم است که $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n|x-1|^n}{(n+1)3^n}}<1$ باشد.

دقت کنید که برای هر چندجمله‌ای مانند $P(n)$ داریم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{P(n)}=1$. به همین علت $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$. بنابراین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n|x-1|^n}{(n+1)3^n}}=\frac{2|x-1|}{3}$$

$$\frac{2}{3}|x-1|<1 \Rightarrow |x-1|<\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}<x-1<\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$$

نقاط $x=\frac{5}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$ را باید به‌صورت جداگانه بررسی کنیم. به ازای $x=\frac{5}{2}$ داریم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{(n+1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)3^n}(\frac{3^n}{2^n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ که یک سری واگراست.

اما به ازای $x=-\frac{1}{2}$ داریم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(-\frac{1}{2}-1)^n}{(n+1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)3^n}\frac{(-1)^n3^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ که یک‌سری متناوب همگراست، زیرا دنباله $\frac{1}{n+1}$ نزولی به صفر میل می‌کند. بنابراین جواب برابر با $-\frac{1}{2}\le x<\frac{5}{2}$ است.

۲ـ گزینه «۳» حد داده شده فرم مبهم $\frac{0}{0}$ دارد. با استفاده از قانون مشتق‌گیری از انتگرال، هوپیتال را انجام دهیم:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)g(t)dt}{\sin^2x}\overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{(x-x)g(x)-0+\int_0^xg(t)dt}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^xg(t)dt}{\sin(2x)}\overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{g(x)-0}{2\cos(2x)}=\frac{g(0)}{2}$$

۳ـ گزینه «۴» عبارت زیر رادیکال را مربع کامل کنیم:

$$x-x^2=-(x^2-x)=-((x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$$

با استفاده از ویژگیِ انتقالِ انتگرال معین از کران‌های انتگرال $\frac{1}{2}$ کم کنیم و در انتگرالده به‌جای x؛ $x+\frac{1}{2}$ قرار دهیم:

$$I=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}d(x+\frac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1-4x^2}{4}}dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-4x^2}dx$$

با تغییر متغیر $2x=\sin(t)$ ادامه می‌دهیم:

$$2dx=\cos t\,dt \Rightarrow dx=\frac{1}{2}\cos t\,dt$$

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(t)}\,\frac{1}{2}\cos(t)dt=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos2t)dt=\frac{1}{8}(t+\frac{1}{2}\sin2t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}$$

توجه ۱: می‌توانستیم بلافاصله پس از مربع کامل کردن، تغییر متغیر مثلثاتی را آغاز کنیم:

$$I=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}\,dx$$

با معرفی $(x-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sin t$، داریم $dx=\frac{1}{2}\cos t\,dt$. به ازای $x=1$ داریم $t=\frac{\pi}{2}$ و به ازای $x=0$ داریم $t=-\frac{\pi}{2}$. لذا:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin^2t}\,\frac{1}{2}\cos t\,dt=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)dt$$

و همان‌طور که دیدید جواب این انتگرال $\frac{\pi}{8}$ است.

توجه ۲: (روش کوتاه) برای هر $a,b>0$ تابع بتا به این شکل معرفی می‌شود:

$$\int_0^1x^a(1-x)^bdx=\beta(a+1,b+1)=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}$$

در این تست با استفاده از همین رابطه داریم:

$$\int_0^1\sqrt{x-x^2}dx=\int_0^1x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2!}=\frac{\pi}{8}$$

۴ـ گزینه «۱» فرض کنیم $y=f(x^3)$، مقدار y'' را می‌خواهیم.

$$y' = 3x^2 f'(x^3)$$

$$y'' = 6x f'(x^3) + (3x^2)(3x^2) f''(x^3)$$

اکنون بنابر اطلاعات داده شده $\frac{d}{dx}(f(x)) = g(x)$، بنابراین $g(x)=f'(x)$، پس $g(x^3)=f'(x^3)$. همچنین داریم: $\frac{d}{dx}g(x)=f(x^2)$، بنابراین $g'(x)=f(x^2)$. به عبارتی $f''(x)=f(x^2)$. پس $f''(x^3)=f(x^6)$.

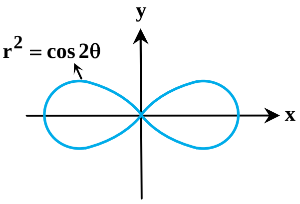
با جایگذاری این معادلات در y'' داریم:

$$y''=6xg(x^3)+9x^4f(x^6)$$

۵ـ گزینه «۲» منحنی $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ در دستگاه قطبی به این شکل بیان می‌شود:

$$(r^2)^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=r^2\cos(2\theta)$$

به عبارتی: $r^2=\cos2\theta\ge 0$ با توجه به نامنفی بودن سمت چپ معادله خواهیم داشت $\cos2\theta\ge 0$ پس $-\frac{\pi}{2}\le 2\theta\le\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}\le 2\theta\le\frac{5\pi}{2}$. در واقع منحنی $r^2=\cos2\theta$ از دو نیمه متقارن تشکیل شده است که در یکی از آن‌ها $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ و در دیگری $\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}$. مساحت یکی از نواحی را بدست آورده و دو برابر کنیم.



$$\text{مساحت} = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=1$$

۶ـ گزینه «۴» معادله رویه داده شده را بصورت $g(x,y,z)=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-z=0$ می‌نویسیم. بردار عمود بر رویه همان بردار گرادیانِ g است:

$$\vec\nabla g = (g_x,g_y,g_z) = \left(x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}+3x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\ ,\ y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}+3y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\ ,\ -1\right)$$

هرگاه $(x,y,z)\to(0,0,0)$ عبارات $3x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ و $3y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ به وضوح به صفر میل خواهند کرد، اما $x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ و $y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ دارای فرم مبهم هستند. بنابراین $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\vec\nabla g = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ -1\right)$. بردار $\vec k=(0,0,1)$ موازی محور zها است. اگر θ زاویه بین $\vec\nabla g$ و $\vec k$ باشد، خواهیم داشت:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\cos(\theta) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{|\vec\nabla g\cdot\vec k|}{|\vec\nabla g||\vec k|} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷ـ گزینه «۲» همان‌طور که در متن درس گفتیم، هرگاه ناحیه‌ی انتگرال‌گیری درون بیضی $x^2-xy+y^2=c$ باشد، با معرفی $u=x+y$ و $v=x-y$ انتگرال را حل می‌کنیم. در این صورت $x=\frac{1}{2}(u+v)$ و $y=\frac{1}{2}(u-v)$ و معادله $x^2-xy+y^2=2$ بصورت زیر در دستگاه جدید تغییر می‌کند:

$$\frac{1}{4}(u+v)^2-\frac{1}{4}(u+v)(u-v)+\frac{1}{4}(u-v)^2=2 \Rightarrow \frac{1}{4}(u^2+3v^2)=2 \Rightarrow u^2+3v^2=8$$

چون ضابطه‌ی y,x را برحسب v,u داریم، ژاکوبین دستگاه را بصورت مستقیم حساب می‌کنیم:

$$J_{uv}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

قدرمطلق ژاکوبین برابر است با $\frac{1}{2}$ و در انتگرالده ضرب خواهد شد. بنابراین داریم:

$$I=\iint_D (x^2-xy+y^2)\,dydx = \iint_{D'}\frac{1}{4}(u^2+3v^2)\left(\frac{1}{2}\right)dudv$$

ناحیه D' درون یک بیضی با معادله $u^2+3v^2=8$ است. با تغییر متغیر بیضوی به‌صورت $u=r\cos\theta$ و $v=\frac{r}{\sqrt{3}}\sin\theta$ خواهیم داشت $u^2+3v^2=r^2$.

حالا ژاکوبین را حساب می‌کنیم:
$$J_{r\theta}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}} & \frac{r\cos\theta}{\sqrt{3}}\end{vmatrix}=\frac{r}{\sqrt{3}}$$

درون این ناحیه خواهیم داشت $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le\sqrt{8}$.
$$I=\iint_{D'}\frac{1}{4}(u^2+3v^2)(\frac{1}{2})dudv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}}\frac{1}{4}(r^2)(\frac{1}{2})(\frac{r}{\sqrt{3}})drd\theta=\frac{1}{8\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}}r^3drd\theta=\frac{1}{8\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}(\frac{r^4}{4})\Big|_0^{\sqrt{8}}d\theta=\frac{1}{8\sqrt{3}}\frac{8^2}{4}(2\pi)=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

۸ـ گزینه «۲» با توجه به ضابطه‌ی تابع g مشتق‌های جزئی آن را به‌دست می‌آوریم:
$$g(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{kt}}=\frac{1}{2\sqrt{k}}xt^{-\frac{1}{2}}$$

بنابراین: $g_x=\frac{1}{2\sqrt{k}}t^{-\frac{1}{2}}$، $g_{xx}=0$ و $g_t=-\frac{1}{4\sqrt{k}}xt^{-\frac{3}{2}}$ و $g_{tt}=\frac{3}{8\sqrt{k}}xt^{-\frac{5}{2}}$. حال با رعایت قاعده مشتق‌گیری از انتگرال، مشتق‌های جزئی f را به‌دست می‌آوریم:
$$f=\int_0^g e^{-u}du$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=g_xe^{-g^2}=\frac{1}{2\sqrt{k}}t^{-\frac{1}{2}}e^{-g^2}\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial t}=g_te^{-g^2}=-\frac{1}{4\sqrt{k}}xt^{-\frac{3}{2}}e^{-g^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{2\sqrt{k}}t^{-\frac{1}{2}}(-2g)g_xe^{-g^2}=\frac{1}{2\sqrt{k}}t^{-\frac{1}{2}}(\frac{-2x}{2\sqrt{kt}})(\frac{1}{2\sqrt{k}}t^{-\frac{1}{2}})e^{-g^2}$$

بنابراین $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{4k\sqrt{k}}xt^{-\frac{3}{2}}e^{-g^2}$. با مقایسه مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial f}{\partial t}$ می‌بینیم $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial t}$، که همان گزینه (۲) است.

۹ـ گزینه «۳» انحنای منحنی $y=f(x)$ برابر است با $\kappa=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$. در مورد تابع $y=e^x$ داریم $y'=y''=e^x>0$. بنابراین انحنا در نقطه x برابر است با $\kappa(x)=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$. برای تعیین مقدار $\max\kappa(x)$ ابتدا نقطه بحرانی آن را می‌یابیم:
$$\kappa'(x)=\frac{e^x(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}-3e^{2x}(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}e^x}{(1+e^{2x})^3}=0\Rightarrow e^x(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}[(1+e^{2x})-3e^{2x}]=0\Rightarrow 1-2e^{2x}=0\Rightarrow e^{2x}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 2x=Ln(\frac{1}{2})=-Ln(2)\Rightarrow x=-\frac{Ln(2)}{2}$$

انحنا در نقطه‌ای به‌طول $x=-\frac{Ln(2)}{2}$ به بیشترین مقدارش می‌رسد.

گزینه (۳) درست است و نیازی به محاسبه عرض این نقطه نداریم. البته به سادگی مشخص است که $y=e^x=e^{-\frac{1}{2}Ln2}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

رشته آمار ــ سراسری ۹۴

توضیح: دانشجویان گرامی در آزمون سراسری سال ۹۴ سؤالات ریاضی عمومی رشته آمار و رشته ریاضی مشترک بودند.

۱ــ انحنای منحنی $\vec{r}(t)=t\vec{i}+\cosh t\vec{j}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\cosh t}$ ۲) $\frac{t}{\cosh^2 t}$ ۳) $\frac{1}{\cosh 2t}$ ۴) $\frac{1}{\cosh^2 t}$

۲ــ اگر T مکعبی در $\frac{1}{8}$ اول فضا باشد که رئوس آن $(0,0,0)$، $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ هستند، مقدار انتگرال $\iiint_T e^{x+y+z}dv$ کدام است؟

۱) $(e-1)^3$ ۲) e^3-1 ۳) e^3+1 ۴) $(e+1)^3$

۳ــ مقدار مشتق پنجم $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ در $x=0$ کدام است؟

۱) 120 ۲) -120 ۳) -1 ۴) 1

۴ــ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7^{n-1}}$ .... .

۱) واگراست.

۲) همگراست و مجموع آن $1+\frac{49}{36}$ است.

۳) همگراست و مجموع آن $\frac{7}{6}$ است.

۴) همگراست و مجموع آن $\frac{49}{36}$ است.

۵ــ مجموعه نقاط z در صفحه مختلط $|z|^2-3|z|+2<0$ کدام است؟

۱) $\{x+iy \mid 2<x^2+y^2<4\}$

۲) $\{x+iy \mid 1<x^2+y^2<4\}$

۳) $\{x+iy \mid 1<x^2+y^2<3\}$

۴) $\{x+iy \mid 1<x^2+y^2<5\}$

۶ــ مقدار انتگرال معین $\int_0^{\mathrm{Ln}2} e^x \mathrm{Ln}(e^{-x}+1)dx$ کدام است؟

۱) $\mathrm{Ln}(\frac{4}{27})$ ۲) $\mathrm{Ln}(\frac{27}{4})$ ۳) $\mathrm{Ln}(\frac{27}{16})$ ۴) $\mathrm{Ln}(\frac{9}{4})$

۷ــ f تابعی دو بار مشتق‌پذیر بوده که به ازای $a\neq 0$، $\int_0^a (f'(x)+xf''(x))dx=a$ ، مقدار $f'(a)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}a$ ۲) 0 ۳) 1 ۴) a

۸ــ ماکسیمم مقدار $f(x,y)=9-x^2-y^2$ روی خط $x+y=3$ ، کدام است؟

۱) $\frac{2}{13}$ ۲) $\frac{13}{2}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۹ــ مقدار انتگرال $\iint_A xe^{x^2-y^2}dydx$ که در آن A ناحیه محدود به خطوط $y=x$ ، $y=x-1$ ، $y=1$ و $y=0$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\pi^3+\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}e^3-\frac{1}{4}e-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}e^3-\frac{1}{2}e-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}\pi^3-\frac{1}{2}$

پاسخنامه رشته آمار ـ سراسری ۹۴

۱ـ گزینه «۴» با استفاده از فرمول انحنا داریم:

$$\kappa=\frac{|\vec r'\times\vec r''|}{|\vec r'|^3}\ ,\ \begin{cases}\vec r'(t)=\vec i+\sinh t\,\vec j\ ,\ \vec r''(t)=\cosh t\,\vec j\\ |\vec r'(t)|=\sqrt{1+\sinh^2 t}=\sqrt{\cosh^2 t}=\cosh t\end{cases}$$

$$\vec r'\times\vec r''=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & \sinh t & 0\\ 0 & \cosh t & 0\end{vmatrix}=0\vec i-0\vec j+\cosh t\,\vec k=\cosh t\,\vec k\ \Rightarrow\ |\vec r'\times\vec r''|=\cosh t\ \Rightarrow\ \kappa=\frac{\cosh t}{\cosh^3 t}=\frac{1}{\cosh^2 t}$$

۲ـ گزینه «۱» چون T یک مکعب به ضلع واحد است، پس تمام کران‌های انتگرال‌ها اعداد ثابت صفر و یک هستند. در نتیجه می‌توانیم انتگرال‌ها را به این صورت از هم جدا کنیم:

$$\iiint_T e^{x+y+z}\,dv=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^x e^y e^z\,dxdydz=\left(\int_0^1 e^x dx\right)\left(\int_0^1 e^y dy\right)\left(\int_0^1 e^z dz\right)=(e-1)(e-1)(e-1)=(e-1)^3$$

۳ـ گزینه «۱» برای ناحیه‌ی $|x|<1$ داریم $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$، در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\cdots$$

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2}=x(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)=x+x^3+x^5+x^7+\cdots$$

می‌دانیم که اگر بسط مک‌لورن $f(x)$ به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ باشد، داریم:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Rightarrow f^{(n)}(0)=n!\times a_n$$

در بسط مک‌لورن تابع f ضریب x^5 برابر است با $a_5=1$. پس داریم:

$$f^{(5)}(0)=5!\times a_5=5!\times 1=120$$

۴ـ گزینه «۴» می‌دانیم که برای $|x|<1$ داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

با مشتق‌گیری از طرفین کاری می‌کنیم که ضریب n در سری ایجاد شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

به ازای $n=0$، اولین جمله‌ی این سری صفر می‌شود. پس با کنار گذاشتن آن می‌توان نوشت: $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$. حالا به ازای $x=\frac{1}{7}$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7^{n-1}}=\frac{49}{36}$$

روش تستی: ابتدا چند جمله‌ی اول سری را می‌نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7^{n-1}}=\frac{1}{7^{1-1}}+\frac{2}{7^{2-1}}+(\text{عددی مثبت و البته بسیار کوچک})=1+\frac{2}{7}+(\text{عددی مثبت و البته کوچک})\simeq\frac{9}{7}$$

حالا در گزینه‌ها دنبال عددی باشد که حدود $\frac{9}{7}$ (و کمی بیشتر از آن) است. فقط گزینه‌ی (۴) چنین شرایطی دارد. گزینه‌ی (۳) که از $\frac{9}{7}$ کمتر است و گزینه‌ی (۲) به این دلیل نمی‌تواند جواب باشد که در رشد نهایی مخرج بقیه جملات بعد از $\frac{2}{7}$ امکان ندارد به ۱ برسند و کوچکتر از $\frac{2}{7}$ خواهند بود. گزینه‌ی (۱) به وضوح نادرست است؛ زیرا مقدار سری یک عدد حقیقی است و سری واگرا نیست.

۵ـ گزینه «۲» ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دو را برحسب $|z|$ حل کرده و تعیین علامت می‌کنیم:

$$|z|^2-3|z|+2<0$$

$$\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=1\ \Rightarrow\ |z|=\frac{3\pm1}{2}=2,1\ \Rightarrow$$

	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\|z\|^2-3\|z\|+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

مجموعه‌ی جواب، ناحیه‌ی بین دو ریشه است:

$$\Rightarrow 1<|z|<2\ \Rightarrow\ 1<\sqrt{x^2+y^2}<2\ \Rightarrow\ 1<x^2+y^2<4$$

۶ـ گزینه «۳» از تغییر متغیر $t=e^x$ استفاده می‌کنیم. پس $dt=e^x dx$ و چون $0\le x\le \mathrm{Ln}2$، پس $1\le t\le 2$ است:

$$\text{جواب}=\int_1^2 \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{t}+1\right)dt=\int_1^2\mathrm{Ln}\left(\frac{t+1}{t}\right)dt=\int_1^2[\mathrm{Ln}(t+1)-\mathrm{Ln}t]\,dt=\int_1^2\mathrm{Ln}(t+1)dt-\int_1^2\mathrm{Ln}t\,dt$$

در اولین انتگرال می‌توانیم با استفاده از ویژگی انتگرال معین؛ از t یک واحد کم کنیم اما به حدود انتگرال یک واحد اضافه کنیم (در واقع مثل آن است که تغییر متغیر $x=t+1$ را انجام داده باشیم). از طرفی می‌دانیم $\int u\mathrm{Ln}u\,du=u\mathrm{Ln}u-u+c$، لذا داریم:

$$\text{جواب}=\int_2^3\mathrm{Ln}t\,dt-\int_1^2\mathrm{Ln}t\,dt=[t(\mathrm{Ln}t-1)]_2^3-[t(\mathrm{Ln}t-1)]_1^2=3\mathrm{Ln}3-3-2\mathrm{Ln}2+2-2\mathrm{Ln}2+2-1=3\mathrm{Ln}3-4\mathrm{Ln}2=\mathrm{Ln}\frac{27}{16}$$

۷ــ گزینه «۳» با استفاده از قاعده‌ی مشتق حاصل‌ضرب داریم:

$$(xf'(x))' = f'(x) + xf''(x) \;\Rightarrow\; \int_{۰}^{a} (f'(x) + xf''(x))\,dx = [xf'(x)]_{۰}^{a} = af'(a) - ۰ = a \;\Rightarrow\; f'(a) = ۱$$

۸ــ گزینه «۳»

روش اول: با استفاده از ضرایب لاگرانژ برای تابع $f(x,y) = ۹ - x^{۲} - y^{۲}$ با قید $g : x + y = ۳$ داریم:

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{-۲x}{۱} = \frac{-۲y}{۱} \Rightarrow y = x$$

با جایگذاری این نتیجه در معادله‌ی قید g داریم:

$$x + y = ۳ \;\Rightarrow\; x + x = ۳ \;\Rightarrow\; x = \frac{۳}{۲} \;\Rightarrow\; y = \frac{۳}{۲}$$

پس جواب برابر است با:

$$\Rightarrow f(\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲}) = ۹ - (\frac{۳}{۲})^{۲} - (\frac{۳}{۲})^{۲} = \frac{۹}{۲}$$

روش دوم: از معادله‌ی قید $x + y = ۳$ داریم $y = ۳ - x$. پس با جایگذاری در ضابطه f آن را یک متغیره می‌کنیم:

$$f(x) = ۹ - x^{۲} - (۳ - x)^{۲} = -۲x^{۲} + ۶x$$

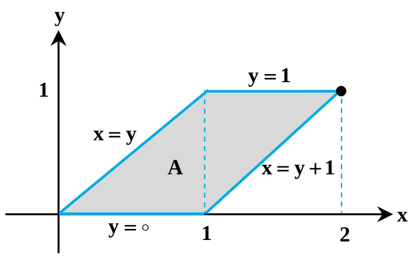
حالا نقاط بحرانی f را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = -۴x + ۶ = ۰ \;\Rightarrow\; x = \frac{۳}{۲}$$

و با جایگذاری $x = \frac{۳}{۲}$ در تابع f داریم:

$$f(\frac{۳}{۲}) = -۲(\frac{۳}{۲})^{۲} + ۶(\frac{۳}{۲}) = \frac{۹}{۲}$$

۹ــ گزینه «۲» انتگرال با این ترتیب حل نمی‌شود، ترتیب متغیرها را عوض می‌کنیم.
به وضوح داریم $۰ \le y \le ۱$ و اگر از چپ به راست حرکت کنیم، مرز $x = y$ مرز ورودی و $x = y + ۱$ مرز خروجی است. در نتیجه $y \le x \le y + ۱$ است.



$$\iint_A xe^{x^{۲}-y^{۲}}\,dydx = \int_{۰}^{۱}\int_{y}^{y+۱} e^{-y^{۲}} xe^{x^{۲}}\,dxdy = \int_{۰}^{۱} e^{-y^{۲}} (\frac{۱}{۲}e^{x^{۲}}) \Big|_{y}^{y+۱} dy$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} e^{-y^{۲}} (e^{(y+۱)^{۲}} - e^{y^{۲}})\,dy = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} (e^{۲y+۱} - ۱)\,dy$$

$$= \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}e^{۲y+۱} - y)\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}e^{۳} - ۱) - \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}e - ۰) = \frac{۱}{۴}e^{۳} - \frac{۱}{۴}e - \frac{۱}{۲}$$

رشته سنجش از دور و سیستم اطلاعات جغرافیایی ــ سراسری ۹۱

۱ــ دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{۲-\log_۲(x-۱)}$ کدام است؟

۱) $(۱,۳]$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $(۱,۵]$ ۴) $[۳,۵]$

۲ــ در تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & ; \ x>۲ \\ x^۲-۲x & ; \ x\le ۲ \end{cases}$ مقدار $f(۴^{-\frac{۱}{۲}})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) صفر

۳ــ در تابع $f(x)=ab^x$ اگر $f(۰)=۳$, $f(۳)=۲۴$ باشد $f(۶)$ کدام است؟

۱) ۹۶ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۹۲ ۴) ۱۵۶

۴ــ در بسط عبارت $(x^۲-\frac{۲}{x})^۶$ جمله فاقد x کدام است؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۶۰

۵ــ با ارقام ۰, ۳, ۴, ۵, ۷ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟

۱) ۳۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۲۷

۶ــ بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۳x$ در بازه $[-۲,۲]$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۷ــ سطح محدود به منحنی $y=e^{۲x}$ و محور xها و دو خط $x=-۱$ و $x=۱$ کدام است؟

۱) $e^۲-\frac{۱}{e^۲}$ ۲) $(e-\frac{۱}{e})^۲$ ۳) $(e+\frac{۱}{e})^۲$ ۴) $\frac{۱}{۲}(e^۲-\frac{۱}{e^۲})$

۸ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های ماتریس A.B کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۹ ۳) ۲۷ ۴) ۲۶

۹ــ معادله صفحه مماس بر رویه $z=x^۲-۲y$ در نقطه $(۲,۱,۲)$ کدام است؟

۱) $۲x-y-z=۲$ ۲) $۴x-۲y-z=۴$ ۳) $۴x-۲y+z=۸$ ۴) $۲x-y+z=۴$

رشته سنجش از دور و سیستم اطلاعات جغرافیایی ــ سراسری ۹۱

۱ــ گزینه «۳» عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد. همچنین عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد.

$$f(x)=\sqrt{۲-\log_۲(x-۱)} \Rightarrow ۲-\log_۲(x-۱)\ge ۰ \quad , \quad x-۱>۰$$
$$\Rightarrow ۲\ge \log_۲(x-۱) \quad , \quad x>۱ \Rightarrow ۲^۲\ge x-۱ \quad , \quad x>۱$$
$$\Rightarrow ۵\ge x \quad , \quad x>۱ \Rightarrow ۵\ge x>۱$$

بنابراین دامنه f، $D_f=(۱,۵]$ است.

۲ــ گزینه «۴» ابتدا مقدار x را محاسبه می‌کنیم.

$$x=۴^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

مقدار x کمتر از ۲ است. پس از ضابطه‌ی بالایی استفاده می‌کنیم.

$$f(\frac{۱}{۲})=۲(\frac{۱}{۲})-۱=۰$$

۳ــ گزینه «۳» شرایط داده شده را در تابع $f(x)=ab^x$ قرار می‌دهیم:

$$f(۰)=۳ \Rightarrow ab^۰=۳ \Rightarrow a=۳$$
$$f(۳)=۲۴ \Rightarrow ab^۳=۲۴ \Rightarrow ۳b^۳=۲۴$$

بنابراین $b^۳=۸$ و $b=۲$ است.

$$f(x)=۳\times ۲^x \Rightarrow f(۶)=۳\times ۲^۶=۳\times ۶۴=۱۹۲$$

۴ـ گزینه «۱»

$$(x^2-\frac{2}{x})^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(x^2)^k(-\frac{2}{x})^{6-k}=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-2)^{6-k}\ x^{3k-6}$$

در جمله فاقد x، توان x باید صفر باشد؛ بنابراین به ازای $k=2$ به این جمله می‌رسیم. $\text{جمله فاقد } x=\binom{6}{2}(-2)^4x^0=\frac{6!}{2!4!}(16)=(15)(16)=240$

۵ـ گزینه «۴»

صدگان	دهگان	یکان

رقم صدگان باید مخالف صفر باشد و رقم یکان باید فرد باشد. برای رقم یکان، ۳ انتخاب داریم که یکی از ارقام ۳ یا ۵ یا ۷ خواهد بود. حال برای رقم صدگان ۳ انتخاب داریم که هر رقمی به جز صفر و رقم یکان می‌تواند باشد. اکنون ۳ رقم باقی می‌ماند که می‌توانند در دهگان قرار بگیرند.

$\text{تعداد کل حالات}=3\times3\times3=27$

۶ـ گزینه «۱» نقاط بحرانی را در بازه شناسایی می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x \qquad f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$$

$x=-1$ و $x=3$ طول نقاط بحرانی f هستند که فقط $x=-1$ در بازه‌ی $[-2,2]$ قرار دارد. مقدار f را در این نقطه بحرانی و در دو سر بازه محاسبه می‌کنیم:

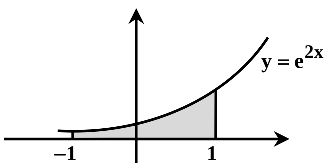
$$f(-2)=-\frac{8}{3}-4+6=-\frac{2}{3}$$

$$f(-1)=-\frac{1}{3}-1+3=\frac{5}{3}$$

$$f(2)=\frac{8}{3}-4-6=-\frac{22}{3}$$

بنابراین در بازه مورد نظر $\max f=\frac{5}{3}$ است.

۷ـ گزینه «۴» ناحیه مورد نظر بین منحنی $y=e^{2x}$ و محور xها $(y=0)$ قرار دارد و کران‌های x نیز عبارتند از $x=-1,\ x=1$.



$$\text{مساحت}=\int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})$$

۸ـ گزینه «۲»

$$AB=\begin{bmatrix}2&1\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&1\\11&5\end{bmatrix}$$

$\text{جواب}=12+1+11+5=29$

۹ـ گزینه «۲» بردار گرادیان رویه‌ی $f=z-x^2+2y=0$ را در نقطه $(2,1,2)$ به دست می‌آوریم.

$$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)=(-2x,2,1)=(-4,2,1)$$

معادله صفحه مماس بر رویه چنین است:

$$f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)+f_z(z-z_0)=0$$

$$-4(x-2)+2(y-1)+(z-2)=0\ \Rightarrow -4x+2y+z=-4$$

توجه کنید که با قرینه کردن طرفین همان گزینه (۲) حاصل می‌شود.

رشته سنجش از دور و سیستم اطلاعات جغرافیایی ــ سراسری ۹۲

۱ـ تابع $f(x)=\frac{۲+x}{۲-x}$ را به صورت مجموع یک تابع فرد و یک تابع زوج نوشته‌ایم. مقدار تابع زوج به ازای $x=\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۲ـ برد تابع با ضابطه $f(x)=(۱-x+\lfloor x\rfloor)^{-\frac{۱}{۲}}$ کدام است؟ (نماد $\lfloor\ \rfloor$ به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $[۱,+\infty)$

۳ـ اگر $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^۲+۱})$ مقدار $f^{-۱}(\ln ۳)$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۴ـ حدّ عبارت $\frac{x-|x|}{x+[x]}$ وقتی $x\to ۰$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) حد ندارد

۵ـ تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{۲^x-۳^{-x}}{۴^x-۹^{-x}} & , x\neq ۰\\ b & , x=۰\end{cases}$ به ازای کدام مقدار b در $x=۰$ پیوسته است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار b

۶ـ مشتق تابع $f(x)=(|x+۱|-|x|)^۲$ در کدام بازه مثبت است؟

۱) $(-۱,-\frac{۱}{۲})$ ۲) $(-\frac{۱}{۲},۰)$ ۳) $(-۱,۰)$ ۴) $(۰,+\infty)$

۷ـ اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۲}{۳}$ باشد، مشتق $f(\sqrt{۳x+۱})$ در نقطه $x=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸ـ اگر خط $y=۲x-۳$ بر منحنی به معادله $y=\frac{۲}{۳}x^۳-\frac{۳}{۲}x^۲+a$ در ناحیه اول مماس شود، عدد a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۹ـ فاصله نقطه می‌نیمم نمودار تابع $y=(x^۲-۳x+۱)e^{۱-x}$ از خط مجانب آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰ـ حاصل انتگرال $\int_۲^۴\frac{x\,dx}{x^۲-۲x+۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}+\ln ۳$ ۲) $\frac{۲}{۳}+\ln ۲$ ۳) $۲-\ln\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}-\ln ۳$

۱۱ـ در تابع دو متغیری $z=\sqrt[۳]{xy}+\frac{x+y}{x}$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(۲,۴)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۲ـ اگر $z=x^۲y-xy^۲$ و $x=r^۲+s$ و $y=۲r+s^۲$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}$ به ازای $r=۲$ و $s=-۱$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۴ ۳) -۱۲ ۴) -۲۲

۱۳ـ بیشترین مقدار تابع $z=x^۲+xy$ با شرط $۳x+۲y=۱۲$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

۱۴ـ در دنباله اعداد $\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{18},\frac{1}{32},\dots$ جمله هشتم کدام است؟

۱) $\frac{1}{96}$ ۲) $\frac{1}{112}$ ۳) $\frac{1}{124}$ ۴) $\frac{1}{128}$

۱۵ـ حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & -2 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix}$، کدام است؟

۱) a^2-2 ۲) a^2+3a ۳) $2a^2-2a$ ۴) $2a^2+2a$

پاسخنامه رشته سنجش از دور و سیستم اطلاعات جغرافیایی ـ سراسری ۹۲

۱ـ گزینه «۴» هرگاه فرض کنیم $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ آنگاه g زوج است و h فرد و $f=g+h$؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{جواب}=g(\sqrt{3})=\frac{f(\sqrt{3})+f(-\sqrt{3})}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\frac{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{1}{2}\frac{4+4\sqrt{3}+3+4-4\sqrt{3}+3}{4-3}=7$$

۲ـ گزینه «۴» می‌دانیم که $y=x-[x]$ بخش اعشاری عدد x است و $0\le x-[x]<1$. بنابراین با قرینه کردن طرفین داریم:

$$0\ge -x+[x]>-1$$

حال با افزودن یک واحد به طرفین نامساوی می‌توان چنین نوشت:

$$1\ge 1-x+[x]>0$$

$$1\le \frac{1}{1-x+[x]}<\infty$$

$$1\le \frac{1}{\sqrt{1-x+[x]}}<\infty$$

به عبارتی $1\le f(x)<\infty$.

۳ـ گزینه «۳»

روش اول: هرگاه $f^{-1}(\ln 3)=b$ باشد، آنگاه $f(b)=\ln 3$ پس داریم:

$$\ln(b+\sqrt{b^2+1})=\ln 3 \Rightarrow b+\sqrt{b^2+1}=3 \Rightarrow \sqrt{b^2+1}=3-b \Rightarrow b^2+1=b^2+9-6b \Rightarrow 6b-8=0 \Rightarrow b=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

روش دوم: با جایگذاری گزینه‌ها در ضابطه‌ی f می‌بینیم که:

$$f(\frac{4}{3})=\ln(\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{16}{9}+1})=\ln(3)$$

پس گزینه (۳) درست است.

۴ـ گزینه «۱» به علت وجود $|x|$ و $[x]$ لازم است حدود چپ و راست را جداگانه حساب کنیم.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x-|x|}{x+[x]}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+x}{x-1}=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x-|x|}{x+[x]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-x}{x+0}=0$$

بنابراین حد موجود و برابر صفر است.

۵ـ گزینه «۲» از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^{-x}}{4^x-9^{-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+3^{-x}\ln 3}{4^x\ln 4+9^{-x}\ln 9}=\frac{\ln 2+\ln 3}{\ln 4+\ln 9}=\frac{\ln 6}{\ln 36}=\log_{36}^{6}=\frac{1}{2}$$

برای پیوستگی f در $x=0$ لازم است $b=\frac{1}{2}$ باشد.

۶ــ گزینه «۲»

$f(x)=(|x+1|-|x|)^2$

در $x=0$ و $x=-1$ که ریشه عبارات داخل قدر مطلق هستند، ضابطه f عوض می‌شود.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<-1\\ (2x+1)^2 & -1<x<0\\ 1 & 0<x\end{cases}$$

بنابراین در نواحی $x<-1$ و $x>0$ داریم $f'(x)=0$ و در بازه‌ی $-1<x<0$ داریم:

$f'(x)=2(2x+1)$

پس فقط در بازه $(-\frac{1}{2},0)$ مقدار $f'(x)=2(2x+1)$ مثبت است.

۷ــ گزینه «۱» می‌دانیم که $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ بنابراین $f'(2)=\frac{2}{3}$.

حال مشتق $y=f(\sqrt{3x+1})$ را در $x=1$ حساب می‌کنیم:

$$y'=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\,f'(\sqrt{3x+1})$$

$$y'(1)=\frac{3}{2\sqrt{4}}\,f'(\sqrt{4})=\frac{3}{4}\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

۸ــ گزینه «۴» شرط آن‌که خط $f(x)=2x-3$ بر منحنی $g(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+a$ مماس شود، آن است که در نقطه تماس داشته باشیم:

$$\begin{cases}f(x)=g(x)\\ f'(x)=g'(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+a=2x-3\\ 2x^2-3x=2\end{cases}$$

از معادله دوم داریم $2x^2-3x-2=0$، با حل این معادله خواهیم داشت:

$$x=\frac{3\pm 5}{4}=2,-\frac{1}{2}$$

نقطه تماس در ربع اول قرار دارد پس $x=2$ است. با جایگذاری در معادله اول داریم:

$$\frac{16}{3}-6+a=1$$

پس $a=\frac{5}{3}$ است.

۹ــ گزینه «۱» از آنجا که سرعت رشد توابع نمایی از چند جمله‌ای‌ها بیشتر است، خط $y=0$ مجانب افقی این منحنی است. برای توضیح کامل‌تر داریم:

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{e^{-1+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{e^{-1+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^{-1+x}}=0$$

پس خط $y=0$ مجانب افقی است. حال مختصات نقطه می‌نیمم را پیدا می‌کنیم.

$$y'=(2x-3)e^{1-x}-(x^2-3x+1)e^{1-x}=(-x^2+5x-4)e^{1-x}=0\Rightarrow -x^2+5x-4=0\Rightarrow x=1,4$$

ببینیم کدام یک از این نقاط، می‌نیمم تابع را می‌دهد.

$$y''=(-2x+5)e^{1-x}-(-x^2+5x-4)\,e^{1-x}=(x^2-7x+9)e^{1-x}$$

به ازای $x=1$ داریم $y''=3>0$ پس $x=1$ طول نقطه می‌نیمم است. در این نقطه داریم:

$y=-1$

فاصله نقطه $(1,-1)$ از خط $y=0$ برابر $\underline{1}$ است.

۱۰ــ گزینه «۱»

$$I=\int_2^4\frac{x}{x^2-2x+1}dx=\int_2^4\frac{x}{(x-1)^2}dx=\int_2^4\frac{(x-1)+1}{(x-1)^2}dx=\int_2^4[\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}]dx$$

با فرض $u=x-1$ داریم $du=dx$. با این تغییر متغیر داریم:

$$\int[\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}]\,dx=\int[\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}]\,du=\ln|u|-\frac{1}{u}+c$$

به این ترتیب، در انتگرال معین I داریم:

$$I=(\ln|x-1|-\frac{1}{x-1})\Big|_2^4=\ln(3)-\frac{1}{3}-\ln(1)+1=\ln(3)+\frac{2}{3}$$

۱۱ــ گزینه «۱» مقدار y را ثابت و x را متغیر فرض می‌کنیم:

$$z=\sqrt[3]{xy}+\frac{x+y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{3\sqrt[3]{(xy)^2}}+\frac{x-(x+y)}{x^2}$$

در نقطه‌ی $(x,y)=(2,4)$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4}{12}+\frac{-4}{4}=-\frac{2}{3}$$

۱۲ــ گزینه «۴» از قاعده زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=(2xy-y^2)(2r)+(x^2-2xy)(2)$$

به ازای $r=2$, $s=-1$ خواهیم داشت: $x=3$ و $y=5$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=(5)(4)+(-21)(2)=-22$$

۱۳ــ گزینه «۲» تابع هدف $z=x^2+xy$ و قید (شرط) داده شده $g=3x+2y=12$ است. با استفاده از ضریب لاگرانژ λ اکسترمم‌های مقید را تعیین می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{z_x}{g_x}=\frac{z_y}{g_y}\Rightarrow\frac{2x+y}{3}=\frac{x}{2}\Rightarrow 4x+2y=3x\Rightarrow y=-\frac{x}{2}$$

رابطه به دست آمده را در قید g قرار می‌دهیم:

$$3x+2y=12\Rightarrow 3x-x=12\Rightarrow x=6$$

بنابراین در نقطه بحرانی $x=6$ و $y=-3$ است.

$$\max z=36-18=18$$

۱۴ــ گزینه «۴» جمله عمومی دنباله‌ی داده شده $a_n=\frac{1}{2n^2}$ است. بنابراین جمله‌ی هشتم آن برابر است با:

$$a_8=\frac{1}{2(64)}=\frac{1}{128}$$

۱۵ــ گزینه «۳» از روش ساروس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ a & 1 & -2\\ 2 & -3 & a\end{vmatrix}=a+8-3a-2+2a^2-6=2a^2-2a$$

رشته سنجش از دور و سیستم اطلاعات جغرافیایی ــ سراسری ۹۳

۱ــ نمودارهای دو تابع $f(x)=2^x$ و $g(x)=\frac{1}{2}\log x^2$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) غیرمتقاطع

۲ــ ضابطه معکوس تابع $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\ ;\ x\geq 0$ به صورت $f^{-1}(x)=\ln U(x)$ است. تابع $U(x)$ کدام است؟

۱) $x-\sqrt{x^2-1}\ ;\ x\geq 1$　　۲) $x+\sqrt{x^2-1}\ ;\ x\geq 1$　　۳) $x-\sqrt{1-x^2}\ ;\ x\leq 1$　　۴) $x+\sqrt{1-x^2}\ ;\ x\leq 1$

۳ــ حد عبارت $(1+x\ln 2)^{\frac{3}{x}}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

۱) ۶　　۲) ۸　　۳) $\ln 6$　　۴) $\ln 8$

۴ــ اگر $S_n=1+3+5+\dots+(2n-1)$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{(2n-1)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{3}{4}$　　۳) $\frac{1}{2}$　　۴) ۱

۵ــ اگر $f(x)=3x+|x|$ و $g(x)=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}|x|$ باشد، ضابطه $(fog)(x)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}x$　　۲) $\frac{5}{2}x$　　۳) $2x$　　۴) $3x$

۶ـ دو خط به معادلات $۳x+ay+۲=۰$ و $۵x+۲y+b=۰$ منطبق برهم هستند. $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $۰/۱۶$ ۲) $۰/۲۴$ ۳) $۰/۳۶$ ۴) $۰/۴۵$

۷ـ تابع با ضابطه $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{|x|-\lfloor x\rfloor}}$ در چند نقطه روی R تعریف نشده است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸ـ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله $y=\ln\sqrt{۳x^۲-۲x}$، در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

۹ـ عرض نقطه ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x)=(۲x+۱)e^{-x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{e}}$ ۲) $\frac{۴}{e\sqrt{e}}$ ۳) $\frac{۳}{e}$ ۴) ۱

۱۰ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y=x^۲-۳x+۴$ و خط به معادله $y=-x+۴$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۱۱ـ در تابع دو متغیری با ضابطه $z=\frac{x^۲+y^۲}{x-y}$ مقدار $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه $x=۳$ و $y=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۵

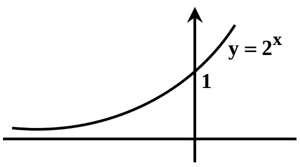
۱۲ـ به ازای کدام مقدار a دستگاه معادلات زیر سازگار است؟

$$\begin{cases}۲x+۳y-۴=۰\\ x+ay+۵=۰\\ ۳x+y+۱=۰\end{cases}$$

۱) ۳-
۲) ۲-
۳) ۲
۴) ۳

پاسخنامه رشته سنجش از دور و سیستم اطلاعات جغرافیایی ـ سراسری ۹۳

۱ـ گزینه «۱» نمودارهای $f(x)=۲^x$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}\log x^۲$ را رسم می‌کنیم. تابع f بر $\mathbb{R}$ تعریف شده است و $f'(x)=۲^x\ln ۲$ همواره مثبت است. بنابراین f همواره صعودی است.

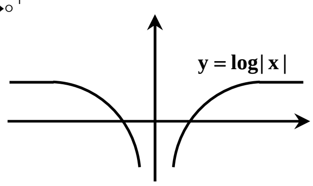


$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=۲^{-\infty}=۰\ ,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=۲^{\infty}=\infty$$

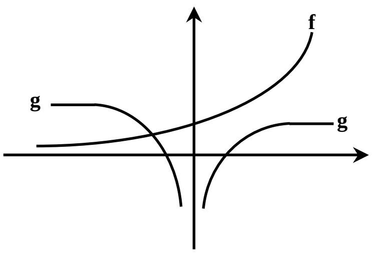
همچنین $f(۰)=۱$ است. با این اطلاعات نمودار f را رسم می‌کنیم.

در مورد $g(x)$ دقت کنید که $g(x)=\log(\sqrt{x^۲})=\log(|x|)$ تابعی زوج است و بنابراین نمودار آن نسبت به محور y متقارن است. برای $۰<x<\infty$ داریم $g(x)=\log x$. دامنه $g(x)$ شامل صفر نیست.

$$\lim_{x\to۰^+} g(x)=\log(۰^+)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$$



توجه کنید که سرعت رشد توابع لگاریتمی بسیار کمتر از توابع نمایی است.



اکنون با رسم نمودارهای f و g در یک دستگاه، واضح است که تنها یک نقطه برخورد دارند.

۲ـ گزینه «۲» در تابع $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ با شرط $x\geq 0$، x را برحسب y به دست می‌آوریم.

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x+e^{-x}=2y \Rightarrow e^{2x}+1=2ye^x \Rightarrow e^{2x}-2ye^x+1=0$$

پس $\Delta=4y^2-4$ و $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{y^2-1}$. توجه کنید که $e^x+\frac{1}{e^x}\geq 2$ است. بنابراین $y\geq 1$ بوده و $\Delta\geq 0$ است.

$$e^x=\frac{2y\pm 2\sqrt{y^2-1}}{2}=y\pm\sqrt{y^2-1}$$

با توجه به شرط $x\geq 0$ داریم $e^x\geq 1$؛ بنابراین جواب قابل قبول $e^x=y+\sqrt{y^2-1}$ است. به این ترتیب $x=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$. با عوض کردن نام y,x ضابطه معکوس f به دست می‌آید:

$$f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

در تابع f داشتیم $y\geq 1$ پس در f^{-1} داریم $x\geq 1$.

◆ ◆ ◆ ◆

۳ـ گزینه «۲» حد داده شده فرم 1^∞ دارد. از قاعده حدی $f(x)^{g(x)}\simeq e^{g(x)(f(x)-1)}$ استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to 0}(1+x\ln 2)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{3}{x}(x\ln 2)}=e^{3\ln 2}=2^3=8$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴ـ گزینه «۱» بنابر فرمول مجموع تصاعد حسابی داریم:

$$S_n=1+3+5+\dots+(2n-1)=\frac{(2n)(2n)}{4}=n^2$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{(2n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2n-1)^2}\xlongequal{\text{بزرگترین درجه}}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵ـ گزینه «۳»

روش اول: $f(x)=3x+|x|$ و $g(x)=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}|x|$ بنابراین خواهیم داشت:

$$(fog)(x)=f(g(x))=3g(x)+|g(x)|=\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}|x|+|\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}|x||$$

هرگاه $x>0$ باشد داریم $|x|=x$ پس:

$$(fog)(x)=\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}x+|\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}x|=\frac{6}{4}x+|\frac{2}{4}x|=\frac{6}{4}x+\frac{2}{4}x=\frac{8}{4}x=2x$$

بنابراین گزینه (۳) درست است. اما برای تکمیل جواب ناحیه‌ی $x<0$ را هم بررسی می‌کنیم. اگر $x<0$ باشد $|x|=-x$ است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(fog)(x)=\frac{9}{4}x+\frac{3}{4}x+|\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x|=\frac{12}{4}x+|x|=3x-x=2x$$

روش دوم: کافی است $(fog)(1)$ را حساب کنیم.

$$(fog)(1)=f(g(1))=f(\frac{3}{4}-\frac{1}{4})=f(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$

بنابراین گزینه (۳) درست است.

◆ ◆ ◆ ◆

۶ـ گزینه «۳»

روش اول: وقتی دو خط بر هم منطبق هستند، باید شیب و عرض از مبدأ یکسان داشته باشند.

$$3x+ay+2=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{a}x-\frac{2}{a}$$

$$5x+2y+b=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{2}x-\frac{b}{2}$$

بنابراین $\frac{۵}{۲}=\frac{۳}{a}$ و $\frac{b}{۲}=\frac{۲}{a}$. پس $۵a=۶$ و $ab=۴$. در نتیجه $a=\frac{۶}{۵}$ و $b=\frac{۲۰}{۶}$.

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{۶}{۵}}{\frac{۲۰}{۶}}=\frac{۳۶}{۱۰۰}=۰/۳۶$$

روش دوم: شرط منطبق بودن دو خط $۳x+ay+۲=۰$ و $۵x+۲y+b=۰$ آن است که $\frac{۳}{۵}=\frac{a}{۲}=\frac{۲}{b}$ باشد.

بنابراین $۵a=۶$ و $۳b=۱۰$.

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{۶}{۵}}{\frac{۱۰}{۳}}=\frac{۱۸}{۵۰}=\frac{۳۶}{۱۰۰}=۰/۳۶$$

۷ــ گزینه «۲» تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{|x|}-[x]}$ در نقاطی تعریف نشده است که عبارت زیر رادیکال منفی شود یا مخرج کسر صفر شود. از آنجا که $|x|$ نامنفی است، پس فقط باید ریشه‌های مخرج را تعیین کنیم.

$$\sqrt{|x|}=[x] \Rightarrow |x|=[x]^۲$$

$[x]$ همواره عددی صحیح است. پس $x=n\in\mathbb{Z}$ است.

$$|n|=[n]^۲ \Rightarrow |n|=n^۲ \Rightarrow n=n^۲ \Rightarrow n-n^۲=۰ \Rightarrow n(۱-n)=۰ \Rightarrow n=۰,۱$$

تابع f در دو عدد ۰ و ۱ تعریف نشده است.

۸ــ گزینه «۲» به ازای $x_۰=۱$ داریم: $y_۰=\ln(۱)=۰$ پس نقطه تماس، نقطه $(۱,۰)$ است. مشتق را در این نقطه حساب می‌کنیم.

$$y=\frac{۱}{۲}\ln(۳x^۲-۲x) \Rightarrow y'=\frac{۱}{۲}\frac{۶x-۲}{۳x^۲-۲x} \xrightarrow{x_۰=۱} y'=۲$$

شیب خط مماس برابر است با ۲ $m=۲$. معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-۰=۲(x-۱) \Rightarrow y=۲x-۲$$

عرض از مبدأ خط مماس برابر با -۲ است.

۹ــ گزینه «۱» نقاط اکسترمم (بحرانی) را شناسایی می‌کنیم.

$$f(x)=(۲x+۱)e^{-x} \qquad f'(x)=۲e^{-x}-(۲x+۱)e^{-x}=(۱-۲x)e^{-x}$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۱-۲x=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

تنها نقطه بحرانی، $x=\frac{۱}{۲}$ است. در این نقطه داریم:

$$y=۲e^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{e}}$$

۱۰ــ گزینه «۲» ابتدا نقاط برخورد دو منحنی را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow -x+۴=x^۲-۳x+۴ \Rightarrow ۲x-x^۲=x(۲-x)=۰ \Rightarrow x=۰,۲$$

پس در ناحیه مورد نظر $۰\le x\le ۲$ است.

$$\text{مساحت}=\int_۰^۲[(-x+۴)-(x^۲-۳x+۴)]dx=\int_۰^۲(۲x-x^۲)dx=(x^۲-\frac{x^۳}{۳})\Big|_۰^۲=\frac{۴}{۳}$$

۱۱ــ گزینه «۴» تابع $z=\frac{x^۲+y^۲}{x-y}$ همگن از مرتبه یک است؛ زیرا درجه جملات صورت یک درجه بیشتر از مخرج است. طبق قاعده‌ی اویلر داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z=\frac{x^۲+y^۲}{x-y}$$

در نقطه‌ی $(x,y)=(۳,۱)$ داریم: $z=۵$.

۱۲ــ گزینه «۲» برای سازگار بودن دستگاه باید دترمینان ماتریس زیر صفر باشد:

$$\det\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۴ \\ ۱ & a & ۵ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}=۲a+۴۵-۴+۱۲a-۳-۱۰=۱۴a+۲۸=۰ \Rightarrow a=-۲$$

رشته فلسفه ـ سراسری ۹۱

۱ـ اگر $|۲x-۵|+|x^۲+۲|=|(x^۲+۲)+(۲x-۵)|$ باشد، مقادیر x کدام است؟

۱) $x\le \frac{۵}{۲}$
۲) $x\ge \frac{۵}{۲}$
۳) $x\le -۳$
۴) $x\ge ۱$

۲ـ در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{e^{۲x}-۱}{e^x}$ مقدار $f(\log ۲)+f(\log\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\sqrt{e}$
۳) $\log_e^۴$
۴) $\log_۲^e$

۳ـ به ازای یک مقدار a دو منحنی به معادلات $y=x^۲-۳x+۲a$ و $y=-x^۲+x+a$ مماس بر هم هستند. معادله خط مماس کدام است؟

۱) $x+۲y=۴$
۲) $x-۲y=۰$
۳) $x-y=۱$
۴) $x+y=۳$

۴ـ برد تابع با ضابطه $f(x)=\ln\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$ کدام بازه است؟

۱) $(-\infty,۰]$
۲) $[۰,+\infty)$
۳) $(-۱,۱)$
۴) $(-\infty,-۱)$

۵ـ حد عبارت $(\frac{n^۲-۳n+۱}{n^۲+n-۲})^{n^۲}$ وقتی $n\to+\infty$ کدام است؟

۱) ۱
۲) e
۳) صفر
۴) $e^{-۲}$

۶ـ اگر $f(x)=\text{Arcsin}(\log_a^x)+\frac{\pi}{۲}$، آنگاه ضابطه $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $a^{\cos x}$
۲) $a^{-\cos x}$
۳) $a^{\sin x}$
۴) $a^{-\sin x}$

۷ـ دو خط راست موازی نیمساز ناحیه دوم بر منحنی به معادله $x^۲+y^۲=۳+xy$ مماس شده‌اند. فاصله این دو خط موازی کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۶}$

۸ـ نمودار تابع $f(x)=x+\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$ در نقاط بحرانی کدام وضع را دارد؟

۱) عطف
۲) می‌نیمم نسبی
۳) ماکزیمم نسبی
۴) ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی

۹ـ اگر $z+\frac{۱}{z}=\sqrt{۳}$ باشد، حاصل $z^{۱۸}$ کدام است؟

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲

۱۰ـ با حروف کلمه FALSAFEH چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۵۴۶
۲) ۵۸۴
۳) ۶۰۰
۴) ۶۰۶

۱۱ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y=\sin\sqrt{x}$ و محور xها از مبدأ مختصات تا خط $x=\frac{\pi^۲}{۹}$ کدام است؟

۱) $۲-\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}$
۲) $\frac{۲\pi}{۳}-\frac{۱}{۲}$
۳) $\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}$
۴) $۱-\frac{\pi}{۶}$

۱۲ـ سطح محدود به نمودار تابع $y=\frac{۱}{x\sqrt{x^۲-۱}}$ در بازه $[۲,t]$ را حول محور xها دوران می‌دهیم. اندازه حجم حاصل وقتی $t\to\infty$ چند برابر π است؟

۱) $۲-\text{Ln}\,۳$
۲) $\text{Ln}\,۳-۱$
۳) $\frac{۱}{۲}(\text{Ln}\,۳-۱)$
۴) $\frac{۱}{۲}(۲-\text{Ln}\,۳)$

۱۳ـ حاصل $\int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\frac{x\sin x\,dx}{\cos^۳ x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{\pi}{۳}-\frac{۱}{۲}$
۳) $\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}$
۴) $\frac{۲\pi}{۳}-\sqrt{۳}$

۱۴ـ دایره‌های متساوی در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a طوری محاط شده‌اند که تعداد این دایره‌ها در n سطر متوالی به ترتیب $۱,۲,۳,..........,n$ می‌باشد. اگر S_n مساحت کل این دایره‌ها باشد، $\lim_{n\to\infty} S_n$ چند برابر مساحت مثلث است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۲\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۶}}$

۱۵ـ حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲n-۱}{n!}$ کدام است؟

۱) e ۲) $۲e$ ۳) $e-۱$ ۴) $e+۱$

۱۶ـ طول نقاط عطف منحنی به معادله پارامتری $(x=\cos^۳ t\ ,\ y=\sin^۳ t)$ کدام است؟

۱) $-۱,۰,۱$ ۲) $-۱,۱$ ۳) $۰,۱$ ۴) فاقد نقطه عطف

۱۷ـ نقطه $A(۱,۲,-۳)$ محل تلاقی قطرهای یک مکعب است که یک وجه آن بر صفحه‌ای به معادله $x+۲y-۲z=۵$ قرار دارد. حجم این مکعب کدام است؟

۱) ۸   ۲) $\frac{۱۲۵}{۸}$ ۳) ۲۷   ۴) ۶۴

۱۸ـ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۳ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & -۴ & -۳ \end{bmatrix}$

۱۹ـ مقدار تقریبی عدد $\sqrt[۷]{(۶/۹۸)^۲+(۳/۰۷)^۴-۲}$ با کمک دیفرانسیل کدام است؟

۱) $۲/۰۰۱۲۵$ ۲) $۲/۰۰۱۷۵$ ۳) $۲/۰۰۲۲۵$ ۴) $۲/۰۰۲۷۵$

۲۰ـ اگر z تابع دو متغیر مستقل x و y باشد، از رابطه $z^۲-۲xz+e^{۲x-y}+\frac{y^۲}{۲x+y}=۵$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(۱,۲,-۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخنامه رشته فلسفه ــ سراسری ۹۱

۱ـ گزینه «۲» فرض کنیم $u=x^۲+۲$, $v=۲x-۵$. در حالت کلی طبق نامساوی مثلث $|u+v|\le|u|+|v|$ است. تساوی فقط زمانی رخ می‌دهد که u و v هم‌علامت باشند. از طرفی عبارت $u=x^۲+۲$ همواره مثبت است. بنابراین باید $v\ge۰$ باشد.

$$v=۲x-۵\ge۰ \Rightarrow x\ge\frac{۵}{۲}$$

۲ـ گزینه «۱» ابتدا نشان می‌دهیم که تابع f فرد است.

$$f(-x)=\frac{e^{-۲x}-۱}{e^{-x}}=\frac{e^{-۲x}-۱}{e^{-x}}.\frac{e^{۲x}}{e^{۲x}}=\frac{۱-e^{۲x}}{e^{x}}=-f(x)$$

بنابراین $f(x)$ و $f(-x)$ قرینه یکدیگر هستند و مجموع آن‌ها صفر است:

$$f(x)+f(-x)=۰$$

حال دقت کنید که $\log\frac{۱}{۲}=\log ۲^{-۱}=-\log ۲$؛ پس خواهیم داشت:

$$\text{جواب}=f(\log ۲)+f(-\log ۲)=۰$$

۳ـ گزینه «۴» وقتی منحنی‌های $f(x)=x^۲-۳x+۲a$ و $g(x)=-x^۲+x+a$ در نقطه‌ای به طول x بر هم مماس هستند، در آن نقطه داریم $f(x)=g(x)$ و $f'(x)=g'(x)$.

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^۲+x+a=x^۲-۳x+۲a \\ -۲x+۱=۲x-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x^۲-۴x+a=۰ \\ ۴x=۴ \end{cases}$$

از معادله دوم $x=۱$ است. با جایگذاری در معادله اول، $a=۲$ خواهد بود. حال معادله خط مماس بر منحنی $f(x)=x^۲-۳x+۴$ را در $x_۰=۱$ می‌نویسیم:

$$y_۰=f(۱)=۲$$
$$y'_۰=۲x_۰-۳=-۱$$

شیب خط مماس $m=-۱$ است. در نتیجه معادله این خط برابر است با:

$$y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-۲=-(x-۱) \Rightarrow y+x=۳$$

۴ـ گزینه «۱» ابتدا دامنه تابع $f(x)=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$ را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}>0 \Rightarrow 1-x^2>0 \Rightarrow -1<x<1$$

نقطه بحرانی f را در دامنه‌اش پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\ln(1-x^2)-\ln(1+x^2)$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{-4x}{1-x^4}=0 \Rightarrow x=0$$

حال مقدار f را در نقطه بحرانی و دو سرِ دامنه بررسی می‌کنیم.

$$f(0)=\ln(1)=0$$

$$f(1^-)=\ln(0^+)=-\infty$$

$$f(-1^+)=\ln(0^+)=-\infty$$

بنابراین برد f برابر با $(-\infty,0]$ است.

۵ـ گزینه «۳» حد مورد نظر فرم 1^∞ دارد. با تقسیم صورت بر مخرج آن را به شکل $(1+u)^v$ درآورده، سپس از قاعده $(1+u)^v \simeq e^{uv}$ استفاده می‌کنیم.

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+n-2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n^2+n-2)-4n+3}{n^2+n-2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4n+3}{n^2+n-2}\right)^{n^2}$$

با استفاده از قاعده‌ی بزرگ‌ترین درجه خواهیم داشت:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4n}{n^2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{4n}{n^2}n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{-4n}=e^{-\infty}=0$$

۶ـ گزینه «۲»

$$y=\operatorname{Arcsin}(\log_a^x)+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{Arcsin}(\log_a^x)=-\frac{\pi}{2}+y$$

$$\log_a^x=\sin(\frac{\pi}{2}-y) \Rightarrow x=a^{\sin(-\frac{\pi}{2}+y)}$$

حال با توجه به آن که $\sin(y-\frac{\pi}{2})=-\cos(y)$ خواهیم داشت:

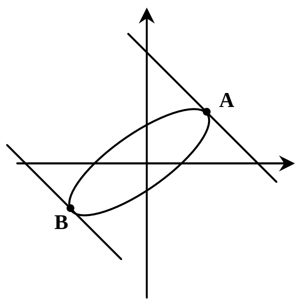
$$x=a^{-\cos y}$$

با تعویض نام x و y، تابع معکوس f به دست می‌آید:

$$f^{-1}(x)=a^{-\cos x}$$

۷ـ گزینه «۴» خط نیمساز ربع دوم خط $y=-x$ است. خطوط مماس بر منحنی با این خط موازی‌اند؛ پس شیب آن‌ها $m=-1$ است. از طرفی شیب خط مماس بر منحنی برابر است با مشتق در نقطه تماس. با مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$m=\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-y}{2y-x}$$



بنابراین در نقاط تماس داریم $-\frac{2x-y}{2y-x}=-1$ پس $2y-x=2x-y$ به عبارتی $y=x$.

با جایگذاری در معادله منحنی داریم:

$$x^2+y^2=3+xy \xrightarrow{y=x} 2x^2=3+x^2$$

$$\Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

نقاط تماس عبارتند از: $A(\sqrt{3},\sqrt{3})$ و $B(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

$$\text{فاصله خطوط مماس}=|AB|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

۸ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$ بنابراین $f(x)=x-\sin x$. طول نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم.

$$f'(x)=1-\cos x=0 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi$$

با توجه به علامت y'' نوع این نقاط را مشخص می‌کنیم.

$$f''(x)=\sin x \Rightarrow f''(2k\pi)=\sin(2k\pi)=0$$

همه نقاط بحرانی، نقطه عطف هستند؛ زیرا در همه آن‌ها مشتق دوم صفر است.

۹ـ گزینه «۲» $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3} \Rightarrow z^2+1=\sqrt{3}\,z \Rightarrow z^2-\sqrt{3}z+1=0 \xrightarrow{\Delta=-1} z=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$

در دستگاه اعداد مختلط، $z=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$ است. داریم $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $y=\pm\frac{1}{2}$. بنابراین $r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ و $\theta=\operatorname{Arg} z=\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{6}$.

پس نمایش قطبی z به صورت $z=e^{\pm\frac{\pi}{6}i}$ است. $z^{18}=e^{\pm i\frac{18\pi}{6}}=e^{\pm 3\pi i}=\cos(3\pi)\pm i\sin(3\pi)=-1$

۱۰ـ گزینه «۴» حروف داده شده را دسته‌بندی می‌کنیم: H,E,L,S,AA,FF. ۶ حرف متمایز داریم و F و A هر کدام تا دو بار قابل استفاده‌اند.

رمزهای ۴ حرفی را دسته‌بندی می‌کنیم تا شمارش هر دسته ساده‌تر باشد. دسته اول رمزهای بدون حرف تکراری: $\binom{6}{4}\,4!$

دسته دوم آن‌هایی که از F و F و دو حرف متمایز دیگر تشکیل شده‌اند. تعداد آن‌ها برابر است با: $\binom{5}{2}\frac{4!}{2!}$

دسته سوم آن‌هایی که از A و A و دو حرف متمایز دیگر تشکیل شده‌اند که تعدادشان مانند دسته‌ی قبل است: $\binom{5}{2}\frac{4!}{2!}$

دسته چهارم رمزهایی که از F و F و A و A ساخته می‌شوند. تعداد جایگشت‌های این ۴ حرف برابر است با: $\frac{4!}{2!\,2!}$

بنابراین با جمع کردن تعداد آن‌ها داریم: جواب $=\binom{6}{4}\,4!+\binom{5}{2}\frac{4!}{2!}+\binom{5}{2}\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!2!}=360+120+120+6=606$

۱۱ـ گزینه «۳» ناحیه داده شده بین نمودارهای $y=\sin\sqrt{x}$ و محور xها $(y=0)$ قرار دارد. کران‌های x نیز به صورت $0\le x\le\frac{\pi^2}{9}$ داده شده‌اند.

$$\text{مساحت}=\int_0^{\frac{\pi^2}{9}}\sin\sqrt{x}\,dx$$

با تغییر متغیر $t=\sqrt{x}$ داریم $x=t^2$. بنابراین $dx=2t\,dt$ و چون $0\le x\le\frac{\pi^2}{9}$ پس $0\le t\le\frac{\pi}{3}$.

$$\text{مساحت}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2t\sin(t)\,dt$$

حال با استفاده از جدول جزء به جزء انتگرال را حل می‌کنیم:

$2t$	$\sin(t)$
2	$-\cos(t)$
0	$-\sin(t)$

$$\text{مساحت}=(-2t\cos(t)+2\sin(t))\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$$

۱۲ـ گزینه «۳» حجم حاصل از دوران منحنی $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ در فاصله $[2,t]$ حول محور xها برابر است با:

$$V=\pi\int_2^t f^2(x)\,dx=\pi\int_2^t\frac{dx}{x^2(x^2-1)}$$

با استفاده از تجزیه کسرها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}=\frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2-Cx-D}{x^2(x-1)(x+1)}$$

با مقایسه صورت کسرها داریم: $D=-1$, $C=0$, $A-B+D=0$ و $A+B+C=0$. بنابراین: $(A,B,C,D)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,1)$.

$$V=\pi\int_2^t(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2})\,dx=\pi(\frac{1}{2}\ln(\frac{x-1}{x+1})+\frac{1}{x})\Big|_2^t=\pi(\frac{1}{2}\ln(\frac{t-1}{t+1})+\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\ln(3)-\frac{1}{2})$$

هرگاه $t\to\infty$ خواهیم داشت: $\lim_{t\to\infty}V=\pi(\frac{1}{2}\ln(1)+0+\frac{1}{2}\ln(3)-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}(\ln(3)-1)$

۱۳ـ گزینه «۱» ابتدا انتگرال نامعین را حل می‌کنیم. از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \cos^{-3}(x)\sin(x)\,dx = \frac{1}{2\cos^2(x)}$$

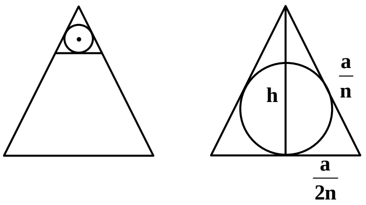
$$\int \frac{x\sin x\,dx}{\cos^3 x} = \frac{x}{2\cos^2(x)} - \int \frac{1}{2\cos^2(x)}dx = \frac{1}{2}x\sec^2(x) - \frac{1}{2}\int \sec^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x\sec^2(x) - \frac{1}{2}\tan(x) + c$$

با جایگذاری کران‌های بالا و پایین داریم:

$$\text{جواب} = [\frac{1}{2}x\sec^2(x) - \frac{1}{2}\tan(x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

◆◆◆◆

۱۴ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع، a است. بنابراین مثلث متساوی الاضلاع کوچکی که در رأس بالاتر ایجاد می‌شود به ضلع $\frac{a}{n}$ است. با کمک قضیه فیثاغورث ارتفاع این مثلث را حساب می‌کنیم. ارتفاع آن را با h نشان می‌دهیم.



$(\frac{a}{n})^2 = h^2 + (\frac{a}{2n})^2$ پس $h^2 = \frac{3}{4}\frac{a^2}{n^2}$ یعنی $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{n}$.

مرکز ثقل این مثلث در ارتفاع $\frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{a}{n}$ از قاعده قرار دارد. پس شعاع دایره کوچک $r = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{a}{n}$ است.

مساحت هر کدام از دایره‌ها $\pi r^2 = \frac{3\pi}{36}\frac{a^2}{n^2}$ است. تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

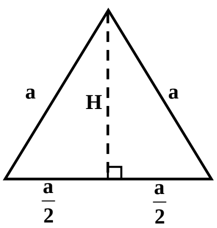
بنابراین مجموع مساحت دایره‌ها چنین است:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}\pi r^2 = \frac{n(n+1)}{2}\frac{3\pi}{36}\frac{a^2}{n^2} = \frac{\pi(n^2+n)a^2}{24n^2}$$

هرگاه $n \to \infty$ با توجه به قاعده‌ی بزرگ‌ترین درجه خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi a^2 n^2}{24n^2} = \frac{\pi a^2}{24}$$

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع بزرگ به ضلع a را نیز حساب می‌کنیم. بنابر قضیه فیثاغورث: $H^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2$ پس $H^2 = \frac{3}{4}a^2$ و $H = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.



$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\,(\text{قاعده})\,(\text{ارتفاع}) = \frac{Ha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

حال نسبت $\lim_{n\to\infty} S_n$ به مساحت مثلث بزرگ معلوم می‌شود:

$$\text{جواب} = \frac{\lim_{n\to\infty} S_n}{\text{مساحت مثلث}} = \frac{\frac{\pi a^2}{24}}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{4\pi}{24\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

◆◆◆◆

۱۵ـ گزینه «۴» بسط مک لورن e^x را یادآوری می‌کنیم:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

به ازای $x = 1$ داریم:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

حال سری داده شده را با استفاده از این تساوی به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}2\frac{n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots) - (1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots) = 2e-(e-1) = 2e-e+1 = e+1$$

◆◆◆◆

۱۶ـ گزینه «۲» بهتر است مسأله را از حالت پارامتری به دکارتی تبدیل کنیم. از معادلات پارامتری داده شده داریم: $\sin t = y^{\frac{1}{3}}\ ,\ \cos t = x^{\frac{1}{3}}$

می‌دانیم که $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ بنابراین $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$. پس می‌توان نوشت:

$$y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = (\frac{3}{2})(-\frac{2}{3})x^{-\frac{1}{3}}(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

$$y'' = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(1 - x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1 - x^{\frac{2}{3}}}}$$

می‌بینیم که در $x = 0$ و $x = \pm 1$ مقدار y'' تعریف نشده است. در همسایگی $x = 0$ چه از چپ و چه از راست $y'' > 0$ است. پس در این نقطه y'' تغییر علامت نمی‌دهد، یعنی این نقطه، نقطه عطف نیست. اما در $x = 1$ و $x = -1$ علامت y'' عوض می‌شود. پس این دو، طول نقاط عطف هستند.

۱۷ـ گزینه «۴» فاصله نقطه $A(1, 2, -3)$ را از صفحه $x + 2y - 2z = 5$ به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|1 + 4 + 6 - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{6}{3} = 2$$

بنابراین نصف طول هر ضلع از مکعب برابر ۲ است. هر ضلع این مکعب ۴ واحد طول دارد. بنابراین حجم آن $4^3 = 64$ است.

۱۸ـ گزینه «۳» ابتدا دترمینان A را به دست می‌آوریم. از روش ساروس استفاده می‌کنیم.

$$\det A = (2)(-2)(1) + 0 + 0 - (3)(-2)(1) - 0 - 0 = 2$$

اکنون ترانهاده A را می‌نویسیم و با حذف هر سطر و ستون و محاسبه دترمینان‌ها ماتریس کهاد را به دست می‌آوریم. با ضرب این ماتریس در $\frac{1}{\det A}$ ماتریس A^{-1} به دست می‌آید.

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای حل این تست یافتن سطر اول A^{-1} کافی است. اما ما A^{-1} را به طور کامل می‌نویسیم.

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

با ضرب $\frac{1}{2}$ در ماتریس، درایه‌های سطر اول عبارتند از $[-1 \quad 4 \quad 3]$.

۱۹ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. در تابع $f(x,y) = \sqrt[7]{x^2 + y^4 - 2}$ فرض می‌کنیم $(x,y) = (6/98\ ,\ 3/07)$ و $(x_0, y_0) = (7\ ,\ 3)$. در این صورت خواهیم داشت:

$$(dx, dy) = (x - x_0\ ,\ y - y_0) = (-0/02\ ,\ 0/07)$$

$$f(x_0, y_0) = \sqrt[7]{7^2 + 3^4 - 2} = \sqrt[7]{128} = 2$$

مشتق‌های جزئی f را در نقطه‌ی (x_0, y_0) به دست می‌آوریم و دیفرانسیل کل f را حساب می‌کنیم:

$$f_x = \frac{2x}{7\sqrt[7]{(x^2 + y^4 - 2)^6}} = \frac{14}{7\sqrt[7]{(128)^6}} = \frac{14}{(7)(64)} = \frac{1}{32}$$

$$f_y = \frac{4y^3}{7\sqrt[7]{(x^2 + y^4 - 2)^6}} = \frac{(4)(27)}{7\sqrt[7]{(128)^6}} = \frac{(4)(27)}{(7)(64)} = \frac{27}{(7)(16)}$$

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy = -\frac{0/02}{32} + \frac{(27)(0/07)}{(7)(16)} = -\frac{0/01}{16} + \frac{0/27}{16} = \frac{0/26}{16} = \frac{0/13}{8}$$

$$f(6/98, 3/07) \simeq f(7, 3) + df = 2 + \frac{0/13}{8} = 2/0162$$

۲۰ــ گزینه «۳» از طرفین معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم. توجه داریم که $z=z(x,y)$ تابعی از x و y است:

$$z^{2}-2xz+e^{2x-y}+\frac{y^{2}}{2x+y}=5 \Rightarrow 2z\frac{\partial z}{\partial x}-2z-2x\frac{\partial z}{\partial x}+2e^{2x-y}-\frac{2y^{2}}{(2x+y)^{2}}=0$$

در نقطه $(1,2,-1)$ خواهیم داشت:

$$-2\frac{\partial z}{\partial x}+2-2\frac{\partial z}{\partial x}+2-\frac{8}{16}=0 \Rightarrow -4\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{7}{2}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{7}{8}$$

رشته فلسفه ــ سراسری ۹۲

۱ــ دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\cos(\sin x)}+\operatorname{Arcsin}\frac{1+x^{2}}{2x}$ کدام است؟

۱) $[-1,1]$　۲) $\{-1,1\}$　۳) $(0,1]$　۴) $\{\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\}$

۲ــ اگر $x+\frac{3}{x}=2$ باشد، حاصل $x^{4}+\frac{81}{x^{4}}$ کدام است؟

۱) ۱۶　۲) ۱۴　۳) ۱۴-　۴) ۱۶-

۳ــ با استفاده از حروف کلمه‌ی «DELAVARAN» چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۸۷۶　۲) ۹۱۶　۳) ۹۴۵　۴) ۱۰۴۴

۴ــ در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}2x^{2}-x & ; x\le 2\\ 3x & ; 2<x<3\\ x^{3}-6x & ; x\ge 3\end{cases}$، مقدار $f'(\sqrt{1+\log_{2}512})$ کدام است؟

۱) ۳　۲) ۶　۳) ۷　۴) ۲۴

۵ــ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{n^{2}-n^{3}})$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$　۲) صفر　۳) $\frac{1}{3}$　۴) $+\infty$

۶ــ حدّ عبارت $\frac{\sin\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x^{2}+\sqrt{x^{3}}}}$ وقتی $x\to 0^{+}$ کدام است؟

۱) صفر　۲) $\frac{2}{3}$　۳) ۱　۴) ∞

۷ــ نمودار تابع $f(x)=x^{2}-2x$ با یک انتقال به نمودار تابع $g(x)=x^{2}+6x$ منطبق می‌شود. در این انتقال نقطه‌ای به طول ۵ واقع بر نمودار f به نقطه‌ای با کدام مختصات منطبق می‌شود؟

۱) $(2,16)$　۲) $(1,7)$　۳) $(0,0)$　۴) $(-1,-5)$

۸ــ دو منحنی به معادلات $y=ax^{2}+b\ln x$ و $y=\frac{1}{3}(5x^{2}+\frac{1}{x})$ در نقطه $x=1$ مماس برهم‌اند. مقدار b کدام است؟

۱) ۲-　۲) ۱-　۳) ۱　۴) ۲

۹ــ اگر $y=x+e^{x}$ باشد، مقدار $\frac{d^{2}x}{dy^{2}}$ در نقطه $(0,1)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{8}$　۲) $-\frac{1}{4}$　۳) $\frac{1}{8}$　۴) $\frac{1}{4}$

۱۰ــ نسبت تغییرات $\frac{x+2}{2x+1}$ به تغییر $x^{2}-\sqrt{x}$ در حوالی نقطه $x=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$　۲) $-\frac{2}{3}$　۳) $-\frac{1}{6}$　۴) $-\frac{2}{9}$

۱۱ــ می‌نیمم تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt[3]{4}$　۲) ۱-　۳) $-\sqrt[3]{2}$　۴) $-\sqrt[3]{3}$

۱۲ـ تابع با ضابطه $f(x)=x^6-3x^4+3x^2-4$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳ـ مقدار تقریبی عدد $\operatorname{Arctan}(\sqrt[3]{-0/97})+\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $-0/003$ ۲) $0/003$ ۳) $0/004$ ۴) $0/005$

۱۴ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y=a+\sqrt{x-a}:a>0$ و نیمساز ناحیه اوّل کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}a$ ۴) $\frac{1}{2}a$

۱۵ـ طول قوس منحنی به معادله $x=t+\sin t\ ,\ y=\cos t$ از نقطه نظیر $t=-\pi$ تا $t=\pi$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 3π ۳) ۴ ۴) ۸

۱۶ـ کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x)=\max\{|2x|,|x+1|\}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۷ـ اگر $f(x)=\int_0^x \sin t.\ln(1+t)dt$، آنگاه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۸ـ به ازای کدام مقدار a ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\a&1&4\\4&3&a\end{bmatrix}$ معکوس‌پذیر نیست؟

۱) $-4,3$ ۲) $-3,4$ ۳) $-2,3$ ۴) $-4,1$

۱۹ـ نزدیک‌ترین و دورترین نقاط رویه $x^2+y^2+z^2=10x$ از نقطه $A(8,4,12)$ کدام است؟

۱) ۶,۱۵ ۲) ۶,۱۶ ۳) ۷,۱۶ ۴) ۸,۱۸

۲۰ـ اگر $z=\frac{x^2}{y}-y^2e^{x+2y}$ و $x=2s-r^2$ و $y=(r-1)s$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}$ به ازای $s=1$ و $r=2$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

پاسخنامه رشته فلسفه ـ سراسری ۹۲

۱ـ گزینه «۲» ابتدا به این مطلب توجه کنید که برای هر مقدار از x، $-1\le\sin(x)\le1$ است. بنابراین $-\frac{\pi}{2}<\sin(x)<\frac{\pi}{2}$ و در نتیجه $\cos(\sin x)>0$ است. پس کافی است دامنه‌ی تابع $\operatorname{Arcsin}(\frac{1+x^2}{2x})$ را تعیین کنیم. در این تابع باید کسر $\frac{1+x^2}{2x}$ مقادیری بین ۱- تا ۱+ داشته باشد. با جدا کردن بخش‌های مثبت و منفی حوزه تعریف تابع را مشخص می‌کنیم.

اگر $x>0$ باشد، از $0<\frac{1+x^2}{2x}\le1$ داریم: $1+x^2\le2x$.

$$1+x^2-2x\le0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2\le0 \quad\Rightarrow\quad x-1=0$$

پس $x=1$ تنها عضو دامنه در ناحیه‌ی $x>0$ است. به همین ترتیب اگر $x<0$ باشد، داریم: $-1\le\frac{1+x^2}{2x}<0$ پس می‌توان نوشت:

$$-2x\ge1+x^2> \Rightarrow 0\ge1+x^2+2x \Rightarrow 0\ge(x+1)^2 \Rightarrow x+1=0$$

پس $x=-1$ تنها عضو دامنه در ناحیه‌ی $x<0$ است. بنابراین $D_f=\{-1,1\}$.

روش کوتاه: با امتحان کردن اعدادی مانند $x=1$ و $x=0$ و $x=-1$ در تابع f مشخص می‌شود که ±1 در دامنه f قرار دارند؛ اما صفر در دامنه نیست. به این ترتیب همه گزینه‌ها به جز گزینه (۲) رد می‌شوند.

۲ـ گزینه «۳» از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$x+\frac{3}{x}=2 \Rightarrow (x+\frac{3}{x})^2=4 \Rightarrow x^2+6+\frac{9}{x^2}=4 \Rightarrow x^2+\frac{9}{x^2}=-2$$

با استفاده دوباره از همان اتحاد خواهیم داشت:

$$(x^2+\frac{9}{x^2})^2=4 \Rightarrow x^4+18+\frac{81}{x^4}=4 \Rightarrow x^4+\frac{81}{x^4}=-14$$

۳ـ گزینه «۴» حروف داده شده را دسته‌بندی می‌کنیم:

D , E , L , V , R , N , AAA

هفت حرف متمایز داریم و از حرف A می‌توان سه بار استفاده کرد. رمزهای ۴ حرفی سه دسته‌اند. دسته اول آن‌هایی که حرف تکراری ندارند و یک جایگشت ۴ حرفی از بین ۷ حرف متمایز داده شده هستند. تعداد آن‌ها برابر است با:

$$\binom{7}{4}4!=\frac{7!}{3!}$$

دسته دوم رمزهایی هستند که از دو حرف A و A در کنار دو حرف متمایز دیگر که از بین ۶ حرف انتخاب می‌شوند، ساخته شده‌اند. تعداد آن‌ها برابر است با:

$$\binom{6}{2}\frac{4!}{2!}=\frac{6!}{2!\,2!}$$

و دسته سوم از ۳ حرف A و یک حرف دیگر ساخته می‌شوند. تعداد این دسته برابر است با:

$$\binom{6}{1}\frac{4!}{3!}=24$$

در نتیجه، جواب برابر است با مجموع این ۳ دسته:

$$24+\frac{7!}{3!}+\frac{6!}{2!\,2!}=24+840+180=1044$$

۴ـ گزینه «۴» با توجه به آن که $512=2^9$ است داریم:

$$\log_2(512)=9$$

بنابراین $x=\sqrt{1+\log_2(512)}=\sqrt{10}$. حال می‌دانیم که $x\geq 3$ است پس $f(x)=x^3-6x$ و $f'(x)=3x^2-6$ و با جایگذاری $x=\sqrt{10}$ داریم:

$$f'(\sqrt{10})=30-6=24$$

۵ـ گزینه «۳» وقتی $n\to\infty$ بنا بر قانون هم ارزی رادیکال‌ها داریم:

$$\sqrt[3]{An^3+Bn^2+Cn+D} \simeq \sqrt[3]{A}\,(n+\frac{B}{3A})$$

بنابراین: $\sqrt[3]{-n^3+n^2} \simeq -(n-\frac{1}{3})$ و با استفاده از این هم ارزی خواهیم داشت:

$$L=\lim_{n\to\infty} n-(n-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$$

۶ـ گزینه «۳» هرگاه $u\to 0$ خواهیم داشت $\sin(u)\simeq u$. بنابراین $\sin(\sqrt{x\sqrt{x}})\simeq\sqrt{x\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{4}}$. در مخرج کسر نیز با استفاده از قانون کمترین درجه داریم:

$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}=\sqrt{x^2+x^{\frac{3}{2}}}\simeq\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}=x^{\frac{3}{4}}$$

با توجه به موارد فوق حد را حساب می‌کنیم:

$$\text{جواب}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}=1$$

۷ـ گزینه «۲» فرض کنیم نمودار تابع f را a واحد در جهت افقی و b واحد در جهت عمودی انتقال داده باشیم. در این صورت نمودار $y=f(x-a)+b$ به دست می‌آید. طبق فرض $f(x-a)+b=g(x)$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$(x-a)^2-2(x-a)+b=x^2+6x$$
$$x^2-2(a+1)x+a^2+2a+b=x^2+6x$$

از تساوی طرفین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}-2(a+1)=6\\ a^2+2a+b=0\end{cases}$$

پس $a=-4$ و $b=-8$ است. هر نقطه از نمودار f، ۴ واحد به چپ و ۸ واحد به پایین منتقل شده است. در نقطه‌ای به طول $x=5$ واقع بر منحنی f داریم $y=25-10=15$. نقطه‌ی $(5,15)$ به نقطه‌ی $(1,7)$ منتقل شده است.

۸ـ گزینه «۲» وقتی منحنی‌های $f(x)=ax^2+b\ln x$ و $g(x)=\frac{1}{3}(5x^2+\frac{1}{x})$ در نقطه‌ی $x=1$ بر هم مماس باشند، خواهیم داشت: $f(1)=g(1)$ و $f'(1)=g'(1)$.

$$f'(x)=2ax+\frac{b}{x}\quad,\quad g'(x)=\frac{1}{3}(10x-\frac{1}{x^2})$$

$$\begin{cases}f(1)=g(1)\\ f'(1)=g'(1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ 2a+b=3\end{cases}$$

بنابراین: $(a,b)=(2,-1)$.

۹ـ گزینه «۱» همه عبارات را به یک سمت می‌بریم و با فرض آن که $x=x(y)$ تابعی برحسب y باشد، از طرفین نسبت به y مشتق می‌گیریم.

$$y-x-e^x=0\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y}1-x'-x'e^x=0\Rightarrow x'=\frac{1}{1+e^x}$$

حال یک بار دیگر نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$x''=\frac{-x'e^x}{(1+e^x)^2}$$

در نقطه‌ی $x=0$ داریم: $x'=\frac{1}{2}$, $x''=-\frac{1}{8}$. به عبارتی: $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{1}{8}$.

۱۰ـ گزینه «۴» نسبت تغییرات $f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ به تغییرات $g(x)=x^2-\sqrt{x}$ برابر است با:

$$\frac{df}{dg}=\frac{f'(x)dx}{g'(x)dx}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

با محاسبه‌ی مشتق‌ها داریم:

$$\frac{df}{dg}=\frac{\frac{-3}{(2x+1)^2}}{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

در $x=1$ خواهیم داشت:

$$\frac{df}{dg}=-\frac{2}{9}$$

۱۱ـ گزینه «۱» ابتدا نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{(x+1)^2}\Rightarrow x^2=(x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2=x^2+2x+1\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

تنها نقطه‌ی بحرانی $x=-\frac{1}{2}$ است. مقدار f را در این نقطه حساب می‌کنیم.

$$f(-\frac{1}{2})=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=-2^{\frac{2}{3}}=-\sqrt[3]{4}$$

توجه کنید که بنابر قانون بزرگ‌ترین درجه، حد f وقتی $x\to\pm\infty$ برابر با صفر است. بنابراین کمترین مقدار f همان $-\sqrt[3]{4}$ است.

۱۲ـ گزینه «۳» مشتق f را گرفته و ریشه‌های آن را تعیین می‌کنیم.

$$f'(x)=6x^5-12x^3+6x=6x(x^4-2x^2+1)=6x(x^2-1)^2=0$$

ریشه‌های f' عبارتند از $x=\pm1$ و $x=0$. پس f دارای ۳ نقطه بحرانی است.

۱۳ـ گزینه «۴» فرض کنیم $f(x)=\mathrm{Arc}\tan(\sqrt[3]{x})+\frac{\pi}{4}$ باشد. در نقطه‌ی $x=-1$ داریم:

$$f(-1)=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=0$$

مقدار دیفرانسیل f را در این نقطه و به ازای $dx=0/03$ به دست می‌آوریم:

$$dx=f'(x)\,dx=\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\frac{1}{6}(0/03)=\frac{0/01}{2}=0/005$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(-0/97)\simeq f(-1)+df=0/005$$

۱۴ــ گزینه «۲» نیمساز ناحیه‌ی اول خط $y=x$ است. نقاط برخورد آن را با منحنی $y=a+\sqrt{x-a}$ حساب می‌کنیم:

$$a+\sqrt{x-a}=x \Rightarrow \sqrt{x-a}=x-a$$

بنابراین یا $x-a=0$ است یا $x-a=1$ است. پس $x=a$ یا $x=a+1$. در ناحیه مورد نظر داریم:

$$a\le x\le a+1$$

و ناحیه داده شده بین خط $y=x$ و منحنی $y=a+\sqrt{x-a}$ قرار دارد.

$$\text{مساحت}=\int_a^{a+1}(a+\sqrt{x-a}-x)\,dx=\left(ax+\frac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_a^{a+1}=a(a+1)+\frac{2}{3}-\frac{(a+1)^2}{2}-a^2-0+\frac{a^2}{2}=\frac{1}{6}$$

۱۵ــ گزینه «۴» طول قوس منحنی‌های پارامتری از فرمول $L=\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$ به دست می‌آید.

$$L=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{(1+\cos t)^2+\sin^2 t}\;dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 t+\sin^2 t+2\cos t}\;dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2+2\cos t}\;dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2(1+\cos t)}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{4\cos^2(\frac{t}{2})}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}2\cos(\frac{t}{2})dt=4\sin(\frac{t}{2})\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=4+4=8$$

توجه: یادآوری می‌کنیم که:

$$1+\cos(t)=2\cos^2(\frac{t}{2})$$

$$1-\cos(t)=2\sin^2(\frac{t}{2})$$

۱۶ــ گزینه «۳» کمترین مقدار تابع $f(x)=\max\{|2x|,|x+1|\}$ در نقطه‌ای رخ می‌دهد که این دو تابع با هم برخورد کنند. پس نقاط برخورد $y=|2x|$ و $y=|x+1|$ را به دست می‌آوریم:

$$|2x|=|x+1| \Rightarrow 2x=\pm(x+1)$$

اگر $2x=x+1$ باشد، داریم $x=1$. اگر $2x=-x-1$ باشد، داریم $x=-\frac{1}{3}$. مقدار f را در این دو نقطه تعیین می‌کنیم.

$$f(1)=\max\{2,2\}=2$$

$$f(-\frac{1}{3})=\max\{\frac{2}{3},\frac{2}{3}\}=\frac{2}{3}$$

بنابراین کمترین مقدار f برابر با $\frac{2}{3}$ است.

۱۷ــ گزینه «۲» با توجه به آن که $f(0)=\int_0^0\sin t.\ln(1+t)dt=0$ است، پس حد داده شده فرم مبهم $\frac{0}{0}$ دارد. از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ln(1+x)}{3x^2}$$

حال از هم ارزی‌های $\sin x\simeq x$ و $\ln(1+x)\simeq x$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{جواب حد}=\lim_{x\to 0}\frac{x.x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

۱۸ــ گزینه «۱» برای آن که A معکوس‌پذیر نباشد، لازم است دترمینان A صفر باشد. از روش ساروس دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\det A=a+32-3a+4-2a^2-12=-2a^2-2a+24=-2(a^2+a-12)=0$$

$$\Rightarrow a^2+a-12=0 \Rightarrow (a+4)(a-3)=0$$

به ازای $a=3$ و $a=-4$ دترمینان صفر است.

۱۹ـ گزینه «۴» تابع فاصله از نقطه A برابر است با: $f=\sqrt{(x-8)^2+(y-4)^2+(z-12)^2}$

می‌توانیم فرض کنیم $F=f^2=(x-8)^2+(y-4)^2+(z-12)^2$ است و نقاط بحرانی F را با قید g تعیین کنیم.

$$\lambda=\frac{F_x}{g_x}=\frac{F_y}{g_y}=\frac{F_z}{g_z}=\frac{2(x-8)}{2x-10}=\frac{2(y-4)}{2y}=\frac{2(z-12)}{2z}\Rightarrow\frac{x-8}{x-5}=\frac{y-4}{y}=\frac{z-12}{z}$$

$$\Rightarrow y(x-8)=(x-5)(y-4)\ ,\ z(x-8)=(x-5)(z-12)\Rightarrow y=\frac{4x-20}{3},\ z=4x-20$$

با جایگذاری این روابط در شرط g داریم: $x^2+(\frac{4x-20}{3})^2+(4x-20)^2-10x=0$

با انجام محاسبات به معادله‌ی درجه دوی مقابل می‌رسیم: $169x^2-1690x+4000=0$

برای آن‌که محاسبه‌ی Δ ساده‌تر باشد، ضرایب را به صورت تجزیه شده می‌نویسیم: $13^2x^2-13^2\times10x+4\times10^3=0$

$$\Delta=13^4\times10^2-4^2\times10^3\times13^2=13^2\times10^2(13^2-4^2\times10)=13^2\times10^2\times9$$

بنابراین $\sqrt{\Delta}=13\times10\times3=390$ و ریشه‌های معادله‌ی درجه دو عبارتند از: $x=\frac{1690\pm390}{2(169)}=\frac{50}{13},\frac{80}{13}$. با توجه به آن که پیش از این دیدیم $y=\frac{4x-20}{3}$ و $z=4x-20$ می‌توان دو نقطه‌ی بحرانی زیر را برای F پیدا کرد: $C(\frac{80}{13},\frac{20}{13},\frac{60}{13})$ و $B(\frac{50}{13},-\frac{20}{13},-\frac{60}{13})$.

مقدار F را در دو نقطه‌ی C و B حساب می‌کنیم. $F(C)=64$ و $F(B)=324$.

بنابراین فاصله‌ی هر کدام از این نقاط از نقطه‌ی A برابر است با: $f(C)=\sqrt{F(C)}=\sqrt{64}=8$ $\qquad f(B)=\sqrt{F(B)}=\sqrt{324}=18$

۲۰ـ گزینه «۱» از قاعده‌ی زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=(\frac{2x}{y}-y^2e^{x+2y})(-2r)+(-\frac{x^2}{y^2}-2ye^{x+2y}-2y^2e^{x+2y})(s)$$

به ازای $(r,s)=(2,1)$ داریم: $x=-2\ ,\ y=1$. بنابراین می‌توان نوشت: $\frac{\partial z}{\partial r}=(-4-1)(-4)+(-4-2-2)(1)=12$

رشته فلسفه ـ سراسری ۹۳

۱ـ خلاصه شده $\tan^{-1}\sqrt{x(x+1)}+\sin^{-1}(x^2+x+1)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

۲ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})$ به ازای $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۳ـ اگر $f(x)=x+[-x]$, $g(x)=\log_2(1-3x)$ برد تابع gof کدام است؟

۱) $[0,2)$ ۲) $(0,2]$ ۳) $[0,1)$ ۴) $(0,1]$

۴ـ اگر $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{6-x}$ باشد، نمودار تابع f^{-1} محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۳ ۴) ۲

۵ـ حدّ عبارت $x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})$ وقتی $x\to\infty$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۶ـ نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x-[x] & ;\ [x]\ \text{زوج}\\ 1+[x]-x & ;\ [x]\ \text{فرد}\end{cases}$ چگونه است؟

۱) ناپیوسته با دوره تناوب ۱ ۲) ناپیوسته با دوره تناوب ۲ ۳) پیوسته با دوره تناوب ۱ ۴) پیوسته با دوره تناوب ۲

۷ـ اگر $f(x)=x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ و $g(x)=x(1+x^2)^{\frac{-1}{2}}$ باشند، آنگاه $f'(x).g'(f(x))$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ‏ ۲) x ‏ ۳) $\sqrt{1-x^2}$ ‏ ۴) $\sqrt{1+x^2}$

۸ـ اگر $x^2+25y^2=100$ باشد، حاصل $y''y^3$ برابر کدام است؟

۱) $-0/12$ ‏ ۲) $-0/16$ ‏ ۳) $-0/18$ ‏ ۴) $-0/24$

۹ـ تعداد نقاط تلاقی نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{\frac{x-3}{4-x}}$ و $y=2-|x-3|$ کدام است؟

۱) صفر ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۱

۱۰ـ اگر $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$ و $z\neq 0$ باشد، آنگاه z^{12} کدام است؟

۱) -2 ‏ ۲) -1 ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) ۲

۱۱ـ حدّ عبارت $(\tan\frac{\pi}{x})^{\frac{1}{x-4}}$ وقتی $x\to 4$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt[8]{e^{\pi}}}$ ‏ ۲) $\frac{1}{\sqrt[4]{e^{\pi}}}$ ‏ ۳) $\frac{\pi}{\sqrt[8]{e}}$ ‏ ۴) $\frac{\pi}{\sqrt[4]{e}}$

۱۲ـ در بازه‌ای که تقعر منحنی به معادله $y=x^4-8x^3+18x^2$ رو به پایین باشد، جهت تغییرات آن چگونه است؟

۱) ابتدا صعودی بعد نزولی ‏ ۲) ابتدا نزولی بعد صعودی ‏ ۳) صعودی ‏ ۴) نزولی

۱۳ـ مجموعه نقاط $S=\{(x,y)\in z^2 : |x+y|\leq 2\ ,\ |x-y|\leq 2\}$ دارای چند عضو است؟

۱) ۱۲ ‏ ۲) ۱۳ ‏ ۳) ۱۴ ‏ ۴) ۱۵

۱۴ـ اگر $A=\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^4}$ باشد، آنگاه حاصل $\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$ کدام است؟

۱) $A+1$ ‏ ۲) $1-A$ ‏ ۳) $\frac{1}{A}$ ‏ ۴) A

۱۵ـ مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}\ln x$ و محور xها و خط $x=e$ کدام است؟

۱) $\frac{e-2}{e}$ ‏ ۲) $\frac{e-1}{e}$ ‏ ۳) $\frac{2}{e}$ ‏ ۴) $\frac{1}{e}$

۱۶ـ طول قوسی از منحنی $y=\ln x$ بین دو نقطه نظیر $x=\sqrt{3}$ و $x=2\sqrt{2}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}$ ‏ ۲) $\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}$ ‏ ۳) $1+\ln\frac{2}{3}$ ‏ ۴) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

۱۷ـ در تابع دو متغیری $u=\ln(x^2+y^2)+\operatorname{Arc\,tan}\frac{y}{x}$ مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ در نقطه $(1,2)$ کدام است؟

۱) صفر ‏ ۲) $\frac{1}{5}$ ‏ ۳) $\frac{2}{25}$ ‏ ۴) $\frac{4}{25}$

۱۸ـ مقدار تقریبی عدد $\sqrt[3]{(1/95)^3+2(3/04)^2+(1/03)^2}$ با کمک دیفرانسیل کدام است؟

۱) $3+\frac{4}{2700}$ ‏ ۲) $3-\frac{4}{2700}$ ‏ ۳) $3-\frac{2}{900}$ ‏ ۴) $3+\frac{2}{900}$

۱۹ـ صفحه قائم بر منحنی (c) به معادله $\begin{cases} z=x^2-y^3 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases}$ در نقطه $(3,2,1)$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{9}{5}$ ‏ ۲) $\frac{11}{5}$ ‏ ۳) $\frac{8}{3}$ ‏ ۴) $\frac{11}{3}$

۲۰ـ اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ و عدد ثابت λ و ماتریس X در رابطه $AX=\lambda X$ صدق کنند، آنگاه مقادیر λ از کدام معادله تعیین می‌شود؟

۱) $\lambda^3-2\lambda^2+41=0$ ‏ ۲) $\lambda^3-21\lambda+51=0$ ‏ ۳) $\lambda^3-15\lambda+32=0$ ‏ ۴) $\lambda^3+2\lambda^2-19=0$

پاسخنامه رشته فلسفه ــ سراسری ۹۳

۱ــ گزینه «۲»

روش اول: موضوع اصلی در این سؤال دقت کردن به دامنه است. در عبارت $\sqrt{x(x+1)}$ باید $x(x+1)\geq 0$ باشد پس $x^2+x\geq 0$ است. از طرفی در تابع $\sin^{-1}(x^2+x+1)$ باید $-1\leq x^2+x+1\leq 1$ باشد. بنابراین لازم است $-2\leq x^2+x\leq 0$ باشد. با کنار هم گذاشتن این دو شرط می‌بینیم که در این عبارت $x^2+x=0$ خواهد بود. به این ترتیب داریم:

$$\tan^{-1}(\sqrt{x^2+x})+\sin^{-1}(x^2+x+1)=\tan^{-1}(0)+\sin^{-1}(1)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

روش دوم: جواب مستقل از x است. پس مسأله را در حالت خاص $x=0$ حل می‌کنیم. به ازای $x=0$ داریم:

$$\tan^{-1}(\sqrt{x^2+x})+\sin^{-1}(x^2+x+1)=\tan^{-1}(0)+\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

همچنین می‌توانید همین جواب را به ازای $x=-1$ به دست آورید.

۲ــ گزینه «۲» با ضرب صورت و مخرج در $(1-x)$ زنجیره‌ای از اتحادهای مزدوج به وجود می‌آید:

$$L=\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})}{(1-x)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})}{(1-x)}$$

به همین ترتیب در صورت کسر اتحادهای مزدوج را به کار می‌بندیم تا در نهایت به کسر زیر می‌رسیم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{(1-x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

حال از آنجا که $x=\frac{1}{2}$ است، $\lim_{n\to\infty}x^{2^n}=x^\infty=(\frac{1}{2})^\infty=0$. پس جواب حد برابر است با:

$$L=\frac{1-0}{1-\frac{1}{2}}=2$$

۳ــ گزینه «۱» می‌دانیم که $u\geq[u]>u-1$ است. بنابراین $-x\geq[-x]>-x-1$. با افزودن x به طرفین داریم $0\geq x+[-x]>-1$ به عبارتی $-1<f(x)\leq 0$ است. با محاسبه ترکیب دو تابع داریم: $gof(x)=g(f(x))=\log_2(1-3f(x))$

بنابراین $-1<f(x)\leq 0$ و از اینجا $0\leq -3f(x)<3$ و $1\leq 1-3f(x)<4$ و اگر از طرفین لگاریتم در مبنای ۲ بگیریم، خواهیم داشت:

$$\log_2(1)\leq\log_2(1-3f(x))<\log_2(4)$$

به عبارتی:

$$0\leq gof(x)<2$$

۴ــ گزینه «۳» می‌خواهیم محل برخورد نمودار f^{-1} با محور yها را پیدا کنیم. روی محور yها $x=0$ است. فرض کنیم نقطه مورد نظر نقطه $(0,b)$ باشد. اگر f^{-1} از نقطه $(0,b)$ بگذرد، نمودار f از نقطه $(b,0)$ می‌گذرد، یعنی $f(b)=0$ است.

$$f(b)=\sqrt{b}-\sqrt{6-b}=0\Rightarrow\sqrt{b}=\sqrt{6-b}\Rightarrow b=6-b\Rightarrow 2b=6\Rightarrow b=3$$

نمودار f از نقطه $(3,0)$ می‌گذرد و نمودار f^{-1} از نقطه $(0,3)$.

۵ــ گزینه «۳» وقتی $u\to 0$ می‌توانیم از هم ارزی $\ln(1+u)\simeq u-\frac{u^2}{2}$ استفاده کنیم. در این سؤال وقتی $x\to\infty$ داریم: $\frac{1}{x}\to 0$ بنابراین:

$$\ln(1+\frac{1}{x})\simeq\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}$$

$$L=\lim_{x\to\infty}x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2})=\lim_{x\to\infty}x-x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

توجه: بسط مک لورن $\ln(1+u)$ چنین است:

$$\ln(1+u)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\dots$$

۶ـ گزینه «۴» فرض کنیم $[x]$ زوج باشد، در این صورت $[x+۱]$ فرد است.

$$f(x)=x-[x]$$
$$f(x+۱)=۱+[x+۱]-(x+۱)=۱+[x]+۱-x-۱=۱+[x]-x$$

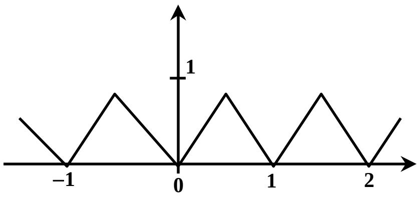
می‌بینیم که $f(x+۱)\neq f(x)$. بنابراین دوره تناوب f برابر با یک نیست. گزینه‌های (۱) و (۳) رد می‌شوند.

حال پیوستگی f را بررسی می‌کنیم. در اعداد غیرصحیح، f به وضوح پیوسته است. پیوستگی f در $x=۱$ را بررسی می‌کنیم. دقت کنید که اگر $x\to ۱^+ , [x]=۱$ عددی فرد است و اگر $x\to ۱^- , [x]=۰$ عددی زوج است.

$$f(۱)=۱+[۱]-۱=۱$$
$$f(۱^+)=۱+[۱^+]-۱=۱$$
$$f(۱^-)=۱-[۱^-]=۱$$

حال پیوستگی f در $x=۲$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(۲)=۲-[۲]=۰$$
$$f(۲^+)=۲-[۲^+]=۰$$
$$f(۲^-)=۱+[۲^-]-۲=۰$$



با توجه به آن که f در اعداد صحیح ۱ و ۲ پیوسته و دارای دوره تناوب ۲ نیز هست، نتیجه می‌گیریم f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

برای فهم بهتر موضوع نمودار f را نیز رسم کرده‌ایم:

۷ـ گزینه «۱» عبارت $f'(x).g'(f(x))$ برابر است با مشتق تابع $y=g(f(x))$. ابتدا این ترکیب را به دست می‌آوریم و بعد از آن مشتق می‌گیریم.

$$y=g(f(x))=f(x)(۱+f^۲(x))^{-\frac{۱}{۲}}=x(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}+(۱+x^۲(۱-x^۲)^{-۱})^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}\ \frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{x^۲}{۱-x^۲}}}=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}\ \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۱-x^۲}}}=x$$

بنابراین جواب برابر است با: $y'=۱$.

۸ـ گزینه «۲» داریم $x^۲+۲۵y^۲=۱۰۰$. با مشتق‌گیری ضمنی $y'=-\frac{۲x}{۵۰y}=-\frac{x}{۲۵y}$. یک بار دیگر از طرفین مشتق می‌گیریم.

$$y''=-\frac{۲۵y-۲۵y'x}{۲۵^۲y^۲}$$

با جایگذاری y' و ساده کردن عبارت داریم:

$$y''=-\frac{۲۵y+\frac{x}{y}x}{۲۵^۲y^۲}=-\frac{۲۵y^۲+x^۲}{۲۵^۲y^۳}$$

به این ترتیب: $y''y^۳=-\frac{۲۵y^۲+x^۲}{۲۵^۲}$ که با توجه به صورت سؤال برابر است با:

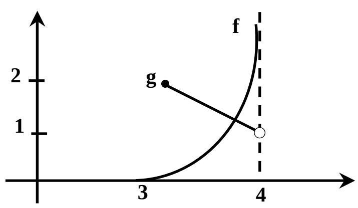
$$y''y^۳=-\frac{۱۰۰}{۲۵^۲}=-\frac{۴}{۲۵}=-۰/۱۶$$

۹ـ گزینه «۴» دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-۳}{۴-x}}$ بازه‌ی $[۳,۴)$ است. اگر $x>۴$ باشد یا $x<۳$ باشد، عبارت زیر رادیکال منفی است. $x=۴$ هم ریشه مخرج است (می‌توانید از جدول تعیین علامت هم استفاده کنید). در دامنه‌ی به دست آمده داریم $x-۳\geq ۰$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$g(x)=۲-|x-۳|=۲-(x-۳)=۵-x$$

$y=g(x)$ یک خط راست است با شیب منفی و کسر هموگرافیک $y=\frac{x-۳}{۴-x}$ نیز تابعی یکنوا است. بنابراین رسم نمودارهای f و g در بازه $[۳,۴)$ آسان است.

$$f(۳)=۰ \qquad f(۴^-)=+\infty$$
$$g(۳)=۲ \qquad g(۴^-)=۱$$



می‌بینم که فقط یک نقطه برخورد وجود دارد.

۱۰ـ گزینه «۳»

$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{3} \Rightarrow z^2+1=\sqrt{3}z \Rightarrow z^2-\sqrt{3}z+1=0 \xrightarrow{\Delta=-1} z=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$$

اعداد مختلط $z=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$ دارای اندازه‌ی $r=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$ و آرگومان $\theta=\tan^{-1}(\frac{y}{x})=\tan^{-1}(\frac{\pm1}{\sqrt{3}})=\pm\frac{\pi}{6}$ هستند. نمایش قطبی z به صورت $z=e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$z^{12}=e^{\pm i\frac{12\pi}{6}}=e^{\pm 2i\pi}=\cos(\pm2\pi)+i\sin(\pm2\pi)=1$$

۱۱ـ گزینه «۱» می‌دانیم که $\tan(\frac{\pi}{4})=1$، بنابراین حد داده شده فرم 1^∞ دارد. پس از قاعده حدی $f(x)^{g(x)}\simeq e^{g(x)(f(x)-1)}$ استفاده می‌کنیم.

$$L=\lim_{x\to4} e^{\frac{1}{x-4}(\tan(\frac{\pi}{x})-1)}$$

ابتدا حد نما را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to4}\frac{\tan(\frac{\pi}{x})-1}{x-4} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to4}\frac{-\frac{\pi}{x^2}(1+\tan^2(\frac{\pi}{x}))}{1}=-\frac{\pi}{16}(1+1)=-\frac{\pi}{8}$$

بنابراین جواب حد برابر است با:

$$L=e^{-\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{\sqrt[8]{e^{\pi}}}$$

۱۲ـ گزینه «۳» هرگاه $y''<0$ باشد، جهت تقعر رو به پایین است.

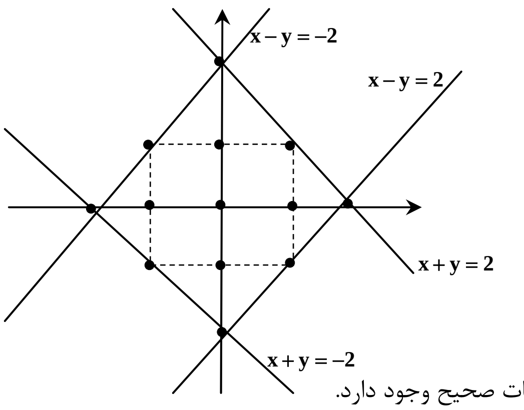
$$y=x^4-8x^3+18x^2$$
$$y'=4x^3-24x^2+36x=4x(x^2-6x+9)$$
$$y''=12x^2-48x+36=12(x^2-4x+3)$$

با تجزیه به عوامل اول $y''=12(x-1)(x-3)$. ریشه‌های آن عبارتند از ۱ و ۳ . در فاصله‌ی بین دو ریشه علامت y'' منفی است. پس در بازه‌ی $(1,3)$ تقعر منحنی رو به پایین است. برای بررسی تغییرات y در این بازه باید به علامت y' دقت کنیم. با دقت به ضابطه‌ی y' داریم $y'=4x(x-3)^2$. در بازه‌ی $(1,3)$ همواره $x>0$ است؛ بنابراین $y'>0$ است. یعنی در این فاصله منحنی y صعودی است.

۱۳ـ گزینه «۲» توجه کنید که $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ یعنی x و y اعداد صحیح باشند.

$$|x+y|\le 2 \quad\Rightarrow\quad -2\le x+y\le 2$$
$$|x-y|\le 2 \quad\Rightarrow\quad -2\le x-y\le 2$$

خطوط $x+y=2$ و $x+y=-2$ و $x-y=2$ و $x-y=-2$ را رسم می‌کنیم.
نقاطی مانند (x,y) را می‌خواهیم که مختصات صحیح داشته باشند و در ناحیه‌ی بین این چهار خط قرار بگیرند.



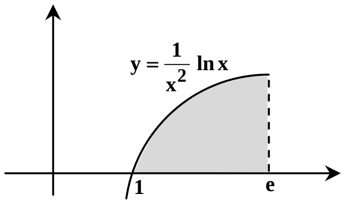
در ناحیه لوزی شکلی که بین این خطوط قرار می‌گیرد و روی مرزهای آن؛ در مجموع ۱۳ نقطه با مختصات صحیح وجود دارد.

۱۴ـ گزینه «۴» طبق فرض: $A=\int_0^1\frac{x^2\,dx}{1+x^4}$ است. حال می‌خواهیم $I=\int_1^\infty\frac{dx}{1+x^4}$ را برحسب A پیدا کنیم. احتیاج به تغییر متغیری داریم که کران‌های ۱ و ∞ را به کران‌های ۱ و ۰ تبدیل کند. این کار توسط متغیر $t=\frac{1}{x}$ انجام می‌شود. وقتی $x=1$ باشد، $t=1$ است و وقتی $x\to\infty$ داریم: $t\to0$. همچنین $t=\frac{1}{x}$ پس $x=\frac{1}{t}$ و $dx=-\frac{dt}{t^2}$. با انجام این تغییرات داریم:

$$I=\int_1^\infty\frac{dx}{1+x^4}=\int_1^0\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{1+\frac{1}{t^4}}=-\int_1^0\frac{t^2\,dt}{t^4+1}=\int_0^1\frac{t^2\,dt}{t^4+1}=A$$

یادآوری: هرگاه کران‌های انتگرال جابه‌جا شوند، حاصل قرینه می‌شود: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

۱۵ــ گزینه «۱» محور xها، خطِ $y=0$ است. بنابراین ناحیه مورد نظر بین دو تابع $y=0$ و $y=\frac{1}{x^2}\ln x$ قرار دارد. خط $x=e$ یکی از کران‌های x را مشخص می‌کند. کران دیگر x از محل برخورد دو منحنی به دست می‌آید.



$$\frac{1}{x^2}\ln x = 0 \quad\Rightarrow\quad \ln x = 0 \quad\Rightarrow\quad x=1$$

بنابراین: $1 \le x \le e$.

$$\text{مساحت} = \int_1^e \frac{1}{x^2}\ln x\,dx$$

با فرض $t=\ln x$ داریم $x=e^t$ و $dx=e^t\,dt$. همچنین در $x=e$ داریم $t=1$ و به ازای $x=1$ داریم $t=0$.

$$\text{مساحت} = \int_0^1 \frac{1}{e^{2t}}\, t\, e^t\,dt = \int_0^1 t\,e^{-t}\,dt$$

از روش جزء به جزء با کمک جدول، انتگرال را حل می‌کنیم.

t	e^{-t}
1	$-e^{-t}$
0	e^{-t}

$$\text{مساحت} = (-te^{-t}-e^{-t})\Big|_0^1 = -\frac{2}{e}+1 = \frac{e-2}{e}$$

۱۶ــ گزینه «۴» طول قوس منحنی $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ برابر است با $L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$. در این سؤال $\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{2}$ و $y=\ln x$ است.

$$L=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\,dx$$

با تغییر متغیر $u=\sqrt{1+x^2}$ ادامه می‌دهیم. به ازای $x=2\sqrt{2}$ داریم $u=\sqrt{9}=3$ و به ازای $x=\sqrt{3}$ داریم $u=2$. همچنین از رابطه $u=\sqrt{1+x^2}$ داریم $x^2=u^2-1$، پس $x=\sqrt{u^2-1}$ و از اینجا $dx=\frac{2u}{2\sqrt{u^2-1}}du$.

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$L=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\,dx = \int_2^3 \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,\frac{2u}{2\sqrt{u^2-1}}\,du = \int_2^3 \frac{u^2}{u^2-1}\,du = \int_2^3 \frac{(u^2-1)+1}{u^2-1}\,du = \int_2^3 \left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du$$

با تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{u-1} - \frac{\frac{1}{2}}{u+1}$$

$$L=\int_2^3 \left(1+\frac{1}{2}\,\frac{1}{u-1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{u+1}\right)du = \left(u+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right)\Bigg|_2^3 = 1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

۱۷ــ گزینه «۱» مشتقات جزئی مرتبه اول را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{2x-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{2y+x}{x^2+y^2}$$

با مشتق‌گیری دوباره خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2y(2y+x)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2x(2x-y)}{(x^2+y^2)^2}$$

با جمع کردن این دو عبارت می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{4(x^2+y^2)-4x^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

در هر نقطه (x,y) جواب صفر است.

۱۸ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم $f(x,y,z)=\sqrt[3]{x^3+2y^2+z^2}$ باشد. در نقطه‌ی داده شده داریم $(x,y,z)=(1/95,3/04,1/03)$. نقطه‌ی $(x_0,y_0,z_0)=(2,3,1)$ را به عنوان نقطه شروع انتخاب می‌کنیم.

$$(dx,dy,dz)=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=(-0/05,0/04,0/03)$$

دیفرانسیل کل f را حساب می‌کنیم:

$$df=f_x\,dx+f_y\,dy+f_z\,dz$$

ابتدا مشتق‌های جزئی f را در نقطه شروع به دست می‌آوریم:

$$f_y=\frac{4y}{3\sqrt[3]{(x^3+2y^2+z^2)^2}}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9} \qquad f_x=\frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3+2y^2+z^2)^2}}=\frac{12}{3\sqrt[3]{27^2}}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$

$$f_z=\frac{2z}{3\sqrt[3]{(x^3+2y^2+z^2)^2}}=\frac{2}{27}$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$f\ \text{دیفرانسیل کل}=df=\frac{4}{9}(-0/05)+\frac{4}{9}(0/04)+\frac{2}{27}(0/03)=-\frac{0/20}{9}+\frac{0/16}{9}+\frac{0/02}{9}=-\frac{0/02}{9}$$

$$f(x,y,z)\simeq f(x_0,y_0,z_0)+df=\sqrt[3]{27}-\frac{0/02}{9}=3-\frac{2}{900}$$

۱۹ـ گزینه «۴» منحنی c، فصل مشترک رویه‌های $f=z-x^2+y^3=0$ و $g=2x-3y+z=1$ است. بردارهای گرادیان f و g را در نقطه $(3,2,1)$ به دست می‌آوریم:

$$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)=(-2x,3y^2,1)=(-6,12,1)$$
$$\nabla g=(g_x,g_y,g_z)=(2,-3,1)$$

بردار نرمال صفحه قائم بر منحنی c برابر است با $\nabla f\times\nabla g$.

$$\nabla f\times\nabla g=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -6 & 12 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=15i+8j-6k=(15,8,-6)$$

معادله‌ی صفحه قائم بر منحنی c در نقطه $(3,2,1)$ چنین است:

$$15(x-3)+8(y-2)-6(z-1)=0$$
$$15x+8y-6z=55$$

نقطه‌ی برخورد با محور xها را می‌خواهیم، پس $y=z=0$ قرار می‌دهیم.

$$15x=55 \Rightarrow x=\frac{55}{15}=\frac{11}{3}$$

۲۰ـ گزینه «۲» از رابطه‌ی $AX=\lambda X$ مشخص می‌شود که λ یک مقدار ویژه برای A است. بنابراین λ ریشه چند جمله‌ای مشخصه‌ی A است.

$$f(\lambda)=(-1)^3\det(A-\lambda I)=-\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 & 1\\ -1 & -\lambda & 4\\ 0 & 5 & -2-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=-[(2-\lambda)(\lambda)(2+\lambda)-5+3(-2-\lambda)-20(2-\lambda)]=\lambda^3-21\lambda+51=0$$

رشته پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۱

۱ـ در بسط عبارت $(x^2 - \frac{1}{x} + 1)^6$ مجموع جملات فاقد x کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۶۸ ۳) ۷۲ ۴) ۷۶

۲ـ حد عبارت $(1+\sin x\cos x)^{\frac{2}{x}}$ وقتی $x \to 0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) e^2 ۴) $2e$

۳ـ تابع با ضابطه $y = ||x|-1| + 1 - |x|$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1)$

۴ـ حاصل $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۵ـ در نقاطی به طول ۱ واقع بر منحنی $y^3 + x^2 - xy = 1$ سه خط مماس بر این منحنی قابل رسم است. مجموع شیب‌های این سه خط مماس کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۶ـ اگر $\begin{cases} x = (t+2)e^t \\ y = (2t-1)e^{2t} \end{cases}$، آن‌گاه $\frac{d^2y}{dx^2}$ به ازای $t = 1$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{16}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{7}{16}$

۷ـ مجموع دنباله اعداد $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \dots$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۸ـ مساحت ناحیه محدود به دو خط مجانب مایل منحنی به معادله $y = |x + \frac{1}{x}|$ و خط گذرا بر دو نقطه می‌نیمم این منحنی کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸

۹ـ حاصل $\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) ۲

۱۰ـ مقدار تقریبی $\sqrt{(2/01)^3 + (2/96)^2 - 1}$ با کمک دیفرانسیل کدام است؟

۱) ۳/۹۲۵ ۲) ۳/۹۶۵ ۳) ۳/۹۸۵ ۴) ۴/۰۰۸

۱۱ـ اگر z تابعی از دو متغیر مستقل x و y با رابطه $e^{z-2x} + zy - x^2 = 6$ داده شود، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1,3,2)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

۱۲ـ اگر $z = x^2 + y^2 - xy$ و $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ باشند، حاصل $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ به ازای $r = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳ـ فاصله مبدأ مختصات از صفحه به معادله $3x - y + \sqrt{6}z = 4$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۴ـ به ازای کدام مقدار a ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & a & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ معکوس‌پذیر نیست؟

۱) $-\frac{۹}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۱۵ـ حد تابع $f(x,y)=\frac{xy}{x^۲+۲y^۲}$ در نقطه $(۰,۰)$ و در امتداد خط $۲y-۳x=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۱۷}$ ۲) $\frac{۹}{۱۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۱}$ ۴) حد ندارد.

پاسخنامه رشته پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۱

۱ـ گزینه «۴» همه جملات این بسط به فرم $\frac{۶!}{n!m!k!}(x^۲)^n(-\frac{۱}{x})^m(۱)^k$ هستند که در آن $n+m+k=۶$ است و $n,m,k\ge ۰$. برای آن که جمله به وجود آمده فاقد x باشد، باید $m=۲n$ باشد. همه این جملات را نوشته و با هم جمع می‌کنیم.

$$\frac{۶!}{۰!۰!۶!}(x^۲)^۰(-\frac{۱}{x})^۰(۱)^۶+\frac{۶!}{۱!۲!۳!}(x^۲)(-\frac{۱}{x})^۲(۱)^۳+\frac{۶!}{۲!۴!۰!}(x^۲)^۲(-\frac{۱}{x})^۴=۱+۶۰+۱۵=۷۶$$

۲ـ گزینه «۳» می‌دانیم که $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$ و وقتی $x\to ۰$ داریم $\sin(۲x)\simeq ۲x$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$L=\lim_{x\to ۰}(۱+\frac{۲x}{۲})^{\frac{۲}{x}}$$

حد دارای فرم ۱^∞ است. از قاعده کمکی $f(x)^{g(x)}\simeq e^{g(x)(f(x)-۱)}$ استفاده می‌کنیم.

$$L=\lim_{x\to ۰}e^{\frac{۲}{x}(\frac{۲x}{۲۰})}=e^۲$$

۳ـ گزینه «۱» در $x=۰$ و $x=\pm ۱$ مقدار عبارات داخل قدر مطلق صفر می‌شود. در این نقاط ضابطه f عوض می‌شود؛ بنابراین با جدا کردن نواحی داریم:

$$f(x)=\begin{cases} -x-۱+۱+x=۰ & x<-۱ \\ x+۱+۱+x=۲x+۲ & -۱<x<۰ \\ -x+۱+۱-x=-۲x+۲ & ۰<x<۱ \\ x-۱+۱-x=۰ & ۱<x \end{cases}$$

در بازه‌های $(-\infty,-۱)$ و $(۱,\infty)$ تابع f مقدار ثابتی دارد. در بازه $(۰,۱)$ خط $y=-۲x+۲$ نزولی است و نقطه در بازه $(-۱,۰)$ تابع f با خط $y=۲x+۲$ برابر است که صعودی است.

۴ـ گزینه «۴» با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt[n]{۱+u}\simeq ۱+\frac{u}{n}$ صورت کسر را ساده‌تر می‌کنیم.

$$\sqrt{۱-\sqrt{۱-x}}\simeq\sqrt{۱-(۱-\frac{x}{۲})}=\sqrt{\frac{x}{۲}}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{جواب}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\frac{x}{۲}}}{\sqrt{x}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۵ـ گزینه «۲» شیب خط مماس بر منحنی در هر نقطه از آن برابر است با $\frac{dy}{dx}$. با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$m=\frac{dy}{dx}=-\frac{۲x-y}{۳y^۲-x}$$

در نقاطی با طول یک روی این منحنی خواهیم داشت:

$$y^۳+x^۲-xy=۱\xrightarrow{x=۱}y^۳-y=۰$$
$$y(y^۲-۱)=۰\Rightarrow y=۰,\pm ۱$$

۳ نقطه با مختصات $A(۱,۰)$ و $B(۱,-۱)$ و $C(۱,۱)$ داریم. شیب خط مماس در این نقطه به ترتیب $m_۱=۲$ و $m_۲=-\frac{۳}{۲}$ و $m_۳=-\frac{۱}{۲}$ است.

۶ـ گزینه «۴» برای منحنی پارامتری $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ مقدار $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ به این صورت قابل محاسبه است:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}$$

با محاسبه و جایگذاری مشتق‌ها داریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(8t+4)e^{2t}(t+3)e^t - (t+4)e^t(4t)e^{2t}}{(t+3)^3 e^{3t}}$$

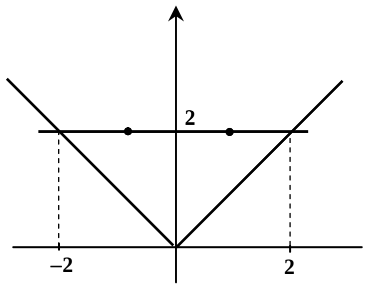
به ازای $t = 1$ داریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{7e^3}{16e^3} = \frac{7}{16}$$

۷ـ گزینه «۱» مجموع داده شده برابر است با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ که یک سری تلسکوپی است. با جداسازی کسرها داریم:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

۸ـ گزینه «۳» هر گاه $x \to \pm\infty$ داریم $\dfrac{1}{x} \to 0$ و به این ترتیب $y = |x + \dfrac{1}{x}| \simeq |x|$. پس خطوط $y = x$ و $y = -x$ مجانب‌های مایل این منحنی هستند.



برای یافتن نقاط می‌نیمم این منحنی توجه کنید که برای $x > 0$ داریم $y = x + \dfrac{1}{x}$ و $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.
معادله $y' = 0$ دارای جواب $x = 1$ است. در ناحیه $x < 0$ نیز به همین شکل $x = -1$ نقطه بحرانی است.

تابع y تابعی زوج است که در دو نقطه $(1,2)$ و $(-1,2)$ دارای می‌نیمم است. خط گذرنده از این نقاط، خط $y = 2$ است.

ناحیه محدود شده به خطوط $y = x$ و $y = -x$ و $y = 2$ مثلثی است با قاعده‌ی ۴ متر و ارتفاع ۲ متر. مساحت آن برابر است با $\dfrac{4 \times 2}{2} = 4$.

۹ـ گزینه «۲»

$$I = \int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{1 - (x-1)^2}\,dx$$

با تغییر متغیر $x - 1 = \sin\theta$ داریم $dx = \cos\theta d\theta$. به ازای $x = 0$ داریم $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ و به ازای $x = 2$ داریم $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\theta}\cos\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta = (\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

۱۰ـ گزینه «۳» برای تابع $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^2 - 1}$ فرض کنیم $(x,y) = (2,3)$ و $(dx,dy) = (0.01, -0.04)$. دیفرانسیل f در این نقطه را حساب می‌کنیم:

$$df = f_x dx + f_y dy = \frac{3x^2 dx}{2\sqrt{x^3 + y^2 - 1}} + \frac{2y dy}{2\sqrt{x^3 + y^2 - 1}} = \frac{12(0.01)}{8} - \frac{6(0.04)}{8} = -\frac{0.12}{8} = -\frac{0.03}{2} = -0.015$$

مقدار تقریبی f به این صورت به دست می‌آید:

$$f(2.01, 2.96) \simeq f(2,3) + df = 4 - 0.015 = 3.985$$

۱۱ـ گزینه «۴» با فرض آن‌که $z = z(x,y)$ تابعی از x و y باشد، از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$(\frac{\partial z}{\partial x} - 2)e^{z-2x} + y\frac{\partial z}{\partial x} - 2x = 0$$

در نقطه $(1,3,2)$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 2 + 3\frac{\partial z}{\partial x} - 2 = 0$$

بنابراین: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$

۱۲ــ گزینه «۱» با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$(2x-y)(-r\sin\theta)+(2y-x)(r\cos\theta)$$

به ازای $r=2$ و $\theta=\frac{\pi}{6}$ داریم $x=\sqrt{3}$ و $y=1$، بنابراین:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=(2\sqrt{3}-1)(-1)+(2-\sqrt{3})(\sqrt{3})=-2$$

۱۳ــ گزینه «۲» فاصله‌ی نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه‌ی $ax+by+cz+d=0$ برابر است با:

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\text{جواب}=\frac{|0-4|}{\sqrt{9+1+6}}=\frac{4}{4}=1$$

۱۴ــ گزینه «۱» برای معکوس‌پذیر نبودن A باید $\det A=0$ باشد.

$$\det A=0+0-6-0-4a-3=-4a-9=0$$

بنابراین به ازای $a=-\frac{9}{4}$، دترمینان صفر است.

۱۵ــ گزینه «۳» در امتداد خط $2y+3x=0$ داریم $y=\frac{3}{2}x$. بنابراین روی این مسیر مقدار حد برابر است با:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\frac{3}{2}x)}{x^2+2(\frac{3}{2}x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2}{\frac{11}{2}x^2}=\frac{3}{11}$$

رشته پژوهش علوم اجتماعی ــ سراسری ۹۲

۱ــ با استفاده از حروف کلمه SHAHAMAT چند رمز عبور سه حرفی می‌توان نوشت؟

۱) ۷۲ ۲) ۷۵ ۳) ۸۲ ۴) ۸۵

۲ــ در دنباله‌ای با جمله عمومی $U_n=\frac{n^n}{n!}$، حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) e ۳) ۱ ۴) صفر

۳ــ در بسط عبارت $(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{\sqrt{x}})^{12}$ ضریب جمله شامل $\frac{1}{x}$ کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۳۳ ۳) $\frac{33}{2}$ ۴) $\frac{55}{6}$

۴ــ دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\log\frac{2x+5}{2-x}}$ کدام بازه است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(-\frac{5}{2},2)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(2,+\infty)$

۵ــ اگر $f(x)=\frac{4}{x-2}\ ;\ x>2$ باشد آنگاه ضابطه $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{4-2x}{x};x<0$ ۲) $\frac{4+2x}{x};x>0$ ۳) $\frac{x}{4+2x};x>-2$ ۴) $\frac{x}{4-2x};x<2$

۶ــ حاصل $\lim_{x\to 0}|x|\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ کدام است؟ (نماد $\lfloor\ \rfloor$ به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) حد ندارد

۷ـ دو منحنی به معادلات $y = 2x^2 + ax + b$ و $y = \frac{1}{x} - \ln x$ در نقطه $x = 1$ مماس برهم‌اند. b کدام است؟

۱) -6 ۲) -4 ۳) ۳ ۴) ۵

۸ـ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشند، آنگاه $f'(x).g'(f(x))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) x ۳) $\sqrt{1-x^2}$ ۴) $\sqrt{1+x^2}$

۹ـ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax+b}{x^2 - 4x + 5}$ در نقطه $(-1, 2)$ ماکسیمم نسبی است. b کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۰ـ فاصله نقطه مینیمم نسبی منحنی به معادله $y = x^2 e^{-x}$ از خط مجانب آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) e

۱۱ـ اگر $\alpha > 0$ باشد، مقدار $\int_0^1 (x^\alpha + x^{\frac{1}{\alpha}})dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\alpha+1}{\alpha}$ ۳) $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ ۴) $\frac{\alpha^2+1}{\alpha}$

۱۲ـ کمترین مقدار تابع $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 3y^2 - 12y + 2x + 22}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۱۳ـ اگر z تابعی از دو متغیر مستقل با رابطه $z^2 + \ln(z-y) - xy^2 - x^4 = 1$ بیان شود، مقدار $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه $(-2, 2, 3)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{3}{7}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{6}{7}$

۱۴ـ صفحه مماس بر رویه $z = x^2 y + \frac{x}{y}$ در نقطه $(2, 1, 6)$ محور z ها را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

۱) -6 ۲) -4 ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های سطر اوّل معکوس ماتریس $(A^2 - A)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

پاسخنامه رشته پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۲

۱ـ گزینه «۴» حروف داده شده را دسته‌بندی می‌کنیم: AAA, HH, S, T, M

۵ حرف متمایز داریم. ۳ حرف تکراری A و دو حرف تکراری H قابل استفاده‌اند. رمزهای ۳ حرفی را دسته‌بندی می‌کنیم.

دسته اول: رمزهایی که از ۳ حرف متمایز تشکیل شده‌اند: $\binom{5}{3}3!$

دسته دوم: رمزهایی که از H و H و یک حرف دیگر تشکیل شده‌اند: $\binom{4}{1}\frac{3!}{2!}$

دسته سوم: رمزهایی که از A و A و یک حرف دیگر تشکیل شده‌اند: $\binom{4}{1}\frac{3!}{2!}$

دسته چهارم: رمزی که به صورت AAA باشد که فقط یک حالت دارد.

$$\text{جواب} = \binom{5}{3}3! + \binom{4}{1}\frac{3!}{2!} + \binom{4}{1}\frac{3!}{2!} + 1 = 60 + 12 + 12 + 1 = 85$$

۲ـ گزینه «۲» برای دنباله‌های مثبت، حد نسبت $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$ با حد ریشه $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n}$ برابر است. یادآوری می‌کنیم که $\sqrt[n]{n!} \simeq \frac{n}{e}$ است.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{n}{e}} = e$$

۳ـ گزینه «۳» همه جملات این بسط به فرم $\sum_{k=۰}^{۱۲}\binom{۱۲}{k}(\frac{x^۲}{۲})^k(\frac{۱}{\sqrt{x}})^{۱۲-k}$ هستند، $\binom{۱۲}{k}(\frac{x^۲}{۲})^k(\frac{۱}{\sqrt{x}})^{۱۲-k}=\binom{۱۲}{k}\frac{۱}{۲^k}x^{\frac{۵}{۲}k-۶}$. برای آن که $\frac{۱}{x}$ به وجود آید، لازم است $\frac{۵}{۲}k-۶=-۱$ باشد. یعنی $k=۲$.

$$\text{جمله شامل } \frac{۱}{x}=\binom{۱۲}{۲}\frac{۱}{۲^۲}x^{-۱}=\frac{۱۲!}{۲!۱۰!}\frac{۱}{۴}\frac{۱}{x}=\frac{۳۳}{۲}\frac{۱}{x}$$

۴ـ گزینه «۳»

$$f(x)=\sqrt{\log\frac{۲x+۵}{۲-x}}\ \Rightarrow\ \log(\frac{۲x+۵}{۲-x})\ge ۰\ ,\ \frac{۲x+۵}{۲-x}>۰$$

$$\Rightarrow\frac{۲x+۵}{۲-x}\ge ۱\ \Rightarrow\ \frac{۲x+۵}{۲-x}-۱\ge ۰\ \Rightarrow\ \frac{۳x+۳}{۲-x}\ge ۰$$

جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم.

		-۱		۲	
$۳x+۳$	$-$	۰	$+$		$+$
$۲-x$	$+$		$+$	۰	$-$
$\frac{۳x+۳}{۲-x}$	$-$		$+$		$-$

در بازه $(-۱,۲)$ تابع $f(x)$ تعریف شده است.

۵ـ گزینه «۲» از ضابطه‌ی f، x را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۴}{x-۲}\ \Rightarrow\ yx-۲y=۴\ \Rightarrow\ xy=۴+۲y\ \Rightarrow\ x=\frac{۴+۲y}{y}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{۴+۲x}{x}$ است. از همین جا درستی گزینه (۲) معلوم می‌شود.

۶ـ گزینه «۴» هرگاه $x\to ۰$ داریم $\frac{۱}{x}\to\pm\infty$ بنابراین $[\frac{۱}{x}]\simeq\frac{۱}{x}$. در مورد $|x|$ نیز اگر $x>۰$ باشد، $|x|=x$ است و اگر $x<۰$ باشد، $|x|=-x$ است.

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{x}=۱$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x}{x}=-۱$$

بنابراین حد وجود ندارد.

۷ـ گزینه «۴» فرض کنیم $f(x)=۲x^۲+ax+b$ و $g(x)=\frac{۱}{x}-\ln x$ باشد. این دو منحنی در $x=۱$ مماس هستند. پس $f(۱)=g(۱)$ و $f'(۱)=g'(۱)$. با مشتق‌گیری $f'(x)=۴x+a$ و $g'(x)=-\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x}$ است.

$$\begin{cases}f(۱)=g(۱)\\ f'(۱)=g'(۱)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲+a+b=۱\\ ۴+a=-۲\end{cases}$$

پس $a=-۶$ و $b=۵$ است.

۸ـ گزینه «۱» عبارت $f'(x)g'(f(x))$ برابر است با مشتقِ $gof(x)$. ابتدا ضابطه‌ی $gof(x)$ و سپس مشتق آن را به دست می‌آوریم.

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱+\frac{x^۲}{۱-x^۲}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{\frac{۱}{۱-x^۲}}}=x$$

$$\text{جواب}=(gof(x))'=۱$$

۹ـ گزینه «۲»

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^{2}-4x+5} \Rightarrow f'(x)=\frac{a(x^{2}-4x+5)-(2x-4)(ax+b)}{(x^{2}-4x+5)^{2}}$$

تابع f در $(-1,2)$ دارای ماکسیمم نسبی است. از این جا دو نتیجه می‌گیریم: ۱) $f(-1)=2$، ۲) $f'(-1)=0$.

$$\begin{cases} f(-1)=2 \\ f'(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b-a}{10}=2 \\ \frac{10a+6(-a+b)}{10^{2}}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-a=20 \\ 6b+4a=0 \end{cases} \Rightarrow b=8 \ , \ a=-12$$

۱۰ـ گزینه «۲» خط $y=0$ مجانب افقی این تابع است. زیرا:

$$\lim_{x\to\infty} x^{2}e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}}{e^{x}} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^{x}} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^{x}}=0$$

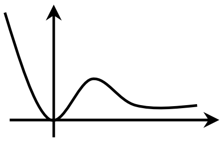
حال نقطه مینیمم نسبی را پیدا می‌کنیم.

$$y'=2xe^{-x}-x^{2}e^{-x}=xe^{-x}(2-x)=0$$

طول نقاط بحرانی عبارتند از: $x=0$ و $x=2$. با استفاده از محک y'' نوع این نقاط را تعیین می‌کنیم.

$$y''=e^{-x}(2-x)-xe^{-x}(2-x)-xe^{-x}=e^{-x}(2-4x+x^{2})$$

در $x=0$، $y''>0$ است و در $x=2$، $y''<0$ است. پس $x=0$ طول نقطه‌ی مینیمم است. پس مختصات نقطه مینیمم $(0,0)$ و خط مجانب، خط $y=0$ است. فاصله آن‌ها از هم صفر است. برای درک بهتر موضوع نمودار f را رسم کرده‌ایم.



۱۱ـ گزینه «۱»

$$\int_{0}^{1}(x^{\alpha}+x^{\frac{1}{\alpha}})\,dx=\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{x^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+1}=\frac{1}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\alpha+1}=\frac{\alpha+1}{\alpha+1}=1$$

۱۲ـ گزینه «۲» ابتدا عبارت زیر رادیکال را در نظر گرفته، اکسترمم‌های نسبی آن را پیدا می‌کنیم.

$$g(x,y)=x^{2}+3y^{2}-12y+2x+22$$

$$\begin{cases} g_x=2x+2=0 \\ g_y=6y-12=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(-1,2)$$

تنها نقطه اکسترمم $(-1,2)$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\min g=g(-1,2)=9 \Rightarrow \min f=f(-1,2)=\sqrt{9}=3$$

۱۳ـ گزینه «۱» از طرفین معادله نسبت به y مشتق می‌گیریم. دقت کنید که z تابعی از x و y است یعنی $z=z(x,y)$.

$$z^{2}+\ln(z-y)-xy^{2}-x^{4}=1 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} 2z\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\frac{\partial z}{\partial y}-1}{z-y}-2xy=0$$

بنابراین در نقطه‌ی $(-2,2,3)$ خواهیم داشت:

$$6\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}-1+8=0 \Rightarrow 7\frac{\partial z}{\partial y}=-7 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-1$$

۱۴ـ گزینه «۱» معادله رویه‌ی داده شده $f(x,y,z)=x^{2}y+\frac{x}{y}-z=0$ است. بردار نرمال صفحه مماس، برابر است با بردار گرادیان.

$$\overrightarrow{\nabla f}=(f_x,f_y,f_z)=(2xy+\frac{1}{y}\,,\,x^{2}-\frac{x}{y^{2}}\,,\,-1)$$

در نقطه $(x_0,y_0,z_0)=(2,1,6)$ داریم: $\overrightarrow{\nabla f}=(5,2,-1)$. پس معادله صفحه مماس بر رویه در این نقطه چنین است:

$$5(x-2)+2(y-1)-(z-6)=0$$
$$5x+2y-z=6$$

از آن‌جایی که محل برخورد صفحه با محور z را می‌خواهیم، پس $x=y=0$ قرار دهیم:

$$0-z=6 \Rightarrow z=-6$$

۱۵ـ گزینه «۳»

$$A=\begin{bmatrix}2&-2\\1&3\end{bmatrix}\qquad A^2=AA=\begin{bmatrix}2&-2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-10\\5&7\end{bmatrix}$$

$$B=A^2-A=\begin{bmatrix}2&-10\\5&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-8\\4&4\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{\det B}\begin{bmatrix}4&8\\-4&0\end{bmatrix}=\frac{1}{32}\begin{bmatrix}4&8\\-4&0\end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های سطر اول}=\frac{4}{32}+\frac{8}{32}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$$

رشته پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۳

۱ـ با حروف کلمه FERASSAT چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۵۷۶ ۲) ۵۹۲ ۳) ۶۰۶ ۴) ۶۱۲

۲ـ در تابع $f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x^2-4x+3}$ اگر $\lim_{x\to a} f(x)<0$ باشد، مجموعه مقادیر a در کدام بازه است؟

۱) $(\frac{1}{2},1)$ ۲) $(\frac{1}{2},3)$ ۳) $(1,3)$ ۴) $(-\frac{1}{2},3)$

۳ـ خط $y=2x$ مجانب‌های منحنی به معادله $y=\frac{2x}{x+2}+\frac{9x-2}{x^2-x-6}$ را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. فاصله این دو نقطه، کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۴ـ تعداد نقاط انفصال تابع $y=x^2-\lfloor x^2\rfloor$ در بازه $(-2,2)$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۵ـ جهت تغییرات و برد تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ چگونه است؟

۱) صعودی با برد $(-1,1)$ ۲) نزولی با برد $(-1,1)$ ۳) غیریکنوا با برد $(-\infty,+\infty)$ ۴) دارای می‌نیمم با برد $(-1,0)$

۶ـ اگر $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{2}{3}$ باشد، مشتق $f(\sqrt[3]{2x+2})$ در نقطه $x=3$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۷ـ در تابع $f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$ مقدار $f(\frac{\pi}{4})-3f'(\frac{\pi}{4})$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸ـ شیب خط مماس بر منحنی پارامتری $\begin{cases}x=t^2+3t-8\\y=2t^2-2t-5\end{cases}$ در نقطه $M(2,-1)$ واقع بر آن کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) $\frac{22}{7}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۹ـ تقعر منحنی به معادله $y=(6-x)\sqrt[3]{x}$ در کدام بازه رو به بالا است؟

۱) $(0,3)$ ۲) $(0,-1)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(-3,0)$

۱۰ـ حاصل $\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2+t}$ کدام است؟

۱) $\ln 2$ ۲) $\ln\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۱ـ کمترین مقدار تابع دو متغیری $z = x^۲ + xy + y^۲$ با شرط $x + ۲y = ۶$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۲ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = x^۲ + ۳x - ۲$ و خط $y = x + ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۴}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۳۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱۹}{۳}$

۱۳ـ اگر z تابعی از دو متغیر مستقل x و y با رابطه $z^۲ - ze^{۲x-y} + \frac{y-۴}{x} = ۰$ بیان شود، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(۱,۲,-۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۴ـ معادله صفحه قائم بر منحنی C فصل مشترک دو رویه به معادلات $z = x^۲ + y^۲$ و $۳x + ۲y + z = ۳$ در نقطه $(۱,-۱,۲)$ کدام است؟

۱) $۲y + z = ۰$ ۲) $y - ۲z + ۵ = ۰$ ۳) $x - ۲z + ۳ = ۰$ ۴) $۲x + y - ۱ = ۰$

۱۵ـ به ازای کدام مقدار a دستگاه معادلات زیر جواب‌های غیرصفر دارد؟

$$\begin{cases} ۲x + y - az = ۰ \\ ax - y + ۲z = ۰ \\ x - ۲y + ۵z = ۰ \end{cases}$$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۳-

پاسخنامه رشته پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۳

۱ـ گزینه «۳» رمزهای ۴ حرفی در دسته‌های زیر قرار دارند:

دسته اول: رمزهای تشکیل شده از ۴ حرف متمایز. تعداد آن‌ها: $\binom{۶}{۴}۴! = \frac{۶!}{۲!}$

دسته دوم: رمزهایی که از S و S و دو حرف متمایز دیگر تشکیل شده‌اند. $\binom{۵}{۲}\frac{۴!}{۲!}$

دسته سوم: رمزهایی که از A و A و دو حرف متمایز دیگر تشکیل شده‌اند. $\binom{۵}{۲}\frac{۴!}{۲!}$

دسته چهارم: رمزهایی که از A و A و S و S تشکیل شده‌اند. $\frac{۴!}{۲!\,۲!}$

$$\text{جواب} = \frac{۶!}{۲!} + \binom{۵}{۲}\frac{۴!}{۲!} + \binom{۵}{۲}\frac{۴!}{۲!} + \frac{۴!}{۲!۲!} = ۳۶۰ + ۱۲۰ + ۱۲۰ + ۶ = ۶۰۶$$

۲ـ گزینه «۲»

$$f(x) = \frac{۲x^۲ - ۳x + ۱}{x^۲ - ۴x + ۳} = \frac{(x-۱)(۲x-۱)}{(x-۱)(x-۳)}$$

برای هر $x \neq ۱$ داریم $f(x) = \frac{۲x-۱}{x-۳}$. ریشه صورت $x = \frac{۱}{۲}$ و ریشه مخرج، $x = ۳$ است. با تعیین علامت این کسر متوجه می‌شویم که در بازه‌ی $(\frac{۱}{۲},۳)$ علامت $f(x)$ منفی است. اگر $\frac{۱}{۲} < a < ۳$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{۲a-۱}{a-۳} < ۰$$

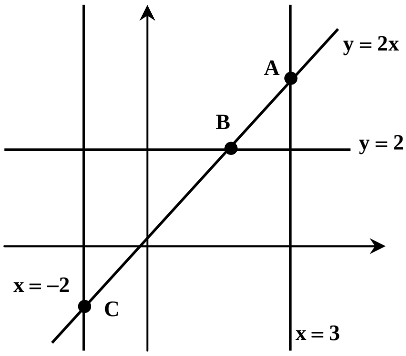
بنابراین جواب مورد نظر بازه‌ی $(\frac{۱}{۲},۳)$ است.

۳ـ گزینه «۴» تابع $f(x) = \frac{۲x}{x+۲} + \frac{۹x-۲}{x^۲-x-۶}$ دارای یک مجانب افقی است که معادله آن چنین است:

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = ۲$$

دقت کنید که وقتی $x \to \pm\infty$، با استفاده از قانون بزرگ‌ترین درجه، مقدار حد به دست می‌آید. خط $y = ۲$ مجانب افقی f است. از طرفی خط $x = -۲$ مجانب قائم f است؛ زیرا ریشه‌ی مخرج است و $\lim_{x\to -۲} f(x) = \pm\infty$. سایر ریشه‌های مخرج از حل معادله $x^۲ - x - ۶ = ۰$ به دست می‌آیند. $\Delta = ۲۵$ و $x = \frac{۱\pm۵}{۲} = ۳,-۲$ است. پس خط $x = ۳$ نیز مجانب قائم f است.

خط $y=۲x$ با مجانب‌های قائم و افقی f که عبارتند از $x=-۲$ و $x=۳$ و $y=۲$ در سه نقطه برخورد می‌کند که عبارتند از: $A(۳,۶)$ و $B(۱,۲)$ و $C(-۲,-۴)$.



$$\text{فاصله } A \text{ و } C=\sqrt{۵^۲+۱۰^۲}=\sqrt{۱۲۵}=۵\sqrt{۵}$$

$$\text{فاصله } A \text{ و } B=\sqrt{۲^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

$$\text{فاصله } B \text{ و } C=\sqrt{۳^۲+۶^۲}=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$$

بنابراین فقط گزینه (۴) می‌تواند درست باشد.

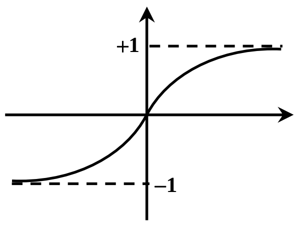
۴ـ گزینه «۲» تابع $[x^۲]$ در نقاطی که مقدار $x^۲$ عددی صحیح باشد به استثنای $x=۰$، ناپیوسته است. بنابراین ناپیوستگی‌های تابع $y=x^۲-[x^۲]$ در هر نقطه به فرم $x=\pm\sqrt{n}$ است که n عددی طبیعی باشد. ناپیوستگی‌هایی که در بازه $(-۲,۲)$ قرار دارند، عبارتند از:

$$\{\pm\sqrt{۱}\,,\,\pm\sqrt{۲},\pm\sqrt{۳}\}$$

که تعداد آن‌ها شش تا است.

۵ـ گزینه «۱» دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x}{۱+|x|}$ شامل همه اعداد حقیقی است؛ زیرا مخرج صفر نخواهد شد. برای هر $x\in\mathbb{R}$، $\dfrac{|x|}{۱+|x|}<۱$ بنابراین $-۱<\dfrac{x}{۱+|x|}<۱$ است. از طرفی $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{۱+x}=۱$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{۱-x}=-۱$. پس برد f برابر است با $R_f=(-۱,۱)$.

برای تعیین نحوه‌ی تغییرات f به مشتق آن دقت کنید:



$$x>۰ \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{x}{۱+x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{۱}{(۱+x)^۲}>۰$$

$$x<۰ \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{x}{۱-x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{۱}{(۱-x)^۲}>۰$$

پس f همواره صعودی است. برای درک بهتر نمودار f را رسم کرده‌ایم.

۶ـ گزینه «۳» با استفاده از تعریف مشتق داریم: $f'(۲)=\lim\limits_{x\to۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$. بنابراین $f'(۲)=\dfrac{۲}{۳}$ است.

$$y=f(\sqrt[۳]{۲x+۲}) \;\Rightarrow\; y'=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{(۲x+۲)^۲}}f'(\sqrt[۳]{۲x+۲}) \xrightarrow{x=۳} y'=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۸^۲}}f'(\sqrt[۳]{۸})=\frac{۱}{۶}f'(۲)=\frac{۱}{۶}(\frac{۲}{۳})=\frac{۱}{۹}$$

۷ـ گزینه «۳» با استفاده از قاعده‌ی مشتق کسرها $f'(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\cos^۲ x}{۱+\sin^۲ x}$$

$$f'(x)=\frac{-۲\cos x\sin x(۱+\sin^۲ x)-۲\sin x\cos x\cos^۲ x}{(۱+\sin^۲ x)^۲}$$

حال با توجه به این که $\cos\dfrac{\pi}{۴}=\sin\dfrac{\pi}{۴}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ است، داریم:

$$f(\frac{\pi}{۴})=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳} \quad,\quad f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{-\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}}{\frac{۹}{۴}}=-\frac{۸}{۹}$$

$$\text{جواب}=f(\frac{\pi}{۴})-۳f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۳}+\frac{۸}{۳}=۳$$

۸ـ گزینه «۲»

$$\begin{cases} x = t^۲ + ۳t - ۸ \\ y = ۲t^۲ - ۲t - ۵ \end{cases} \qquad \text{شیب خط مماس} = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{۴t-۲}{۲t+۳}$$

در نقطه $M(۲,-۱)$ داریم $(x,y)=(۲,-۱)$. بنابراین:

$$\begin{cases} t^۲ + ۳t - ۸ = ۲ \\ ۲t^۲ - ۲t - ۵ = -۱ \end{cases}$$

معادله‌ی دوم را از دو برابر معادله‌ی اول کم می‌کنیم.

$$-۸t + ۱۱ = -۵ \Rightarrow t = ۲$$

$$\text{شیب خط مماس} = \frac{۴t-۲}{۲t+۳} = \frac{۶}{۷}$$

۹ـ گزینه «۴» تقعر منحنی به علامت y'' بستگی دارد. هرگاه $y''>۰$ باشد، تقعر منحنی به سمت بالاست.

$$y = (۶-x)\sqrt[۳]{x} = ۶x^{\frac{۱}{۳}} - x^{\frac{۴}{۳}}$$

$$y' = ۲x^{-\frac{۲}{۳}} - \frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}$$

$$y'' = -\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۵}{۳}} - \frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}} = -\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}(x^{-۱} + \frac{۱}{۳}) = -\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{۳})$$

$$y'' > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x} + \frac{۱}{۳} < ۰ \Rightarrow -۳ < x < ۰$$

جواب برابر است با بازه‌ی $(-۳,۰)$.

۱۰ـ گزینه «۱» ابتدا با تجزیه کسرها، انتگرالده را به مجموع دو کسر ساده‌تر تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{t^۲+t} = \frac{۱}{t(t+۱)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+۱}$$

$$A = \frac{۱}{(t+۱)}\Big|_{t=۰} = ۱ \quad , \quad B = \frac{۱}{t}\Big|_{t=-۱} = -۱$$

$$\int \frac{dt}{t^۲+t} = \int (\frac{۱}{t} - \frac{۱}{t+۱})dt = \ln(t) - \ln(t+۱) + c = \ln(\frac{t}{t+۱}) + c$$

بنابراین با در نظر گرفتن کران‌ها داریم:

$$\int_۱^\infty \frac{dt}{t^۲+t} = \lim_{b\to\infty}(\ln(\frac{t}{t+۱})\Big|_۱^b) = \lim_{b\to\infty}\ln(\frac{b}{b+۱}) - \ln(\frac{۱}{۲}) = \ln(۱) - \ln(\frac{۱}{۲}) = \ln(۲)$$

۱۱ـ گزینه «۳» اکسترمم‌های مقید تابع $f = x^۲ + xy + y^۲$ را با قید $g = x + ۲y = ۶$ تعیین می‌کنیم. اگر λ ضریب لاگرانژ باشد، داریم:

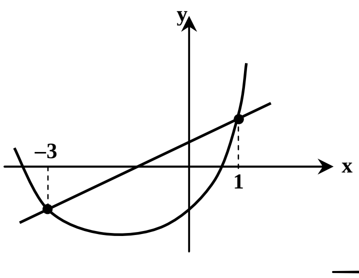
$$\lambda = \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{۲x+y}{۱} = \frac{x+۲y}{۲} \Rightarrow ۴x + ۲y = x + ۲y \Rightarrow x = ۰ \xrightarrow{g} y = ۳$$

نقطه $(۰,۳)$ تنها نقطه اکسترمم است.

$$\text{جواب} = f(۰,۳) = ۹$$

۱۲ـ گزینه «۳» سهمی $y = x^۲ + ۳x - ۲$ و خط $y = x + ۱$ را برخورد می‌دهیم.

$$x^۲ + ۳x - ۲ = x + ۱ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۳ = (x-۱)(x+۳) = ۰$$



$x = ۱$ و $x = -۳$ کران‌های x را تعیین می‌کنند.

$$\text{مساحت} = \int_{-۳}^{۱}(x + ۱ - x^۲ - ۳x + ۲)dx = \int_{-۳}^{۱}(۳ - ۲x - x^۲)dx = (۳x - x^۲ - \frac{x^۳}{۳})\Big|_{-۳}^{۱} = \frac{۳۲}{۳}$$

۱۳ـ گزینه «۴» با توجه به این نکته که $z=z(x,y)$ تابعی از x و y است، از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$z^۲ - ze^{۲x-y} + \frac{y-۴}{x} = ۰$$

$$۲z\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}e^{۲x-y} - ۲e^{۲x-y}\,z - \frac{y-۴}{x^۲} = ۰$$

حال در نقطه $(۱,۲,-۱)$ داریم:

$$-۲\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} + ۲ + ۲ = ۰ \Rightarrow -۳\frac{\partial z}{\partial x} = -۴ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{۴}{۳}$$

۱۴ـ گزینه «۲» رویه‌های داده شده را با $f = z - x^۲ - y^۲ = ۰$ و $g = ۳x + ۲y + z = ۳$ نام‌گذاری می‌کنیم. بردارهای گرادیان هر کدام را در نقطه داده شده به دست می‌آوریم.

$$\nabla g = (۳,۲,۱)$$
$$\nabla f = (-۲x, -۲y, ۱) = (-۲,۲,۱)$$

بردار نرمال صفحه‌ی قائم بر منحنی C برابر است با حاصل ضرب خارجی این دو بردار.

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -۲ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۵j - ۱۰k$$

معادله صفحه‌ای که بردار نرمال آن $(۰,۵,-۱۰)$ است و از نقطه $(۱,-۱,۲)$ می‌گذرد را می‌نویسیم.

$$۵(y+۱) - ۱۰(z-۲) = ۰$$
$$۵y - ۱۰z = -۲۵ \Rightarrow y - ۲z + ۵ = ۰$$

۱۵ـ گزینه «۱» برای آن که دستگاه همگن جواب‌های غیرصفر داشته باشد، لازم است دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد.

$$\det\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -a \\ a & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۲ & ۵ \end{bmatrix} = -۱۰ + ۲ + ۲a^۲ - a - ۵a + ۸ = ۲a^۲ - ۶a = ۰ \Rightarrow ۲a(a-۳) = ۰$$

به ازای $a=۰$ و $a=۳$ دترمینان صفر می‌شود.