سؤالات آزمون سراسری ۹۱

سؤالات رشته‌ی MBA

۱ـ با حروف کلمه «KHRADMAND» چند رمز عبور ۴ حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۱۱۸۴ ۲) ۱۲۱۸ ۳) ۱۲۰۶ ۴) ۱۱۹۶

۲ـ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) e^{-1} ۳) $e-1$ ۴) e

۳ـ مختصات نقطه تلاقی حدی دو خط به معادلات $\begin{cases}2x+(c+2)y=4\\(c+1)x+(c^2+1)y=c+5\end{cases}$ وقتی $x\to 3$ کدام است؟

۱) $(-\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ ۲) $(\frac{11}{3},\frac{-2}{3})$ ۳) $(\frac{7}{3},\frac{-5}{3})$ ۴) $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

۴ـ حد عبارت $(x-\sin x+\cos 2x)^{x^{-2}}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) e^{-4} ۳) e^{-2} ۴) e^{-1}

۵ـ اگر $y=(t+2)e^{2t}$ و $x=t^2e^t$ باشند، مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ به‌ازای $t=-1$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) $\frac{3}{4}$

۶ـ بیشترین فاصله‌ی نقاط منحنی قطبی به معادله‌ی $r=\sin 2\theta$ از محور قطبی کدام است؟

۱) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$

۷ـ مشتق عبارت $\frac{(x+2)^3(3x-1)^4}{(2x+1)^2x^5}$ به‌ازای $x=1$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

۸ـ خط مماس بر منحنی $y=\sinh^{-1}x$ در نقطه $x=\frac{3}{4}$ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{4}{5}-\text{Ln}2$ ۲) $\frac{3}{5}-\text{Ln}2$ ۳) $\text{Ln}2-\frac{4}{5}$ ۴) $\text{Ln}2-\frac{3}{5}$

۹ـ طول نقاط عطف منحنی به معادله $y=\frac{1}{x}e^{-x^2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $1,-1$ ۴) فاقد نقطه عطف

۱۰ـ خطای نسبی در اندازه‌گیری $x^{\frac{m}{n}}$ چند برابر خطای نسبی در اندازه‌گیری x است؟

۱) $\frac{n}{m}$ ۲) m ۳) n ۴) $\frac{m}{n}$

۱۱ـ اگر $f(x)=x\sqrt{x^2+3}$ باشد، خط قائم بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ی $x=-2$ واقع بر آن، خط $x+4=0$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۲ـ حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۳ـ حاصل $\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ وقت $t\to\infty$ کدام است؟

۱) $Ln2$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۴ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y=x^3e^{-x^2}$ و محور xها و دو خط به معادله $x=1$ و $x=-1$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{e}$ ۲) $\frac{e-1}{e}$ ۳) $\frac{e-2}{e}$ ۴) $\frac{2}{e}$

۱۵ـ منحنی به معادله‌ی $y=x^2$، با شرط $y\le 2$ را حول محور yها دوران می‌دهیم. اندازه سطح رویه حاصل چند برابر $\frac{\pi}{3}$ است؟

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۱۶ـ بیشترین انحناء در نقاط منحنی به معادله $y=Lnx$ کدام است؟

۱) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ۲) $\frac{3\sqrt{6}}{9}$ ۳) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ ۴) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

۱۷ـ در بسط تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ به‌صورت توان‌های صعودی x، ضریب x^3 کدام است؟

۱) $\frac{-7}{24}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{7}{32}$ ۴) $\frac{-5}{16}$

۱۸ـ مقادیر خاص ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\1&3&1\\2&2&1\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱ ،۳ ،۵ ۲) ۱ ،۲ ،۵ ۳) ۱ ،۱ ،۵ ۴) ۱ ،۲ ،۳

۱۹ـ اگر $z(x+y)=x^2+y^2$ باشد، حاصل $(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y})^2+4(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $x+y$ ۳) $x-y$ ۴) ۴

۲۰ـ کمترین مقدار تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ با شرط $x^2y=16$ کدام است؟

۱) $\frac{118}{9}$ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۱ـ اندازه‌ی مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=z(x+y)-x^2-y^2$ در نقطه‌ی $(2,3,4)$ در امتداد بردار $2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۲ـ حد عبارت $\frac{\cos(xy)}{1-x-\cos y}$ وقتی $(x,y)\to(1,\pi)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) ∞ ۴) ۱

۲۳ـ مساحت کل نواحی محدود به منحنی قطبی $r=\cos 3\theta$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۲۴ـ فصل مشترک دو صفحه به معادلات $x+y-z=5$ و $x-y-5z=2$ با خط به معادله $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{x+1}{3}$ کدام وضعیت را دارد؟

۱) منطبق ۲) متقاطع ۳) متنافر ۴) موازی

۲۵ـ اگر $\vec{F}=(y-x)\vec{i}+(y+x)\vec{j}$ باشد، مقدار $\int_{(c)}\vec{F}.d\vec{r}$ بر روی منحنی $y=x^2$ از $x=0$ تا $x=1$ و سپس بر روی منحنی $y=\frac{1}{x}$ از $x=1$ تا $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{-7}{8}$ ۲) $\frac{-9}{8}$ ۳) $\frac{9}{8}$ ۴) $\frac{7}{8}$

۲۶ـ اگر $u=xy+yz+zx$، $v=x^2+y^2+z^2$ و $w=x+y+z$ آن‌گاه $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ کدام است؟

۱) xyz ۲) $2w$ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۷ـ سطح قسمتی از رویه $z = x^2 - y^2$ که در داخل استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 6$ قرار می‌گیرد، کدام است؟

۱) $\frac{62\pi}{3}$ ۲) $\frac{55\pi}{6}$ ۳) $\frac{65\pi}{6}$ ۴) $\frac{31\pi}{3}$

۲۸ـ اگر $z + \frac{1}{z} = 1$ باشد، آن‌گاه $z^2 + (\bar{z})^2$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) 1

۲۹ـ فاصله همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2n+3}$ کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(0,2]$ ۴) $(0,2)$

۳۰ـ اگر $\vec{F} = x^2\vec{i} + (2x-y)\vec{j} + yz\vec{k}$ آن‌گاه $\text{curl}\vec{F}$ کدام است؟

۱) $z\vec{j} + 2\vec{k}$ ۲) $z\vec{i} - y\vec{j} + x\vec{k}$ ۳) $2x\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k}$ ۴) $z\vec{i} + 2\vec{k}$

پاسخنامه رشته‌ی MBA

۱ـ گزینه «۳» ابتدا حروف این کلمه را به‌صورت جدا می‌نویسیم: AA, DD, K, H, R, M, N

رمزهای چهارحرفی می‌توانند شامل حروف تکراری باشند و یا می‌توانند شامل حروف تکراری نباشند که خود رمزهای چهارحرفی تکراری می‌توانند شامل تکرارهای A یا تکرارهای D و یا تکرار هر دو باشند. رمزهای بدون تکرار: $\boxed{7} \times \boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{4} = 840$

توجه کنید که حروف A و D را یک بار در نظر می‌گیریم.

اکنون رمزهای تکراری:

$$\text{با تکرار فقط A}: \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{جایگاه A}} \times \underset{A}{1} \times \underset{A}{1} \times \underbrace{6 \times 5}_{\text{حروف دیگر}} = 180$$

$$\text{با تکرار فقط D}: \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{جایگاه D}} \times \underset{D}{1} \times \underset{D}{1} \times \underbrace{6 \times 5}_{\text{حروف دیگر}} = 180 \qquad \Rightarrow \text{کل حالات}: 840 + 180 + 180 + 6 = 1206$$

$$\text{تکرار A و D}: \binom{4}{2} \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$$

۲ـ گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

با تبدیل سری به یک سری تلسکوپی، به تست پاسخ می‌دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n!} - \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{(n-1)!n} - \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right)$$

همان‌طور که می‌بینید سری به شکل $(f_n - f_{n+1})$ نوشته شده و لذا حاصل آن برابر است با:

$$f_1 - \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \frac{1}{(1-1)!} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} - 0 = 1 - 0 = 1$$

۳ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. این سؤال بعد از آزمون توسط سنجش حذف گردید! چون جواب صحیح در گزینه‌ها موجود نبود!؟ به هر حال به تست پاسخ می‌دهیم:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & c+2 \\ c+5 & c^2+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & c+2 \\ c+1 & c^2+1 \end{vmatrix}} = \frac{3c^2 - 7c - 6}{c^2 - 3c} = 3 \Rightarrow 3c^2 - 7c - 6 = 3c^2 - 9c \Rightarrow c = 3 \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ c+1 & c+5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & c+2 \\ c+1 & c^2+1 \end{vmatrix}} = \frac{-2c+6}{c^2-3c} = \frac{-2(c-3)}{c(c-3)} = \frac{-2}{c} \xrightarrow{c=3} y = -\frac{2}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow c\left(3, -\frac{2}{3}\right)$$

۴ـ گزینه «۳» حد از نوع $(1)^\infty$ است، لذا داریم:

$$\text{حاصل حد} = e^{\lim_{x\to 0}(x - \sin x + \cos 2x - 1) \times \frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(x - x + \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{4x^2}{2} - 1\right)\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$$

۵ـ گزینه «۲» با استفاده از فرمول مشتق پارامتری داریم:

$$\begin{cases} y=(t+2)e^{2t} \\ x=t^2e^t \end{cases} \Rightarrow y'_x=\frac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow y'_x=\frac{1\times e^{2t}+2e^{2t}(t+2)}{2te^t+e^t\times t^2}=\frac{e^{2t}(2t+5)}{e^t(2t+t^2)}=\frac{e^t(2t+5)}{t^2+2t}$$

$$y''_x=\frac{(y'_x)_t}{x'_t}=\frac{\dfrac{2e^t(t^2+2t)+e^t(2t+5)(t^2+2t)-(2t+2)(2t+5)e^t}{(t^2+2t)^2}}{e^t(2t+t^2)}=\frac{2(t^2+2t)+(2t+5)(t^2+2t)-(2t+2)(2t+5)}{(t^2+2t)^3}$$

$$t=-1 \Rightarrow y''_x=\frac{2(1-2)+(-2+5)(1-2)-0}{(1-2)^3}=\frac{-5}{-1}=5$$

۶ـ گزینه «۱» محور قطبی در مختصات دکارتی همان محور xها می‌باشد و بنابراین فاصله از محور قطبی به منزله پیدا کردن مقدار y می‌باشد و این یعنی باید بیشترین مقدار y تعیین شود.

$$y=r\sin\theta=\sin 2\theta.\sin\theta=2\sin^2\theta.\cos\theta=2(1-\cos^2\theta).\cos\theta=2(\cos\theta-\cos^3\theta)$$

$$y'=2(-\sin\theta+3\sin\theta.\cos^2\theta)=0 \Rightarrow \sin\theta=3\sin\theta\cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta=\frac{1}{3} \Rightarrow \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$y=2\sin^2\theta.\cos\theta=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

۷ـ گزینه «۲» با توجه به تابع داده شده باید از مشتق لگاریتمی کمک بگیریم:

$$y=\frac{(x+2)^3(3x-1)^4}{(2x+1)^2x^5} \Rightarrow Lny=Ln(\frac{(x+2)^3(3x-1)^4}{(2x+1)^2x^5})=Ln[(x+2)^3(3x-1)^4]-Ln[(2x+1)^2x^5]$$

$$\Rightarrow Lny=3Ln(x+2)+4Ln(3x-1)-2Ln(2x+1)-5Lnx$$

حالا از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x+2}+\frac{4\times 3}{3x-1}-\frac{2\times 2}{2x+1}-\frac{5}{x} \quad ; \quad y'(1)=y(1)[\frac{3}{1+2}+\frac{12}{3\times 1-1}-\frac{4}{2\times 1+1}-\frac{5}{1}] \quad , \quad y(1)=\frac{(1+2)^3(3\times 1-1)^4}{(2\times 1+1)^2\times 1}=48$$

$$\Rightarrow y'(1)=48(1+6-\frac{4}{3}-5)=48(2-\frac{4}{3})=48(\frac{2}{3})=32$$

۸ـ گزینه «۴» یک تست بسیار ساده در مورد معادله‌ی خط مماس بر منحنی می‌باشد. ابتدا شیب خط را حساب می‌کنیم:

$$y=\sinh^{-1}x \Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow m_{\text{مماس}}=y'(\frac{3}{4})=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{3}{4})^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}}=\frac{4}{5}$$

$$\sinh^{-1}x=Ln(x+\sqrt{x^2+1}) \Rightarrow \sinh^{-1}(\frac{3}{4})=Ln(\frac{3}{4}+\sqrt{(\frac{3}{4})^2+1})=Ln(\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{25}{16}})=Ln(\frac{3}{4}+\frac{5}{4})=Ln\frac{8}{4}=Ln2 \Rightarrow x_0=\frac{3}{4}\ ,\ y_0=Ln2$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس برابر است با:

$$y-Ln2=\frac{4}{5}(x-\frac{3}{4})$$

سؤال پرسیده خط مماس بر منحنی محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند، برای این منظور باید در معادله‌ی فوق $x=0$ قرار دهیم:

$$y-Ln2=\frac{4}{5}(0-\frac{3}{4}) \Rightarrow \mathbf{y=Ln2-\frac{3}{5}}$$

۹ـ گزینه «۴» باید از تابع دو بار مشتق بگیریم:

$$y=\frac{1}{x}e^{-x^2} \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}e^{-x^2}-2xe^{-x^2}\times\frac{1}{x}=e^{-x^2}(-\frac{1}{x^2}-2)$$

$$y''=-2xe^{-x^2}(-\frac{1}{x^2}-2)+\frac{2}{x^3}e^{-x^2}=e^{-x^2}(\frac{2}{x}+4x+\frac{2}{x^3})$$

تنها نقطه‌ی عطف تابع می‌تواند $x=0$ باشد و چون خود تابع در این نقطه پیوسته نیست، لذا تابع نقطه عطف ندارد.

۱۰ـ گزینه «۴»

$$\left.\begin{array}{l} \text{خطای اندازه‌گیری } x^{\frac{m}{n}}=\dfrac{\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}}{x^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{1}{x} \\[2ex] \text{خطای اندازه‌گیری } x=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{نسبت خطاها}} \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{m}{n}$$

۱۱ـ گزینه «۳» برای این که خط قائم بر نمودار تابع f^{-1} را به‌دست بیاوریم، باید شیب این خط حساب شود، می‌دانیم طول روی تابع وارون، عرض روی تابع اصلی است، بنابراین ابتدا طول روی تابع اصلی را حساب می‌کنیم:

$$-2 = x\sqrt{x^2+3} \Rightarrow 4 = x^2(x^2+3) \Rightarrow x^4+3x^2-4=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \begin{vmatrix} x^2 = -\frac{4}{3} & (\text{غ ق ق}) \\ x^2 = 1 & (\text{ق ق}) \end{vmatrix}$$

اگر $x^2 = 1$، آن‌گاه $x = \pm 1$ می‌شود، که واضح است $x = 1$ نمی‌تواند باشد (اگر این‌طور باشد تساوی $-2 = x\sqrt{x^2+3}$ نمی‌تواند برقرار باشد)، پس فقط $x = -1$ قابل قبول است. برای نوشتن معادله‌ی خط قائم روی تابع معکوس نقطه‌ی $A(-2,-1)$ معلوم شده و لازم است شیب خط قائم را حساب کنیم. برای این منظور شیب خط قائم بر تابع معکوس را از روی معادله‌ی خود تابع حساب می‌کنیم:

$$f(x) = x\sqrt{x^2+3} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x^2+3} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$$

اما این شیب خط مماس بر تابع اصلی را به ما می‌دهد و لذا شیب خط مماس بر نمودار تابع معکوس برابر مقدار زیر است:

$$m_{\text{مماس}} = f^{-1'}(-2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{2}{5} \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -\frac{5}{2}$$

$$y-(-1) = -\frac{5}{2}(x+2) \Rightarrow 2y+2 = -5x-10 \xrightarrow{x=-4} 2y+2 = -5(-4)-10 \Rightarrow 2y = 8 \Rightarrow \mathbf{y = 4}$$

۱۲ـ گزینه «۱» یک حد بسیار ساده که با استفاده از «حد مجموع انتگرال» به راحتی حساب می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}[x^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

۱۳ـ گزینه «۴» یک انتگرال که با تغییر متغیر به راحتی حل می‌شود:

$$e^{2x}-1 = u^2 \Rightarrow 2e^{2x}dx = 2udu \xrightarrow{e^{2x}=u^2+1} dx = \frac{udu}{u^2+1}$$

$$\int_0^t \frac{u}{\sqrt{u^2}}\left(\frac{du}{u^2+1}\right) \Rightarrow I = \int_0^t \frac{du}{u^2+1} = \int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} = [\text{Arctg}u]_0^\infty = \mathbf{\frac{\pi}{2}}$$

۱۴ـ گزینه «۳» با توجه به فرمول مساحت داریم:

$$S = \int_{-1}^{1} x^3 e^{-x^2}dx = 2\int_0^1 x^3 e^{-x^2}dx$$

برای راحت‌تر حل شدن انتگرال تغییر متغیر می‌دهیم:

$$\begin{cases} x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \ , \ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

حالا با یک انتگرال‌گیری جزء به جزء روبه‌رو هستیم که با روش جدول آن را حل می‌کنیم:

$$S = 2\int_0^1 te^{-t}\left(\frac{dt}{2}\right) = \mathbf{\int_0^1 te^{-t}dt}$$

t	e^{-t}
1	$\overset{+}{}-e^{-t}$
0	$\overset{-}{}e^{-t}$

$$\Rightarrow S = [t(-e^{-t})-e^{-t}]_0^1 = 1(-e^{-1})-e^{-1}+e^0 = 1-2e^{-1} = 1-\frac{2}{e} = \mathbf{\frac{e-2}{e}}$$

۱۵ـ گزینه «۲» سطح حاصل از دوران منحنی $y = f(x)$، حول محور y ها از رابطه‌ی مقابل حساب می‌شود:

$$\mathbf{S = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}dx}$$

معادله‌ی $y = x^2$ به ازای $\pm x$ تغییری نمی‌کند، بنابراین منحنی $y = x^2$ زوج است (به ازای $\pm x$ تغییری نمی‌کند) پس نسبت به محور y ها که همان محور دوران است، متقارن می‌باشد. در این حالت ناحیه‌ی موردنظر دارای دو نیمه است که در دو طرف محور دوران قرار گرفته‌اند. طبق متن درس کافیست نیمه‌ی سمت راست را در نظر بگیریم و سطح حاصل از دوران آن را حساب کنیم. نیازی به دو برابر کردن جواب هم نداریم. خط $y = 2$ با منحنی $y = x^2$ در $x = \pm\sqrt{2}$ برخورد می‌کند، بنابراین در نیمه‌ی سمت راست داریم $0 \le x \le \sqrt{2}$.

$$S = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+(2x)^2}dx = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}dx$$

دقت کنید مشتق عبارت زیر رادیکال با ضرب و تقسیم عدد ۸ به وجود می‌آید:

$$S = \frac{2\pi}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}\,8xdx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6}[(1+4\times(\sqrt{2})^2)^{\frac{3}{2}}-1] = \frac{\pi}{6}(9^{\frac{3}{2}}-1) = \frac{\pi}{6}((3^2)^{\frac{3}{2}}-1) = \frac{\pi}{6}(3^3-1) = \frac{26\pi}{6} = \mathbf{13(\frac{\pi}{3})}$$

۱۶ـ گزینه «۱» می‌دانیم شعاع انحنای منحنی $y = f(x)$ از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{R} = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}}$$

$$y = \text{Ln}x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow |y''| = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{\frac{1}{x^2}}{[1+(\frac{1}{x})^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{x^2[1+(\frac{1}{x})^2]^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow R=x^2[\frac{x^2+1}{x^2}]^{\frac{3}{2}}=x^2[x^2+1]^{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{x^3} \Rightarrow \mathbf{R=\frac{1}{x}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}[x^2+1]^{\frac{1}{2}}(2x)(\frac{1}{x})=-\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{x^2}+3(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{-(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+3x^2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=0 \Rightarrow -(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+3x^2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=0 \Rightarrow (x^2+1)^{\frac{1}{2}}[-(x^2+1)+3x^2]=0 \Rightarrow 2x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y'=\sqrt{2}\ ,\ y''=-\frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=-2$$

$$\kappa=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|-2|}{(1+(\sqrt{2})^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{3^3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

۱۷ـ گزینه «۴» با استفاده از بسط دوجمله‌ای (بسط برنولی) داریم:

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots$$

پس ضریب x^3 برابر است با: $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$. در این سؤال $n=-\frac{1}{2}$ و لذا داریم:

$$x^3 \text{ ضریب }=\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{6}=\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{6}=-\frac{15}{48}=\mathbf{-\frac{5}{16}}$$

۱۸ـ گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

معادله‌ی مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & 1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)+2+2-(3-\lambda)-2(2-\lambda)-2(2-\lambda)$$

$$=(2-\lambda)^2(3-\lambda)+5\lambda-7=(4-4\lambda+\lambda^2)(3-\lambda)+5\lambda-7$$

$$\Rightarrow f(\lambda)=12-16\lambda+7\lambda^2-\lambda^3+5\lambda-7=5-11\lambda+7\lambda^2-\lambda^3=0$$

با قرینه کردن طرفین و مرتب کردن جملات داریم:

$$\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5=0$$

مجموع ضرایب صفر است: $(1-7+11-5=0)$ بنابراین $\lambda=1$ یکی از ریشه‌هاست. برای تجزیه‌ی این عبارت، به جای تقسیم بر $\lambda-1$ می‌توانیم به این صورت عمل کنیم:

$$\lambda^3-\lambda^2-6\lambda^2+6\lambda+5\lambda-5=\lambda^2(\lambda-1)-6\lambda(\lambda-1)+5(\lambda-1)=(\lambda^2-6\lambda+5)(\lambda-1)=(\lambda-5)(\lambda-1)(\lambda-1)=0$$

بنابراین مقادیر ویژه عبارتند از ۱، ۱ و ۵.

۱۹ـ گزینه «۴» ابتدا رابطه را به‌صورت $F(x,y,z)=0$ می‌نویسیم:

$$F(x,y,z)=z(x+y)-x^2-y^2=0 \Rightarrow zx-x^2+zy-y^2=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{z-2x}{x+y}=\frac{2x-z}{x+y}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{z-2y}{x+y}=\frac{2y-z}{x+y}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=2(\frac{x-y}{x+y})\\ \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2(\frac{x+y-z}{x+y})\end{array}\right. \Rightarrow (\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y})^2+4(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{4(x-y)^2}{(x+y)^2}+\frac{8(x+y-z)}{x+y}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم}} \frac{4(x-y)^2+8(x+y)(x+y-z)}{(x+y)^2}$$

$$\xrightarrow{z(x+y)=x^2+y^2} \frac{4(x-y)^2+8(x+y)^2-8(x^2+y^2)}{(x+y)^2}=\frac{4(x+y)^2}{(x+y)^2}=4$$

۲۰ـ گزینه «۳» یک روش استفاده از روش ضرایب لاگرانژ و یک راه دیگر تبدیل تابع دو متغیره به یک تابع تک متغیره است:

$$x^۲y=۱۶ \Rightarrow x^۲=\frac{۱۶}{y} \quad \text{و} \quad f(x,y)=x^۲+y^۲=\frac{۱۶}{y}+y^۲=\frac{۱۶+y^۳}{y}$$

$$f'=\frac{۳y^۲\times y-۱\times(۱۶+y^۳)}{y^۲}=\frac{۲y^۳-۱۶}{y^۲}\ ,\ f'=۰ \Rightarrow ۲y^۳-۱۶=۰ \Rightarrow y^۳=۸ \Rightarrow y=۲ \xrightarrow{x^۲=\frac{۱۶}{y}} x^۲=\frac{۱۶}{۲}=۸ \Rightarrow x=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین کمترین مقدار $x^۲+y^۲$ برابر است با: $f_{min}=x^۲+y^۲=۸+۴=\mathbf{۱۲}$

۲۱ـ گزینه «۲» ابتدا بردار یکه $\vec{u}$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{u}=\frac{۲\vec{i}-۲\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{۲^۲+(-۲)^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{۳}\vec{i}-\frac{۲}{۳}\vec{j}+\frac{۱}{۳}\vec{k}$$

$$f(x,y,z)=z(x+y)-x^۲-y^۲ \Rightarrow \vec{\nabla}f=(z-۲x\ ,\ z-۲y, x+y) \Rightarrow \vec{\nabla}f(۲,۳,۴)=(۰,-۲,۵)=-۲\vec{j}+۵\vec{k}$$

$$\text{مشتق سویی در جهت بردار } \vec{A}=\vec{\nabla}f.\vec{u}=(-۲\vec{j}+۵\vec{k})(\frac{۲}{۳}\vec{i}-\frac{۲}{۳}\vec{j}+\frac{۱}{۳}\vec{k})=+\frac{۴}{۳}+\frac{۵}{۳}=\frac{۹}{۳}=\mathbf{۳}$$

۲۲ـ گزینه «۱» با توجه به گزینه‌ها واضح است حد وجود دارد و مبهم نیست. لذا به راحتی داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(۱,\pi)}\frac{\cos xy}{۱-x-\cos y}=\frac{\cos\pi}{-\cos\pi}=-۱$$

۲۳ـ گزینه «۳» نمودار دارای سه برگ می‌باشد که یکی از این برگ‌ها در ناحیه $(-\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۶})$ قرار دارد. مساحت این برگ را حساب می‌کنیم و در ۳ ضرب می‌کنیم. از زوج بودن تابع زیر انتگرال و فرمول $\cos^۲ ۳\theta=\frac{۱+\cos ۶\theta}{۲}$ هم استفاده می‌کنیم:

$$۳\times\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}}\frac{f^۲(\theta)}{۲}d\theta=۳\times\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۶}}\frac{\cos^۲ ۳\theta}{۲}d\theta=۳\times ۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}\frac{\cos^۲ ۳\theta}{۲}d\theta=۳\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}\frac{(۱+\cos ۶\theta)}{۲}d\theta=\frac{۳}{۲}[\theta+\frac{۱}{۶}\sin ۶\theta]_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}=\frac{۳}{۲}\times\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۴}$$

۲۴ـ گزینه «۴» متأسفانه در اصل سؤالات سازمان سنجش به جای z در کسر سوم (مربوط به معادله‌ی خط)، حرف x نوشته شده! که پس از اصلاح تست را جواب می‌دهیم! می‌دانیم بردار هادی خط حاصل از تقاطع دو صفحه برابر حاصل‌ضرب بردارهای نرمال آن صفحه‌ها می‌باشد:

$$\begin{cases}x-y-۵z-۲=۰ \Rightarrow \vec{N}_۱(۱,-۱,-۵)\\ x+y-z-۵=۰ \quad \Rightarrow \vec{N}_۲(۱,۱,-۱)\end{cases} \Rightarrow \text{بردار هادی فصل مشترک}=\vec{N}_۱\times\vec{N}_۲=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۱ & -۱ & -۵\\ ۱ & ۱ & -۱\end{vmatrix}=۶\vec{i}-۴\vec{j}+۲\vec{k}$$

چون $(۶,-۴,۲)$ مضربی از بردار خط $(۳,-۲,۱)$ می‌باشد، دو خط موازی هستند. حالا باید ببینیم دو خط نقطه‌ی مشترک دارند یا نه؟ برای این منظور نقطه‌ی $x=-۱$ را بر روی فصل مشترک در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}x-y-۵z=۲\\ x+y-z=۵\end{cases}\xrightarrow{x=-۱}\begin{cases}-۱-y-۵z=۲\\ -۱+y-z=۵\end{cases}\Rightarrow -۲-۶z=۷ \Rightarrow -۶z=۹ \Rightarrow z=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow y=\frac{۹}{۲}$$

حالا باید ببینیم نقطه‌ی $(-۱,\frac{۹}{۲},\frac{-۳}{۲})$ در خط داده شده صدق می‌کند؟ به راحتی معلوم است، $\frac{۹}{۲}$ صورت کسر $\frac{y-۳}{-۲}$ را صفر نمی‌کند، پس این دو خط فقط موازی هم هستند.

۲۵ـ گزینه «۱» ابتدا شرایط میدان برداری را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial F_۲}{\partial x}-\frac{\partial F_۱}{\partial y}=۱-۱=۰$$

پس میدان پایستار است و باید تابع پتانسیل آن حساب شود:

$$f(x,y,z)=\int_{۰}^{x}F_۱(t,۰,۰)\,dt+\int_{۰}^{y}F_۲(x,t,۰)dt+\int_{۰}^{z}F_۳(x,y,t)dt$$

$$\int_{۰}^{x}-t dt+\int_{۰}^{y}(x+t)dt=[-\frac{t^۲}{۲}]_{۰}^{x}+[xt+\frac{t^۲}{۲}]_{۰}^{y} \Rightarrow \boldsymbol{\psi(x,y)=-\frac{x^۲}{۲}+xy+\frac{y^۲}{۲}}$$

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=\psi(۲,\frac{۱}{۲})-\psi(۰,۰)=۱-۲+\frac{۱}{۸}=-\frac{۷}{۸}$$

۲۶ـ گزینه «۴» مقدار خواسته شده بر طبق فرمول به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial u}{\partial z}\\\frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial y}&\frac{\partial v}{\partial z}\\\frac{\partial w}{\partial x}&\frac{\partial w}{\partial y}&\frac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y+z&x+z&x+y\\2x&2y&2z\\1&1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}y+z&x+z&x+y\\x&y&z\\1&1&1\end{vmatrix}$$

حالا باید مقدار دترمینان حساب شود، دو روش ارائه می‌شود:

۱) با اضافه کردن سطر دوم به سطر اول، تمامی عناصر سطر اول برابر $(x+y+z)$ می‌شوند که واضح است ضریبی از سطر سوم هستند و می‌دانیم در این حالت، حاصل دترمینان صفر می‌شود.

۲) اگر $x=y=z=1$، آن‌گاه سطر اول و سطر دوم برابر $\underline{1}$ می‌شوند و لذا باز هم حاصل دترمینان برابر صفر می‌شود (به دلیل برابری دو سطر از دترمینان).

حال در گزینه‌ها $x=y=z=1$ قرار می‌دهیم، هرکدام صفر شد، جواب است که می‌بینیم هیچکدام از آن‌ها به جز گزینه‌ی (۴) صفر **نمی‌شود**.

۲۷ـ گزینه «۱» ابتدا گرادیان تابع φ را حساب می‌کنیم.

$$\varphi(x,y,z)=x^2-y^2-z\ \Rightarrow \vec{\nabla}\varphi=2x\vec{i}-2y\vec{j}-\vec{k}$$

$$ds=\frac{|\vec{\nabla}\varphi|}{|\vec{\nabla}\varphi.\vec{k}|}dxdy=\frac{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}{1}dxdy\ \xrightarrow{\text{مختصات قطبی}}\ \sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}}r\sqrt{1+4r^2}\,drd\theta=\frac{2\pi}{12}[(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{\sqrt{6}}=\frac{\pi}{6}[(1+4\times 6)^{\frac{3}{2}}-1]=\frac{\pi}{6}[(5^2)^{\frac{3}{2}}-1]=\frac{\pi}{6}(5^3-1)=\frac{124\pi}{6}=\frac{62\pi}{3}$$

۲۸ـ گزینه «۱» سؤال را به دو روش جواب می‌دهیم:

روش اول: می‌توانیم با استفاده از قوانین معادله‌ی درجه (۲) مقدار z را حساب کنیم:

$$z+\frac{1}{z}=1\ \Rightarrow z^2-z+1=0\ \Rightarrow z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^2+(\bar{z})^2=(x+iy)^2+(x-iy)^2=x^2-y^2+2ixy+x^2-y^2-2ixy=2(x^2-y^2)=2(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})=-1$$

روش دوم: در این حالت $z=x+iy$ قرار می‌دهیم:

$$z+\frac{1}{z}=1\ \Rightarrow x+iy+\frac{1}{x+iy}=1\ \Rightarrow x^2-y^2+2ixy+1=x+iy$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2+1=x & (1)\\ 2xy=y\ \xrightarrow{y\neq 0}\ x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \mathbf{x^2=\frac{1}{4}}\end{cases}\ \xrightarrow{(1)}\ \frac{1}{4}-y^2+1=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \mathbf{y^2=\frac{3}{4}}$$

$$z^2+(\bar{z})^2=x^2-y^2+2ixy+x^2-y^2-2ixy=2(x^2-y^2)=2(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})=-1$$

۲۹ـ گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

با توجه به گزینه‌ها باید شرایط همگرائی در نقاط ابتدائی و انتهائی $(2,0)$ بررسی شود:

$$x=0\ \Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(0-1)^n}{2n+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2n+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3}\qquad \text{و}\qquad x=2\ \Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2-1)^n}{2n+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+2}$$

به راحتی و با توجه به توضیحات در مورد « p سری» واضح است که سری اول در $x=0$ واگراست. همچنین با توجه به توضیح «سری متناوب» سری دوم همگراست، پس بازه همگرائی $(0,2]$ می‌باشد.

۳۰ـ گزینه «۴»

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}=z\vec{i}+0\vec{j}+2\vec{k}=z\vec{i}+2\vec{k}$$

سؤالات رشته‌ی عمران

۱ـ مقدار حد $\lim\limits_{n\to\infty}[(\frac{۱}{n})^{۱}+(\frac{۲}{n})^{۲}+\cdots+(\frac{n}{n})^{n}]^{\frac{۱}{n}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) e ۳) ۲ ۴) ۱

۲ـ به ازای چه مقدار از k، مبدأ مختصات و دو ریشه‌ی مختلط معادله $z^{۲}+az+\frac{a^{۲}}{k}=۰$، سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند؟ $(a\in\mathbb{R})$

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳ـ با استفاده از معادله $f^{۲}(x)=\int_{۰}^{x}f(t)\frac{\sin t}{۲+\cos t}dt$، اگر $f(\pi)=۴$، آن‌گاه مقدار $f(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) $۴-\mathrm{Ln}\sqrt{۲}$ ۲) $۸+\mathrm{Ln}۲$ ۳) $۸-\mathrm{Ln}۲$ ۴) $۴+\mathrm{Ln}\sqrt{۲}$

۴ـ با توجه به انتگرال‌های زیر؛ حاصل $۵I+۳J$ کدام است؟

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx\ ,\ J=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

۱) $\frac{\pi}{۴}+\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\pi+\mathrm{Ln}\sqrt{۲}$ ۳) $\pi+\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}+\mathrm{Ln}\sqrt{۲}$

۵ـ مقدار سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{n۲^{n}})$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\mathrm{Ln}۳$ ۳) $\mathrm{Ln}۲$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶ـ فاصله‌ی دو خط متنافر $\frac{x+۱}{۴}=\frac{۲-y}{۳}=\frac{-z}{۵}$, $\frac{x+۲}{۲}=\frac{۳-y}{۱}=\frac{-z-۳}{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۱۹}{۳}$ ۳) $\frac{۱۳}{۳}$ ۴) ۳

۷ـ فرض کنید تابع با ضابطه‌ی $w=f(x,y,z)$ در مبدأ مشتق‌پذیر است به طوری که مشتقات سوئی آن در مبدأ و در جهت بردارهـای $\vec{a}=(۱,-۱,۰)$، $\vec{b}=(۱,۱,۱)$ و $\vec{c}=(۰,۱,۲)$ به ترتیب برابر $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ می‌باشد. بیشترین افزایش تابع f در مبدأ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۱۲}$ ۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

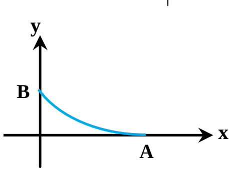
۸ـ حاصل انتگرال $\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}e^{-xy}\sin(kx)dxdy\ ,\ k>۰$ چقدر است؟

۱) $-\pi$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $-\frac{\pi}{۲}$

۹ـ مقدار انتگرال $I=\int_{C}\frac{x-y}{x^{۲}+y^{۲}}dx+\frac{x+y}{x^{۲}+y^{۲}}dy$ کدام است؟ (منحنی C $(\frac{x}{۳})^{\frac{۲}{۳}}+(\frac{y}{۲})^{\frac{۲}{۳}}=۱$ در ربع اول و از نقطه $A\Big|^{۳}_{۰}$ تا نقطه $B\Big|^{۰}_{۲}$ است.)

۱) $\mathrm{Ln}\frac{۲}{۳}-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}+\frac{\pi}{۲}$

۳) $\mathrm{Ln}\frac{۲}{۳}+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}-\frac{\pi}{۲}$



۱۰ـ شار گذرنده برون سوی میدان $\vec{F}(x,y,z)=(e^{y^{۲}+z^{۲}},e^{z^{۲}+x^{۲}},e^{x^{۲}+y^{۲}})$ از سطح بالایی نیم‌کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{۲}(۱-e)$ ۲) $\pi(e-۱)$ ۳) $\frac{\pi}{۲}(e-۱)$ ۴) $\pi(۱-e)$

پاسخنامه رشته‌ی عمران

۱ـ گزینه «۴»

روش اول: با مخرج مشترک گرفتن و استفاده از هم ارزی، به راحتی می‌توانیم به تست پاسخ دهیم:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n^{n-۱}+۴n^{n-۲}+\cdots+n^{n}}{n^{n}})^{\frac{۱}{n}}$$

با توجه به هم ارزی در بی‌نهایت، واضح است صورت کسر هم‌ارز بزرگترین جمله است:

$$n^{n-۱}+۴n^{n-۲}+\cdots+n^{n}\sim n^{n}$$

بنابراین داریم:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n^{n}}{n^{n}})^{\frac{۱}{n}}=\lim_{n\to\infty}((\frac{n}{n})^{n})^{\frac{۱}{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n})^{n\times\frac{۱}{n}}=۱$$

روش دوم: حد خواسته شده را A می‌نامیم:

$$A = \lim_{n\to\infty} [(\frac{1}{n})^1 + (\frac{2}{n})^2 + \cdots + (\frac{n}{n})^n]^{\frac{1}{n}}$$

برای حل این تست از قضیه فشردگی (ساندویچ) استفاده می‌کنیم.

بدیهی است که کوچکترین جمله داخل کروشه برابر $(\frac{1}{n})^1$ و بزرگترین جمله برابر $(\frac{n}{n})^n$ می‌باشد، بنابراین می‌توان چنین نوشت:

$$\lim_{n\to\infty} [(\frac{1}{n})^1 + (\frac{1}{n})^1 + \cdots (\frac{1}{n})^1]^{\frac{1}{n}} \le A \le \lim_{n\to\infty} [(\frac{n}{n})^n + (\frac{n}{n})^n + \cdots (\frac{n}{n})^n]^{\frac{1}{n}}$$

تعداد جملات داخل کروشه n تا می‌باشد، که برای کروشه سمت چپ n تا $\frac{1}{n}$ و برای کروشه سمت راست n تا $\frac{n}{n}$اُم داریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} [n \times \frac{1}{n}]^{\frac{1}{n}} \le A \le [n \times (\frac{n}{n})^n]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} [1]^{\frac{1}{n}} \le A \le [n]^{\frac{1}{n}}$$

طبق نکات گفته شده در متن کتاب $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$، پس $1 \le A \le 1$ و طبق قضیه ساندویچ $A = 1$.

تذکر: با توجه به سابقه‌ی سال قبل به نظر می‌رسد طراح این تست قصد داشته سؤال از طریق حد مجموع انتگرال پاسخ داده شود که البته از آن روش قابل حل نیست.

۲ـ گزینه «۲» واضح است باید دو ریشه‌ی معادله را به‌دست آوریم، اما قبل از آن برای راحتی در محاسبات $a = 1$ قرار می‌دهیم تا در محاسبات راحت‌تر باشیم (دقت کنید در صورت سؤال قید شده a هر عدد حقیقی می‌تواند باشد).

$$z^2 + z + \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{k}}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{k}}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{k}} \xrightarrow{i = \sqrt{-1}} z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{k} - 1}$$

نکته تستی: همین‌جا داوطلب باهوش می‌تواند کار را تمام کند، با نگاهی به عبارت رادیکالی واضح است k باید برابر ۳ شود تا بتوانیم به عدد $\frac{1}{\sqrt{3}}$ برسیم:

$$\sqrt{\frac{4}{3} - 1} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

شاید لازم به توضیح نباشد اما دلیل این که عبارت رادیکالی باید برابر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ شود این است که زاویه‌ی بین z_1 و z_2 باید برابر ۶۰ درجه باشد و چون z_1 و z_2 مزدوج هستند، برای همین باید زاویه‌ی هریک ۳۰ درجه شود:

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{k} - 1}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow k = 3$$

ادامه‌ی حل تشریحی: اما برای روشن شدن مطلب و نظر به این که احتمالاً تعداد انگشت‌شماری در روز آزمون و یا حتی بعد از آن! متوجه این نکته نخواهند شد، ادامه‌ی حل ارائه می‌شود. گفته شده این دو نقطه و مبدأ باید رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، پس لازم است فاصله‌ی این دو نقطه از هم با فاصله‌ی هریک از این نقاط از مبدأ برابر باشد:

$$|z_1 - z_2| = |(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{k} - 1}) - (-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{k} - 1})| = |i\sqrt{\frac{4}{k} - 1}| = \sqrt{(\frac{4}{k} - 1)}$$

$$|z_1 - 0| = |-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{k} - 1}| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{k} - 1})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\frac{4}{k} - 1)}$$

این دو مقدار را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{\frac{4}{k} - 1} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\frac{4}{k} - 1)} \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{k} - 1} = \sqrt{\frac{1}{k}} \Rightarrow \frac{4}{k} - 1 = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{4}{k} - \frac{1}{k} = 1 \Rightarrow \frac{3}{k} = 1 \Rightarrow \mathbf{k = 3}$$

۳ـ گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

با مشتق گرفتن از طرفین تساوی داریم:

$$2f(x)f'(x) = f(x) \cdot \frac{\sin x}{2 + \cos x} \xrightarrow{f(x) \ne 0} 2f'(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(\frac{\sin x}{2 + \cos x}) \qquad (*)$$

حالا از طرفین تساوی فوق انتگرال می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx = -\frac{1}{2}Ln(2 + \cos x) + c$$

در صورت سؤال عنوان شده $f(\pi) = 4$، لذا داریم:

$$f(\pi) = -\frac{1}{2}Ln(2 + \cos\pi) + c \Rightarrow 4 = -\frac{1}{2}Ln(2 - 1) + c \Rightarrow c = 4$$

بنابراین ضابطه‌ی f به‌صورت روبرو است:

$$f(x) = -\frac{1}{2}Ln(2 + \cos x) + 4 \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}Ln(2 + \cos\frac{\pi}{2}) + 4 = -Ln(2)^{\frac{1}{2}} + 4 = -Ln\sqrt{2} + 4$$

توضیح: دقت کنید در قسمت (*) دانشجوی باهوش می‌توانست پاسخ تست را تعیین کند و وقت محاسبات اضافی را برای تست‌های دیگر ذخیره کند.
استدلال این است که $f'(x)$ در بازه $(0,\pi)$ صعودی است، پس قطعاً مقدار $f(\pi)$ از $f(\frac{\pi}{2})$ بیشتر است و این یعنی $f(\frac{\pi}{2})$ از ۴ کمتر است، در گزینه‌ها تنها گزینه‌ای که مقدارش از ۴ کمتر است، گزینه (۱) می‌باشد!

۴ـ گزینه «۲» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.
با توجه به این که مخرج کسرهای زیر انتگرال یکی است، بهتر است انتگرال‌ها را با هم جمع کنیم:

$$5I+3J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{5\cos x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{5\cos x+3\sin x}{\sin x+\cos x}$$

با توجه به وجود Ln در گزینه‌ها، ما باید به این فکر کنیم احتمالاً مشتق مخرج این کسر باید در صورت کسر ایجاد شود:

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(4\cos x+4\sin x)+(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4dx+[\mathrm{Ln}(\sin x+\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}}=[4x]_0^{\frac{\pi}{4}}+\mathrm{Ln}(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4})-\mathrm{Ln}(\sin 0+\cos 0)=\pi+\mathbf{Ln}\sqrt{2}$$

۵ـ گزینه «۳» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.
مشابه همین تست در سال ۱۳۸۳ برای رشته‌ی ریاضی مطرح شده بود. روش حل استفاده از بسط مک‌لورن تابع $\mathrm{Ln}(1+x)$ است:

$$\boxed{\mathbf{Ln(1+x)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}}$$

اگر در طرفین رابطه‌ی فوق $x=-\frac{1}{2}$ قرار دهیم، داریم:

$$\mathrm{Ln}(1-\frac{1}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-\frac{1}{2})^n}{n}\Rightarrow \mathrm{Ln}(\frac{1}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n2^n}\Rightarrow -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\mathrm{Ln}(\frac{1}{2})\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=-\mathrm{Ln}(\frac{1}{2})=\mathbf{Ln2}$$

۶ـ گزینه «۴» ابتدا باید بردار حاصل‌ضرب خارجی بردارهای هادی دو خط L_1 و L_2 را محاسبه کنیم.
بردار هادی خط $L_1:\frac{x+2}{2}=\frac{3-y}{1}=\frac{-z-3}{2}$ به‌صورت $\vec{v}_1=(2,-1,-2)$ و بردار هادی خط $L_2:\frac{x+1}{4}=\frac{2-y}{3}=\frac{-z}{5}$ به‌صورت $\vec{v}_2=(4,-3,-5)$ است،
بنابراین داریم:

$$\vec{u}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&-2\\4&-3&-5\end{vmatrix}=(-1,2,-2)$$

همچنین لازم است دو نقطه از خطوط L_1 و L_2 را داشته باشیم. با توجه به معادلات خطوط داده شده نقاط $A(-2,3,-3)$ و $B(-1,2,0)$ متعلق به خطوط L_1 و L_2 می‌باشند. بنابراین بردار واصل بین این دو نقطه از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AB}=(-1-(-2),2-3,0-(-3))=(1,-1,3)$$

فاصله بین دو خط متنافر L_1 و L_2 از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$d=\frac{|\vec{u}.\overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}|}=\frac{|(-1,2,-2).(1,-1,3)|}{|(-1,2,-2)|}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$$

۷ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم بردار گرادیان تابع f در نقطه $(0,0,0)$ به‌صورت زیر باشد:

$$\vec{\nabla}f\Big|_{(0,0,0)}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(0,0,0)}\vec{k}=k_1\vec{i}+k_2\vec{j}+k_3\vec{k}$$

با توجه به این که مشتقات سویی تابع f در مبدأ و در جهت بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داده شده است، می‌توان چنین نوشت:

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{2}=\frac{|\vec{\nabla}f|_{(0,0,0)}.\vec{a}|}{|\vec{a}|}=\frac{|(k_1,k_2,k_3).(1,-1,0)|}{\sqrt{2}}\Rightarrow\boxed{k_1-k_2=2}\\&\sqrt{3}=\frac{|\vec{\nabla}f|_{(0,0,0)}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{|(k_1,k_2,k_3).(1,1,1)|}{\sqrt{3}}\Rightarrow\boxed{k_1+k_2+k_3=3}\\&\sqrt{5}=\frac{|\vec{\nabla}f|_{(0,0,0)}.\vec{c}|}{|\vec{c}|}=\frac{|(k_1,k_2,k_3).(0,1,2)|}{\sqrt{5}}\Rightarrow\boxed{k_2+2k_3=5}\end{aligned}\right\}\Rightarrow k_1=1\ ,\ k_2=-1\ ,\ k_3=3$$

حداکثر افزایش تابع f در مبدأ همان اندازه گرادیان تابع f در مبدأ می‌باشد که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$|\vec{\nabla}f|_{(0,0,0)}|=|\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$$

۸ـ گزینه «۳»

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xy}\sin(kx)dxdy=\int_0^\infty[\int_0^\infty e^{-xy}\sin(kx)dx]dy$$

انتگرال داخلی را می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس حل نمود. در واقع انتگرال داخلی همان فرمول تبدیل لاپلاس تابع $\sin kx$ می‌باشد که به جای s مقدار y قرار داده شده است.

$$\int_0^\infty e^{-xy}\sin(kx)dx=L[\sin kx]=\frac{k}{s^2+k^2}\Big|_{s=y}=\frac{k}{y^2+k^2}$$

با جایگذاری جواب در انتگرال داخلی، خواهیم داشت:

$$I=\int_0^\infty\frac{k}{k^2+y^2}dy=(\mathrm{Arctg}\frac{y}{k})\Big|_0^\infty=\mathrm{Arctg}\infty-\mathrm{Arctg}\,0=\frac{\pi}{2}$$

تذکر: روش فوق بر اساس استفاده از معادلات دیفرانسیل ارائه شده، اگر قرار باشد اصرار بر استفاده از مطالب ریاضی (۲) باشد، با استفاده از نکته‌ی زیر می‌توانیم مقدار انتگرال را حساب کنیم:

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)+c$$

که در این مثال $\alpha=-y$ و $\beta=k$ باید در نظر گرفته شود.

۹ـ گزینه «۳» ابتدا فرض می‌کنیم فرمول کتاب را نمی‌دانیم و قرار است تست را کامل حل کنیم:

$$I=\int_C\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

انتگرال فوق را می‌توان به‌صورت انتگرال برداری $\int_C\vec{F}.d\vec{r}$ در نظر گرفت که در آن $\vec{F}$ به این صورت می‌باشد:

$$\vec{F}=\frac{x-y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x+y}{x^2+y^2}\vec{j}$$

$\vec{F}$ یک میدان پایستار (کامل) است زیرا با فرض $P=\frac{x-y}{x^2+y^2}$ و $Q=\frac{x+y}{x^2+y^2}$ داریم $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$. پس تابع پتانسیل آن را پیدا می‌کنیم.

تابع پتانسیل از فرمول $V=\int Pdx+\int Qdy$ به‌دست می‌آید، اما در عبارت Q جملاتی را که شامل x باشند در نظر نمی‌گیریم. پس کسر $Q=\frac{x+y}{x^2+y^2}$ به طور کلی حذف می‌شود، زیرا شامل متغیر x است.

$$V=\int\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\int(0)dy=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2+y^2)-\mathrm{Arctg}(\frac{x}{y})+c$$

اکنون می‌توانیم انتگرال روی مرز را مانند انتگرال معین با جایگذاری نقطه‌ی ابتدا و انتهای مرز c در تابع پتانسیل حساب کنیم:

$$I=V_{\text{انتها}}-V_{\text{ابتدا}}=V(0,2)-V(3,0)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}4-\mathrm{Arctg}(0)-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}9+\mathrm{Arctg}(\infty)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{4}{9}+\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(\frac{2}{3})^2+\frac{\pi}{2}=\mathrm{Ln}\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}$$

توضیح: تابع پتانسیل مربوط به $\vec{F}_1=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$ تابع $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2+y^2)=\mathrm{Ln}r$ است. همچنین تابع پتانسیل مربوط به $\vec{F}_2=(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$ همان $\theta=\mathrm{Arctg}(\frac{y}{x})$ است. در این مثال میدان برداری $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ را داریم. پس می‌توانیم بدون حل انتگرال بگوئیم: $V=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^2+y^2)+\mathrm{Arctg}(\frac{y}{x})+c$ و سپس با جایگذاری نقاط ابتدا و انتهای مسیر به جواب می‌رسیم.

البته تعجب نکنید که چرا در روش قبلی $-\mathrm{Arctg}(\frac{x}{y})$ به‌دست آمده و در این روش $\mathrm{Arctg}(\frac{y}{x})$ به وجود آمده است. زیرا $\mathrm{Arctg}(\frac{y}{x})=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctg}(\frac{x}{y})$ و $\frac{\pi}{2}$ هم جزء ثابت انتگرال است و در جواب انتگرال معین تأثیری نمی‌گذارد.

۱۰ـ گزینه «۲» فرض کنید S، سطح نیم‌کره‌ی بالایی باشد. S یک سطح بسته نیست؛ اما با اضافه کردن یک سطح مناسب می‌توان آن را به سطح بسته‌ای تبدیل کرد. از برخورد نیم‌کره با صفحه‌ی $z=0$، دایره‌ی $x^2+y^2=1$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین اگر فرض کنیم S' بخشی از صفحه‌ی $z=0$ باشد که درون دایره‌ی $x^2+y^2=1$ قرار دارد، در این‌صورت $S\cup S'$ یک سطح بسته است که ناحیه‌ی درون آن یعنی V یک نیم‌کره است. از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V \mathrm{div}\vec{F}dv=\iiint_V(0)dv=0$$

بنابراین داریم:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds=\iint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}ds-\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}ds=0-\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}ds$$

سطح S' بخشی از صفحه $z=0$ بوده و بردار قائم رو به خارج آن $\vec{n}=-\vec{k}$ است. (توجه کنید که بردار $\vec{k}$ رو به داخلِ نیم‌کره است و $-\vec{k}$ رو به خارج آن)

در نتیجه داریم $\vec{F}.\vec{n}ds=\vec{F}.(-\vec{k})ds=-e^{x^2+y^2}ds$. توجه کنید که طبق معادله‌ی $g:z=0$ داریم $ds=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=dA$، پس با استفاده از مختصات قطبی، درون دایره‌ی $x^2+y^2=1$ خواهیم داشت:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds=-\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}ds=-\iint_{S'}-e^{x^2+y^2}dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2}rdrd\theta=(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^1 re^{r^2}dr)=2\pi\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1=\pi(e-1)$$

سؤالات رشته‌ی مکانیک

۱ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $Ln(1+t)>\frac{2t}{t+2}$، به ازای $t>0$

۲) $Ln(1+t)<\frac{2t}{t+2}$، به ازای $t>-1$

۳) $Ln(1+t)<\frac{2t}{t+2}$، به ازای $t>0$

۴) $Ln(1+t)>\frac{2t}{t+2}$، به ازای $t>-1$

۲ـ بین دو ریشه متوالی از مشتق تابع چندجمله‌ای $p(x)$ ....

۱) ریشه‌ای از $p(x)$ وجود ندارد.

۲) حداقل یک ریشه از $p(x)$ وجود دارد.

۳) حداکثر یک ریشه از $p(x)$ وجود دارد.

۴) حتماً یک ریشه از $p(x)$ وجود دارد.

۳ـ اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f(x)}=1$ و $\lim\limits_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g(x)}=1$ (a می‌تواند $+\infty$ یا $-\infty$ هم باشد)، آن‌گاه گوئیم:

$$\begin{cases} f_1 \approx f(x\to a) \text{ هم ارز با } f \text{ است وقتی } (x\to a)\\ g_1 \approx g(x\to a) \text{ هم ارز با } g \text{ است وقتی } (x\to a)\end{cases}$$

در این صورت، کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $\frac{f_1}{g_1}\approx\frac{f}{g}(x\to a)$

۲) $(f_1+g_1)\approx(f+g)(x\to a)$

۳) $(f_1-g_1)\approx(f-g)(x\to a)$

۴) $e^{f_1}\approx e^{f}(x\to a)$

۴ـ مقدار انتگرال $\int_0^1\frac{Ln(1+x)}{x}dx$ برابر است با:

(در صورت نیاز از تساوی‌های: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ می‌توانید استفاده کنید.)

۱) $\frac{\pi^2}{12}$

۲) $\frac{\pi^2}{8}$

۳) $\frac{\pi^2}{6}$

۴) انتگرال وجود دارد ولیکن قابل محاسبه نمی‌باشد.

۵ـ کدام‌یک از گزاره‌های زیر در مورد تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+(x+y)^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ نادرست است؟

۱) مشتق جهتی f در $(0,0)$ در امتداد بردار یکه (u_1,u_2) برابر است با $\frac{u_1^3}{1+2u_1u_2+u_1^2}$

۲) تابع f در $(0,0)$ پیوسته است.

۳) تابع f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۴) مشتق جهتی تابع f در $(0,0)$ در امتداد بردار یکه (u_1,u_2) از صفحه برابر $\frac{u_1}{2}$ است.

۶ـ اگر c خم فصل مشترک رویه‌های $z=x^2+y^2$ و $x^2+y^2=1+\frac{z^2}{4}$ باشد (پیموده شده در جهت مثبت)، آن‌گاه بردارهای یکه $\vec{T}$، $\vec{N}$، $\vec{B}$ و انحناء (خمیدگی) κ (به ترتیب از چپ به راست) کدام هستند؟

۱) $(-\sin t,\cos t,0)\ ,\ (-\cos t,-\sin t,0)\ ,\ (1,1,0)\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲) $(-\sin t,\cos t,0)\ ,\ (-\cos t,-\sin t,0)\ ,\ (0,0,1)\ ,\ \sqrt{2}$

۳) $(\cos t,\sin t,0)\ ,\ (-\sin t,\cos t,0)\ ,\ (0,0,1)\ ,\ \sqrt{2}$

۴) $(-\sin t,\cos t,0)\ ,\ (-\cos t,-\sin t,0)\ ,\ (0,0,1)\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

۷ـ اگر $xyz^2=x^2+y^2$، متغیر z را به عنوان تابعی از متغیرهای x و y در نزدیکی نقطه‌ی $(1,1,\sqrt{2})$ به ما بدهد، آن‌گاه مقدار $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1,\sqrt{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۳) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

۴) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

۸ـ نزدیک‌ترین نقطه رویه $z=xy+1$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $(0,0,1)$

۲) $(1,0,1)$

۳) $(0,1,1)$

۴) وجود ندارد.

۹ـ مقدار انتگرال دوگانه $\int_0^1 [\int_\beta^{\beta+1} \frac{1}{x} dx] d\beta$ کدام است؟

۱) $Ln2$
۲) $2Ln2$
۳) $3Ln2$
۴) واگراست (تبدیل به یک انتگرال یگانه ناسره واگرا می‌شود.)

۱۰ـ تابع f روی ناحیه بسته و کراندار D پیوسته و S مساحت ناحیه D می‌باشد. در این صورت:

۱) به ازای هر نقطه P از D: $\iint_D f(x,y)dA \neq f(P).S$
۲) یک نقطه P از D وجود دارد به طوری که: $\iint_D f(x,y)dA = f(P).S$
۳) به ازای هر نقطه P از D: $\iint_D f(x,y)dA \leq f(P).S$
۴) به ازای هر نقطه P از D: $\iint_D f(x,y)dA \geq f(P).S$

پاسخنامه رشته‌ی مکانیک

۱ـ گزینه «۱» با فرض $f(t) = \frac{2t}{2+t} - Ln(1+t)$، داریم:

$$f'(t) = \frac{2(2+t) - 1(2t)}{(t+2)^2} - \frac{1}{t+1} = \frac{4}{(t+2)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{4(1+t) - (t+2)^2}{(t+2)^2(1+t)} = \frac{4+4t-t^2-4-4t}{(t+2)^2(1+t)} = \frac{-t^2}{(t+2)^2(1+t)}$$

با توجه به شرط $t > 0$ و با وجود $-t^2$ در صورت کسر، $f'(t)$ همواره منفی و لذا f اکیداً نزولی است، از طرفی داریم $f(t) < f(0)$ و چون $f(0) = 0$، پس داریم:

$$f(t) < 0 \Rightarrow \frac{2t}{2+t} - Ln(1+t) < 0 \Rightarrow \mathbf{\frac{2t}{2+t} < Ln(1+t)}$$

روش تستی: این تست به راحتی به روش ذهنی حل می‌شود؛ فرض کنید $t = 2$، در نتیجه $Ln3 > 1$، لذا گزینه‌های (۳) و (۲) غلط هستند. از طرفی به ازای $t = 0$ برای گزینه (۴) به نامساوی $0 > 0$ می‌رسیم که غلط است، پس فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

۲ـ گزینه «۳» طبق قضیه‌ی رُل اگر $P(a) = 0$ و $P(b) = 0$، آن‌گاه بین دو نقطه‌ی a و b نقطه‌ای مانند c وجود دارد که $P'(c) = 0$ باشد. حالا فرض کنید c_1 و c_2 دو ریشه‌ی متوالی $P'(x)$ باشند. این به آن معنی است که در فاصله‌ی بین c_1 و c_2، $P'(x)$ دیگر ریشه‌ای ندارد. نشان می‌دهیم $P(x)$ در این فاصله حداکثر یک ریشه دارد. اگر در این بازه، $P(x)$ دو ریشه مانند x_1 و x_2 داشته باشد، یعنی $P(x_1) = 0$ و $P(x_2) = 0$. در این صورت طبق قضیه رُل، $P'(x)$ ریشه‌ای بین x_1 و x_2 خواهد داشت و این با فرض متوالی بودن ریشه‌های مشتق $P(x)$ تناقض دارد.

نکته: اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، بین هر n ریشه متوالی f' تابع f حداکثر $n-1$ ریشه دارد.

۳ـ گزینه «۱» بر طبق رابطه‌ی هم‌ارزی داریم:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{f_1}{g_1}}{\frac{f}{g}}\right) = \lim_{x\to a}\frac{f_1 g}{g_1 f} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f_1}{f}.\frac{g}{g_1}\right) = 1\times 1 = 1$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است. جواب به تست همین‌جا تمام است اما برای توضیح بیشتر با مثال‌های نقض نادرستی گزینه‌های دیگر را نشان می‌دهیم:

بررسی گزینه (۲):

$$\begin{cases} \underbrace{x}_{f_1} \sim \underbrace{tgx}_{f} \\ \underbrace{-\sin x}_{g_1} \sim \underbrace{-x}_{g} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{f_1+g_1}{f+g}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{tgx - x}\right) = \frac{\frac{x^3}{6}}{\frac{x^3}{3}} = \frac{1}{2} \neq 1$$

بررسی گزینه (۳):

$$\begin{cases} \underbrace{x}_{f_1} \sim \underbrace{tgx}_{f} \\ \underbrace{(\sin x)}_{g_1} \sim \underbrace{x}_{g} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{f_1-g_1}{f-g}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{tgx - x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x^3}{6}}{\frac{x^3}{3}}\right) = \frac{1}{2} \neq 1$$

بررسی گزینه (۴):

$$\begin{cases} \underbrace{x^2+2x}_{f} \sim \underbrace{x^2}_{f_1} \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^f}{e^{f_1}} = \lim_{x\to+\infty}(e^{f-f_1}) = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2+2x-x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = e^{+\infty} \neq 1 \end{cases}$$

۴ـ گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

دقت کنید با توجه به محدوده‌ی تغییرات x در بازه‌ی ۰ تا ۱ به راحتی معلوم است که $|x|<1$ و بنابراین می‌توانیم از بسط مک‌لورن تابع $Ln(1+x)$ استفاده کنیم:

$$Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\cdots \Rightarrow \frac{1}{x}Ln(1+x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+-\cdots$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر است با:

$$\int_0^1\frac{1}{x}Ln(1+x)dx=\int_0^1(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+-\cdots)=[x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^4}{16}+-\cdots]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+-\cdots=(1+\frac{1}{9}+\cdots)-(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots)$$

با توجه به‌صورت سؤال تساوی‌های مقابل را داریم:

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\quad,\quad A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

سری B در واقع جملات توان فرد A را به ما می‌دهد، بنابراین جملات توان زوج A برابر با $A-B$ می‌باشد، لذا داریم:

$$\Rightarrow I=B-(A-B)=2B-A=2\times\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{3\pi^2-2\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{12}$$

۵ـ گزینه «۴» ابتدا گزینه‌های (۱) و (۴) را بررسی می‌کنیم. طبق تعریف، مشتق سوئی تابع f در نقطه $(0,0)$ در امتداد بردار یکه $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ برابر با مقدار زیر است:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+hu_1,0+hu_2)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{h^3u_1^3}{h^2u_1^2+(hu_1+hu_2)^2}}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h^3u_1^3}{h^3[u_1^2+(u_1+u_2)^2]}=\frac{u_1^3}{u_1^2+u_1^2+u_2^2+2u_1u_2}=\frac{u_1^3}{1+2u_1u_2+u_1^2}$$

دقت کنید که بردار u یکه است، پس در مخرج کسر به جای $u_1^2+u_2^2$ مقدار مساوی آن یعنی عدد ۱ را قرار دادیم. تا اینجا دیدیم که گزینه‌ی (۴) نادرست و گزینه‌ی (۱) درست است.

اکنون سایر گزینه‌ها را هم بررسی می‌کنیم. مشتق‌پذیر نبودن تابع f را می‌توانیم با توجه به درجه‌ی جملات صورت و مخرج تشخیص دهیم. وقتی اختلاف درجه‌ی صورت و مخرج فقط یک درجه باشد (یعنی ۱ = درجه مخرج − درجه صورت) و در مبدأ حالت $\frac{0}{0}$ رخ دهد، آن‌گاه f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست. (البته با استفاده از تعریف $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ هم می‌توانیم این موضوع را بررسی کنیم.) برای اثبات پیوسته بودن f در مبدأ نیز دقت کنید که همه‌ی جملات مخرج درجه‌ی ۲ و جملات صورت درجه‌ی ۳ هستند و مخرج فقط در $(0,0)$ صفر می‌شود، پس $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ است یعنی f در مبدأ پیوسته است (راه دیگر برای نشان دادن این حد، استفاده از فرم قطبی است).

۶ـ گزینه «۴» تفاوت این تست با سایر مسائل فقط این است که ضابطه‌ی منحنی C به طور روشن بیان نشده و باید آن را بیابیم، اگر دستگاه معادلات زیر را حل کنیم، داریم:

$$C:\begin{cases}z=x^2+y^2\\ \frac{1}{4}z^2=x^2+y^2-1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{4}z^2+1=z\Rightarrow z^2-4z+4=0\Rightarrow(z-2)^2=0\Rightarrow z=2$$

بنابراین $x^2+y^2=2$ که معادله‌ی یک دایره به شعاع $\sqrt{2}$ می‌باشد و معادله‌ی پارامتری آن را می‌توان به‌صورت $x=\sqrt{2}\cos t$ و $y=\sqrt{2}\sin t$ نوشت، لذا معادله‌ی منحنی C به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{R}(t)=(\sqrt{2}\cos t)\vec{i}+(\sqrt{2}\sin t)\vec{j}+2\vec{k}\Rightarrow\vec{R}'(t)=(-\sqrt{2}\sin t)\vec{i}+(\sqrt{2}\cos t)\vec{j}\Rightarrow\vec{R}''(t)=-(\sqrt{2}\cos t)\vec{i}-(\sqrt{2}\sin t)\vec{j}$$

از طرفی اندازه بردار $\vec{R}'(t)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|\vec{R}'(t)|=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin t)^2+(\sqrt{2}\cos t)^2+0}=\sqrt{2}$$

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}=\frac{-\sqrt{2}\sin t\vec{i}+\sqrt{2}\cos t\vec{j}+0\times\vec{k}}{\sqrt{2}}=(-\sin t)\vec{i}+(\cos t)\vec{j}=\mathbf{(-\sin t,\cos t,0)}$$

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}=\frac{(-\cos t)\vec{i}+(-\sin t)\vec{j}}{\sqrt{\sin^2t+\cos^2t}}=\mathbf{(-\cos t,-\sin t,0)}$$

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\sin t & \cos t & 0\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}=(0-0)\vec{i}-(0-0)\vec{j}+(\sin^2 t+\cos^2 t)\vec{k}=(0,0,1)$$

$$\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\sqrt{2}\sin t & \sqrt{2}\cos t & 0\\ -\sqrt{2}\cos t & -\sqrt{2}\sin t & 0\end{vmatrix}=(2\sin^2 t+2\cos^2 t)\vec{k}=2\vec{k}\Rightarrow|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|=2$$

$$\kappa=\frac{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^3}=\frac{2}{(\sqrt{2})^3}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تذکر: می‌توانستیم قبل از $\vec{B}$، ابتدا κ را حساب کنیم، بعد از به‌دست آوردن κ به راحتی معلوم بود گزینه (۴) جواب است. چون گزینه‌های (۱) و (۴) این شرایط را دارند ($\vec{T}$، κ و $\vec{N}$ آن‌ها یکسان است)، اما در گزینه (۱) بردار $\vec{B}$ **یکه** برابر $\sqrt{2}$ داده شده است که می‌دانیم باید اندازه‌ی بردار **یکه** برابر $\underline{\underline{1}}$ شود و لذا گزینه (۱) غلط است.

روش تستی: اگر معادلات داده شده را برخورد دهیم به تساوی $\frac{1}{4}z^2=z-1$ می‌رسیم که تنها جواب آن $z=2$ است. به عبارتی داریم:

$$C:\begin{cases}x^2+y^2=2\\ z=2\end{cases}$$

پس C یک دایره به شعاع $R=\sqrt{2}$ است که در ارتفاع $z=2$ قرار دارد. می‌دانیم که انحنای دایره، عکس شعاع آن است، پس $\kappa=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. بنابراین گزینه‌های (۱) یا (۴) صحیح هستند. از طرفی C در صفحه‌ی $z=2$ قرار دارد که یک صفحه‌ی افقی است و بردار $\vec{k}$ به آن عمود است، پس بردار عمود بر منحنی C باید $B=\vec{k}=(0,0,1)$ باشد. در نتیجه گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۷ـ گزینه «۳» ابتدا عبارت را به‌صورت مقابل تفکیک می‌کنیم:

$$z^2=\frac{x^2+y^2}{xy}\Rightarrow z^2=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

حالا از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$2z(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=[\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}]\frac{1}{2z}$$

اگر از طرفین این رابطه نسبت به y مشتق بگیریم، داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}]\times\frac{1}{2z}+[\frac{-2\frac{\partial z}{\partial y}}{(2z)^2}][\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}]$$

با قرار دادن $x=y=1$ و $z=\sqrt{2}$ داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1,\sqrt{2})=(-1-1)(\frac{1}{2\sqrt{2}})+0=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۸ـ گزینه «۱» می‌دانیم فاصله‌ی هر نقطه تا مبدأ برابر با جذر $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ می‌باشد:

$$z=xy+1\Rightarrow f=x^2+y^2+(xy+1)^2=(x+y)^2+x^2y^2+1$$

به وضوح مشخص است که کمترین مقدار این تابع در $x=y=0$ به‌دست می‌آید و در این نقطه $z=1$ است.

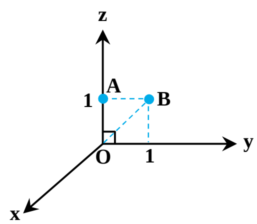
روش استفاده از ضرایب لاگرانژ: در این مثال با تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ و قید $g(x,y,z)=z-xy=1$ روبرو هستیم. از روش لاگرانژ به این صورت استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z}\Rightarrow\frac{2x}{-y}=\frac{2y}{-x}=\frac{2z}{1}\\ g:z-xy=1\end{cases}$$

با طرفین وسطین داریم: $-2x^2=-2y^2$ و $2x=-2yz$ پس $y=\pm x$ و $x=-yz$.

اگر $y=x$ باشد داریم $x=-xz$، پس $z=-1$. اگر $y=-x$ باشد داریم $x=xz$، پس $z=1$.

در حالت اول با جایگذاری $y=x$ و $z=-1$ در قید g داریم: $-1-x^2=1$، پس $x^2=-2$ که غیرممکن است. در حالت دوم با جایگذاری $y=-x$ و $z=1$ در قید g داریم: $1+x^2=1$، پس $x=0$. یعنی $x=y=0$ و $z=1$ تنها نقطه‌ی بحرانی f است. فاصله‌ی نقطه‌ی $(0,0,1)$ از مبدأ برابر است با یک.



روش ذهنی: اولاً همه‌ی نقاط داده شده در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) روی رویه‌ی $z = xy + ۱$ قرار دارند. حالا فاصله‌ی آن‌ها تا مبدأ را حساب می‌کنیم. در گزینه‌ی (۱) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۰,۰,۱)$ از مبدأ به وضوح برابر با ۱ است. اما در سایر گزینه‌ها فاصله‌ی نقاط از مبدأ برابر با $\sqrt{۲}$ است. پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

[البته چون گزینه‌ی (۴) می‌گوید کمترین فاصله از مبدأ وجود ندارد؛ استفاده از این روش با کمی ریسک همراه است.]

۹ـ گزینه «۲» یک انتگرال دوگانه ساده که به راحتی پاسخ داده می‌شود.

$$\int_{۰}^{۱}[\int_{\beta}^{\beta+۱}\frac{۱}{x}dx]d\beta = \int_{۰}^{۱}[Lnx\Big|_{\beta}^{\beta+۱}]d\beta = \int_{۰}^{۱}[Ln(\beta+۱) - Ln\beta]d\beta = \int_{۰}^{۱}Ln(\beta+۱)d\beta - \int_{۰}^{۱}Ln\beta d\beta$$

$$[(\beta+۱)Ln(\beta+۱)-\beta]_{۰}^{۱} - [(\beta Ln\beta - \beta)]_{۰}^{۱} = ۲Ln۲ - ۰ - (۰ - ۰) = ۲Ln۲$$

توجه کنید که وقتی در تابع $\beta Ln\beta$ کران پایین را قرار می‌دهیم فرم $۰\times(-\infty)$ به وجود می‌آید زیرا $Ln(۰^{+}) = -\infty$ است. با این حال هوپیتال نشان می‌دهد مقدار حد برابر است با صفر:

$$\lim_{\beta\to۰^{+}}\beta Ln\beta = \lim_{\beta\to۰^{+}}\frac{Ln\beta}{\frac{۱}{\beta}} = \frac{-\infty}{\infty} \overset{\text{هوپیتال}}{=\!=\!=} \lim_{\beta\to۰^{+}}\frac{\frac{۱}{\beta}}{-\frac{۱}{\beta^{۲}}} = \lim_{\beta\to۰^{+}}\frac{-\beta}{۱} = ۰$$

۱۰ـ گزینه «۲» انتگرال موردنظر حجم ناحیه قائم بین رویه‌ی f و سطح D می‌باشد که طبق قضیه مقدار میانگین در انتگرال روی سطوح، به دلیل کراندار بودن سطح D و پیوسته بودن f روی D، یک نقطه درون D وجود دارد که انتگرال موردنظر برابر است با حاصل‌ضرب مقدار تابع در آن نقطه در مساحت سطح D.

سؤالات رشته‌ی ریاضی

۱ـ هرگاه $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x\,\text{sgn}\,|\sin(n!\pi x)|$ که sgn تابع علامت است، آن‌گاه ضابطه f کدام است؟

۱) $f(x)=0$ ۲) $f(x)=x$ ۳) $f(x)=\begin{cases} x & ;\ x\in\mathbb{Q} \\ 0 & ;\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases} 0 & ;\ x\in\mathbb{Q} \\ x & ;\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

۲ـ فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد و برای هر $x,y\in\mathbb{R}$، f در رابطه $|f(x)-f(y)|\geq\frac{1}{2}|x-y|$ صدق کند. آن‌گاه تابع f:

۱) یک به یک و پوشاست. ۲) یک به یک است و پوشا نیست. ۳) یک به یک نیست و پوشاست. ۴) نه یک به یک است و نه پوشا.

۳ـ اگر $f:(a,b)\to[c,d]$ مشتق‌پذیر و پوشا باشد، آن‌گاه کدام گزینه لزوماً درست است؟

۱) f' حداکثر یک ریشه دارد. ۲) f' حداقل دو ریشه دارد. ۳) f' ریشه ندارد. ۴) f' دقیقاً دو ریشه دارد.

۴ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{3n}}\right]$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

۵ـ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{(n^2)}}{((4n)!)^n}$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) 1 ۴) $+\infty$

۶ـ فرض کنید $p>1$ و $\alpha=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$، در این صورت مقدار سری $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^p}$ برابر است با:

۱) $\alpha 2^{-p}$ ۲) $\alpha 2^{p}$ ۳) $\alpha(1-2^{-p})$ ۴) $\alpha(1+2^{p})$

۷ـ مجموع سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3^n)}$ برابر است با:

۱) $\text{Ln}(\frac{2}{3})$ ۲) $\text{Ln}(\frac{3}{2})$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۸ـ فرض کنید f و g بر $\mathbb{R}$ با ضابطه‌های $g(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}dt$ و $f(x)=(\int_0^x e^{-t^2}dt)^2$ تعریف شوند، در این‌صورت به ازای هر $x\in\mathbb{R}$:

۱) $f'(x)=0$ ۲) $f(x)-g(x)=\frac{\pi}{4}$ ۳) $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$ ۴) $f'(x)+g'(x)=\frac{\pi}{4}$

۹ـ سطح محصور توسط دو منحنی $y=\pm\text{Ln}x$ و خط $x=e$ را حول محور yها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از دوران برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$ ۲) $\frac{\pi}{2}(e^2+1)$ ۳) $\pi(e^2-1)$ ۴) $\pi(e^2+1)$

۱۰ـ برای هر $x\geq 0$ فرض کنید $f(x)=\int_0^x\frac{dt}{(1+t^3)^{\frac{1}{2}}}$ و g معکوس تابع f باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $g''=-\frac{3}{2}g^2$ ۲) $g''=\frac{3}{2}g^2$ ۳) $g''=\frac{3g^2}{(1+g)^{\frac{1}{2}}}$ ۴) $g''=\frac{-3g^2}{(1+g^2)^{\frac{1}{2}}}$

۱۱ـ اگر $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\sin x\cos x}{x}dx$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) π

۱۲ـ هرگاه $z=x^2+y^2+\text{arctg}\frac{x^3+y^3}{x-y}$، آن‌گاه $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با:

۱) $2(x^2+y^2)+\frac{2(x^3+y^3)}{x-y}$ ۲) $2(x^2+y^2)+\sin(2(x^2+y^2))$

۳) $2(x^2+y^2)+\text{arctg}\frac{x^3+y^3}{x-y}$ ۴) $2(x^2+y^2)+\sin(2\,\text{arctg}\frac{x^3+y^3}{x-y})$

۱۳ــ ماکسیمم و مینیمم مقادیر تابع f با معادله $f(x,y)=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ و با قید $\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{y^۲}=۱$ کدام است؟

۱) $\min f=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ، $\max f=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
۲) $\min f=-\sqrt{۲}$ ، $\max f=۲$
۳) $\min f=-\sqrt{۲}$ ، $\max f=\sqrt{۲}$
۴) $\min f=-۱$ ، $\max f=+۱$

۱۴ــ هرگاه $w(\alpha,\beta)$ مختصات مرکز انحنا منحنی مسطح (c) در نقطه p باشد و ϕ زاویه خط مماس در نقطه p با جهت مثبت محور x ها باشد، کدام‌یک از روابط زیر درست است؟

۱) $\frac{d\beta}{d\alpha}=\operatorname{tg}\phi$
۲) $\frac{d\beta}{d\alpha}=\cot g\,\phi$
۳) $\frac{d\beta}{d\alpha}=-\cot g\,\phi$
۴) $\frac{d\beta}{d\alpha}=-\operatorname{tg}\phi$

۱۵ــ منحنی با نمایش $r=a(۱-\cos\theta)$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه فاصله مبدا تا خط مماس در نقطه دلخواه p روی منحنی را با q نشان دهیم و فاصله مبدا تا نقطه p را با r نمایش دهیم، رابطه مستقل از θ بین q و r کدام است؟

۱) $r^۳q^۳=۲a$
۲) $q^۲r^۳=۲a$
۳) $r^۳=۲aq^۲$
۴) $q^۳=۲ar^۲$

۱۶ــ مقدار $\int_۰^۱\int_y^۱ x^{-\frac{۳}{۲}}\cos(\frac{\pi y}{۲x})dxdy$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$
۲) $\frac{۴}{\pi}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۱۷ــ مقدار انتگرال $\iiint_D \frac{x^۲+۲y^۲}{x^۲+۴y^۲+z^۲}dxdydz$ که D ناحیه $x^۲+y^۲+z^۲\le ۱$ است، کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۹}$
۲) $\frac{۴\pi}{۹}$
۳) $\frac{۲\pi}{۳}$
۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

۱۸ــ انتگرال سطح $\iint_S \vec{F}.d\vec{s}$ کدام است؟ که در آن $\vec{F}=x^۳\vec{i}+y^۳\vec{j}+z^۳\vec{k}$ و سطح S کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است.

۱) $\frac{\pi}{۵}$
۲) $\frac{۳\pi}{۵}$
۳) $\frac{۶\pi}{۵}$
۴) $\frac{۱۲\pi}{۵}$

۱۹ــ مقدار انتگرال منحنی‌الخط $\vec{F}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$ روی منحنی فصل مشترک کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۲$ و سهمی‌گون $z=x^۲+y^۲$ در جهت مثبت کدام است؟

۱) -۲π
۲) $-\pi$
۳) π
۴) ۲π

۲۰ــ شار گذرنده بیرونی میدان $\vec{F}(x,y,z)=(e^{y^۲+z^۲},e^{z^۲+x^۲},e^{x^۲+y^۲})$ از سطح نیم‌کره بالایی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ چقدر است؟

۱) $\pi(۱-e)$
۲) $\pi(e-۱)$
۳) $\frac{\pi}{۲}(e-۱)$
۴) $\frac{\pi}{۲}(۱-e)$

پاسخنامه رشته‌ی ریاضی

۱ــ گزینه «۴» در این حد، x ثابت است و n به سمت ∞ میل می‌کند. اگر $x\in\mathbb{Q}$ باشد، در آن صورت می‌توان x را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح و ثابت p و q نوشت:

$$x\in\mathbb{Q}\Rightarrow x=\frac{p}{q}\qquad (p,q\in\mathbb{Z})$$

بدیهی است که با بزرگتر شدن n حاصل $n!x$ عددی صحیح خواهد بود، زیرا وقتی $n\ge q$ باشد، $n!$ مضرب q خواهد بود. پس $\sin(n!x\pi)=\sin(k\pi)=۰$ می‌شود و داریم:

$$x\in\mathbb{Q}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x\operatorname{sgn}|\sin(n!\pi x)|=\lim_{k\to\infty} x\operatorname{sgn}|\sin k\pi|=۰$$

اما اگر $x\notin\mathbb{Q}$، آن‌گاه به ازای هر n، عدد $n!x$ ناصحیح می‌شود و بنابراین $|\sin(n!\pi x)|$ مقداری غیرصفر ولی مثبت است که واضح است که sgn آن برابر یک است. لذا داریم:

$$x\notin\mathbb{Q}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\operatorname{sgn}|\sin(n!\pi x)|=۱\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x\operatorname{sgn}|\sin(n!\pi x)|=x$$

۲ـ گزینه «۱» اگر $f(x)=f(y)$، آن‌گاه داریم:

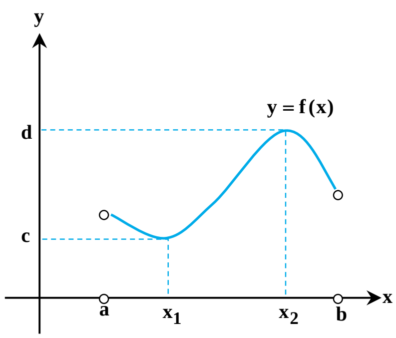
$$f(x)=f(y)\Rightarrow \frac{۱}{۲}|x-y|\le ۰\Rightarrow |x-y|=۰\Rightarrow x=y$$

بنابراین تابع f یک به یک است. از طرفین رابطه داده شده حد می‌گیریم، y را ثابت فرض می‌کنیم و x را به ∞ میل می‌دهیم. در این صورت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)-f(y)|\ge \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{۲}|x-y|=\infty$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود که $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|f(x)-f(y)|=\infty$. در این حد، y ثابت است و f در همه نقاط پیوسته است؛ بنابراین $f(y)$ محدود است و لذا $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|f(x)|=\infty$.

از طرفی $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ نمی‌توانند با هم برابر باشد، یعنی یکی از این حدود برابر $+\infty$ و دیگری باید $-\infty$ باشد (زیرا اگر دو حد با هم برابر باشند با یک به یک بودن تابع تناقض دارد)، پس طبق قضیه مقدار میانی تابع f پوشاست.



۳ـ گزینه «۲» با توجه به محدوده برد تابع می‌توان نتیجه گرفت که مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع به ترتیب برابر d و c می‌باشد. بنابراین تابع f حداقل دو نقطه بحرانی خواهد داشت. از طرفی دامنه تعریف تابع شامل نقاط ابتدایی و انتهایی بازه (یعنی $x=a$ و $x=b$) نمی‌باشد. بنابراین، نقاط بحرانی در داخل بازه (a,b) خواهد بود و به دلیل مشتق‌پذیر بودن تابع در این بازه لازم است که در نقاط بحرانی $f'(x)=۰$ باشد. بنابراین تابع $f'(x)$ در بازه (a,b) حداقل ۲ ریشه خواهد داشت.

برای توضیح کامل‌تر به شکل مقابل توجه کنید. چون برد تابع f بازه‌ی بسته‌ی $[c,d]$ است، پس نقاط $x_۱$ و $x_۲$ در دامنه‌ی f وجود دارند که $f(x_۱)=c$ و $f(x_۲)=d$. با توجه به آن که دامنه‌ی f بازه‌ی باز (a,b) است، پس $x_۱$ و $x_۲$ نمی‌توانند لبه‌های دامنه باشند. در نتیجه $f(x)$ در $x_۱$ و $x_۲$ به کمترین و بیشترین مقدارش می‌رسد و در این دو نقطه باید $f'(x)=۰$ باشد.

۴ـ گزینه «۴» سعی می‌کنیم حد داده شده را به‌صورت $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum\limits_{i=۱}^{n}f(\frac{i}{n})$ درآوریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{۲n+i}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{n}\sqrt{۲+\frac{i}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲+\frac{i}{n}}}$$

به جای $\frac{i}{n}$، مقدار x را قرار می‌دهیم و $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲+x}}$. در نتیجه داریم:

$$\text{مقدار حد}=\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{۲+x}}=\int_{۰}^{۱}(۲+x)^{\frac{-۱}{۲}}dx=[۲(۲+x)^{\frac{۱}{۲}}]_{۰}^{۱}=۲(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

۵ـ گزینه «۱» با استفاده از هم ارزی استرلینگ می‌توانیم به این سؤال جواب دهیم:

$$\boxed{(n\to\infty)\ ;\ n!\sim(\frac{n}{e})^{n}\sqrt{۲n\pi}}$$

$$(۴n)!\sim(\frac{۴n}{e})^{۴n}\sqrt{۸n\pi}\Rightarrow((۴n)!)^{n}\sim(\frac{۴n}{e})^{۴n^{۲}}(۸n\pi)^{\frac{n}{۲}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n^{۲}}}{((۴n)!)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n^{۲}}}{(\frac{۴n}{e})^{۴n^{۲}}(۸n\pi)^{\frac{n}{۲}}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{e}{۴})^{۴n^{۲}}\frac{۱}{n^{۴n^{۲}}\times n^{-n^{۲}}(۸n\pi)^{\frac{n}{۲}}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{e}{۴})^{۴n^{۲}}(\frac{۱}{n^{۳n^{۲}}(۸\pi n)^{\frac{n}{۲}}})$$

دقت کنید $\frac{e}{۴}$ عددی کوچکتر از یک است و بنابراین حاصل حد $(\frac{e}{۴})^{۴n^{۲}}$ وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، برابر صفر می‌شود و چون حاصل حد کسر دوم نیز صفر است، حاصل کلی حد برابر صفر می‌شود (مخرج کسر به بی‌نهایت میل می‌کند و $\frac{۱}{\infty}=۰$ می‌شود).

۶ـ گزینه «۳» با جدا کردن جملات زوج و فرد سری خواهیم داشت:

$$\alpha=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{p}}=\sum_{n\ \text{های زوج}}\frac{۱}{n^{p}}+\sum_{n\ \text{های فرد}}\frac{۱}{n^{p}}=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲k)^{p}}+\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲k-۱)^{p}}\qquad(۱)$$

از طرفی داریم:

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲k)^{p}}=\frac{۱}{۲^{p}}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^{p}}=\frac{۱}{۲^{p}}\alpha$$

پس با جایگذاری این نتیجه در تساوی (۱) داریم:

$$\xrightarrow{(۱)}\alpha=\frac{۱}{۲^{p}}\alpha+\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲k-۱)^{p}}\to\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲k-۱)^{p}}=\alpha(۱-۲^{-p})$$

۷ـ گزینه «۲» با استفاده از بسط مک‌لورن $Ln(1+x)$ به تست پاسخ می‌دهیم:

$$Ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\xrightarrow{x=-\frac{1}{3}}$$

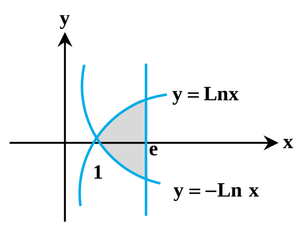
$$Ln(1-\frac{1}{3})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)(-\frac{1}{3})^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}\Rightarrow Ln(\frac{2}{3})=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}=-Ln(\frac{2}{3})=Ln(\frac{3}{2})$$

۸ـ گزینه «۳» ابتدا $f'(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=2(\int_0^x e^{-t^2}dt)(e^{-x^2})$$

واضح است $f'(x)$ مساوی صفر نمی‌باشد زیرا e^{-x^2} و e^{-t^2} همواره مثبت هستند و این یعنی گزینه (۱) غلط است. اگر توجه کنید خواهید دید که $f(0)=0$ و $g(0)=\frac{\pi}{4}$ لذا اگر در گزینه (۲) قرار دهیم $x=0$، آن‌گاه $\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$ می‌گردد که غلط است، پس گزینه (۲) هم غلط است. توبع f و g هر دو تابع‌هایی زوج می‌باشند، پس f',g' هر دو فردند و لذا $f'+g'$ تابعی فرد است. حال اگر تابعی فرد بخواهد مقداری ثابت باشد باید صفر باشد، پس گزینه (۴) هم غلط است و تنها گزینه (۳) باقی می‌ماند.

۹ـ گزینه «۴» به علت تقارن این ناحیه نسبت به محور x ها می‌توانیم حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y=Lnx$، خط $x=e$ و محور x ها (حول محور y ها) را محاسبه کرده و آن را در ۲ ضرب کنیم:



$$V=2\left[\int_1^e 2\pi x f(x)dx\right]=2\left[\int_1^e 2\pi x Lnx\,dx\right]$$

با استفاده از روش جزء به جزء خواهیم داشت:

$$V=4\pi\left[\frac{x^2}{2}Lnx-\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\pi(e^2+1)$$

توجه: به خاطر سپردن این فرمول می‌تواند به سرعت عمل شما کمک کند:

$$\int x^n Lnxdx=\frac{x^{n+1}}{n+1}(Lnx-\frac{1}{n+1})+c$$

۱۰ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه g معکوس تابع f است، خواهیم داشت:

$$g(f(x))=x\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}}f'(x)g'(f(x))=1\Rightarrow g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$$

با مشتق‌گیری از انتگرال معلوم است که $f'(x)=\frac{1}{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}}$. بنابراین داریم:

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}=(1+x^3)^{\frac{1}{2}}$$

با مشتق‌گیری دوباره داریم:

$$f'(x)g''(f(x))=\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}g''(f(x))=\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\Rightarrow g''(f(x))=\frac{3}{2}x^2=\frac{3}{2}(g(f(x)))^2$$

حالا با فرض $t=f(x)$ می‌بینیم که $g''(t)=\frac{3}{2}(g(t))^2$، پس $g''=\frac{3}{2}g^2$ است.

۱۱ـ گزینه «۱» به این سؤال در کتاب «حل سؤالات ریاضی عمومی ۱ و ۲، بدون دخالت دست و خودکار» به روش تستی و سریع پاسخ داده شده است، با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{\sin x\cos x}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{\sin 2x}{2x}dx\overset{*}{=}\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^{2b}\frac{\sin u}{u}du=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

در (*) از تغییر متغیر $u=2x$ استفاده کرده‌ایم، در این صورت داریم $du=2dx$ و چون $0\le x\le b$ پس $0\le u\le 2b$.

۱۲ـ گزینه «۴» فرض کنید $z_1=x^2+y^2$ و $z_2=tg^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y}$. در این صورت $z=z_1+z_2$ است. حالا در مورد z_1 و z_2 مسأله را به‌صورت جداگانه حل می‌کنیم. z_1 تابعی همگن از درجه‌ی ۲ است، بنابراین داریم:

$$x\frac{\partial z_1}{\partial x}+y\frac{\partial z_1}{\partial y}=2(x^2+y^2)=2z_1$$

در مورد z_2 به این صورت عمل می‌کنیم:

$$z_2=tg^{-1}(\frac{x^3+y^3}{x-y})\xrightarrow{u=\frac{x^3+y^3}{x-y}}u=tgz_2\Rightarrow x\frac{\partial z_2}{\partial x}+y\frac{\partial z_2}{\partial y}=2u\frac{dz_2}{du}=2u\frac{1}{1+u^2}=\frac{2tgz_2}{1+tg^2z_2}=\sin 2z_2=\sin(2.tg^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y})$$

از مجموع نتایج بدست آمده خواهیم داشت:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2(x^2+y^2)+\sin(2tg^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y})$$

۱۳ـ گزینه «۳»

روش اول: می‌توانیم از تغییر متغیر $X=\frac{1}{x}$ و $Y=\frac{1}{y}$ استفاده کنیم تا مسأله حالت ساده‌تری داشته باشد. در این صورت تابع موردنظر $f=X+Y$ است و قید داده شده $g:X^2+Y^2=1$ خواهد بود. حالا اگر از ضرایب لاگرانژ استفاده کنیم خواهیم داشت: $\frac{f_X}{g_X}=\frac{f_Y}{g_Y}\Rightarrow\frac{1}{2X}=\frac{1}{2Y}\Rightarrow X=Y$

با جایگذاری $X=Y$ در قید $g:X^2+Y^2=1$ داریم، $X=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $Y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. بنابراین کمترین و بیشترین مقدار تابع $f=X+Y$ عبارتند از $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$.

روش دوم: پس از انجام تغییر متغیر $X=\frac{1}{x}$ و $Y=\frac{1}{y}$ می‌توانیم معادله‌ی $g:X^2+Y^2=1$ را به‌صورت $X=\cos\theta$ و $Y=\sin\theta$ پارامتری کنیم. در این صورت داریم: $f=X+Y=\cos\theta+\sin\theta$

و می‌دانیم که $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\cos\theta+b\sin\theta\le\sqrt{a^2+b^2}$ پس: $-\sqrt{2}\le\cos\theta+\sin\theta\le\sqrt{2}$ یعنی $-\sqrt{2}\le f\le\sqrt{2}$.

روش سوم: برای هر جفت بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ می‌دانیم که $|\vec{u}.\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ که θ زاویه‌ی بین دو بردار است. از آن‌جا که $\cos\theta\le 1$ است می‌توان نتیجه گرفت که همواره $|\vec{u}.\vec{v}|\le|\vec{u}||\vec{v}|$. این نامساوی به نامساوی کوشی ـ شوارتز هم معروف است. حالا اگر فرض کنیم $\vec{u}=(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$ و $\vec{v}=(1,1)$ آن‌گاه $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=f(x,y)$. پس داریم: $|f(x,y)|=|\vec{u}.\vec{v}|\le|\vec{u}||\vec{v}|=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\times\sqrt{1+1}$

پس $|f(x,y)|\le\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}$. حال شرط $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$ را جایگذاری می‌کنیم، پس $|f(x,y)|\le\sqrt{2}$. یعنی $-\sqrt{2}\le f\le\sqrt{2}$.

۱۴ـ گزینه «۳» شیب خط مماس در نقطه P برابر $m_1=\text{tg}\varphi$ می‌باشد. همچنین شیب خط شعاعی گذرنده از مرکز انحنا منحنی c به‌صورت $m_2=\frac{d\beta}{d\alpha}$ می‌باشد. با توجه به اینکه خطوط مماسی و شعاعی بر یکدیگر عمودند، می‌توان چنین نوشت: $m_1m_2=-1\Rightarrow\frac{d\beta}{d\alpha}=-\cot g\varphi$

۱۵ـ گزینه «۳» زاویه‌ی بین شعاع حامل (یعنی پاره‌خطی که از مبدأ به نقطه‌ی P می‌رود) با خط مماس بر منحنی را با ϕ نشان می‌دهیم. همان‌طور که می‌دانید:

$$\text{tg}\phi=\frac{r}{r'}=\frac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\text{tg}\frac{\theta}{2}\Rightarrow\phi=\frac{\theta}{2}$$

مطابق صورت سؤال، طول OP برابر است با r و طول OH برابر است با q. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHP، اندازه‌ی وتر برابر با r است و یکی از اضلاع قائم برابر با q است. می‌دانیم که $\sin\phi=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$ یعنی $\sin\phi=\frac{q}{r}$، پس: $q=r\sin\phi=r\sin\frac{\theta}{2}$. نتیجه‌ی به‌دست آمده را در معادله‌ی منحنی $r=a(1-\cos\theta)$ قرار می‌دهیم:

$$r=a(1-\cos\theta)=2a\sin^2\frac{\theta}{2}\Rightarrow r^3=2ar^2\sin^2\frac{\theta}{2}\Rightarrow r^3=2aq^2$$

۱۶ـ گزینه «۲» با استفاده از روش تعویض حدود انتگرال می‌توان چنین نوشت:

$$I=\int_0^1\int_y^1 x^{-\frac{3}{2}}\cos(\frac{\pi y}{2x})dxdy=\int_0^1\int_0^x(x^{-\frac{3}{2}}\cos(\frac{\pi y}{2x})dy)dx=\int_0^1(\frac{2}{\pi}x^{-\frac{1}{2}})dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{4}{\pi}\left[\sqrt{x}\right]_0^1=\frac{4}{\pi}$$

۱۷ـ گزینه «۳» در معادله‌ی مرز ناحیه‌ی D یعنی $x^2+y^2+z^2=1$ تبدیل x به y و y به x معادله را عوض نمی‌کند. همین ویژگی برای هر جفت از متغیرها برقرار است. بنابراین با تبدیل x و z به یکدیگر، مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند. به همین دلیل داریم:

$$I=\iiint\frac{x^2+2y^2}{x^2+4y^2+z^2}dxdydz\Rightarrow I=\iiint\frac{z^2+2y^2}{z^2+4y^2+x^2}dxdydz$$

بنابراین داریم:

$$2I=I+I=\iiint_D\frac{x^2+4y^2+z^2}{x^2+4y^2+z^2}dxdydz=\iiint_D dxdydz=(\text{D حجم})=\frac{4}{3}\pi\Rightarrow I=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$$

۱۸ـ گزینه «۴»

$$I=\iint_S\vec{F}.d\vec{s}=\iiint_D(\vec{\nabla}.\vec{F})dv=\iiint_D(3x^2+3y^2+3z^2)dxdydz$$

با تغییر مختصات دکارتی به کروی خواهیم داشت:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1(3\rho^2)(\rho^2\sin\phi)d\rho d\phi d\theta=\left[\int_0^{2\pi}d\theta\right]\left[\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi\right]\left[\int_0^1 3\rho^4d\rho\right]=\frac{12\pi}{5}$$

۱۹ـ گزینه «۱» فصل مشترک کره و سهمی‌گون به‌صورت روبرو است:
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ x^2+y^2=z \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=1$$

بردار عمود بر سطح دایره $x^2+y^2=1$ برابر $\vec{k}$ است. بنابراین طبق قضیه استوکس می‌توان چنین نوشت:
$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=\iint_S(\nabla\times\vec{F}).d\vec{s}=\iint_A\left[-2\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}\right].\vec{k}dydx=-2\iint_A dxdy=-2(\text{مساحت دایره‌ای بر شعاع } 1)=-2\pi$$

۲۰ـ گزینه «۲» فرض کنید S، سطح نیم‌کره‌ی بالایی باشد. S یک سطح بسته نیست؛ اما با اضافه کردن یک سطح مناسب می‌توان آن را به سطح بسته‌ای تبدیل کرد. از برخورد نیم‌کره با صفحه‌ی $z=0$، دایره‌ی $x^2+y^2=1$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین اگر فرض کنیم S' بخشی از صفحه‌ی $z=0$ باشد که درون دایره‌ی $x^2+y^2=1$ قرار دارد، در این‌صورت $S\cup S'$ یک سطح بسته است که ناحیه‌ی درون آن یعنی V یک نیم‌کره است. از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم:
$$\iint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint_V(0)dv=0$$

بنابراین داریم:
$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_{S\cup S'}\vec{F}.\vec{n}ds-\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}ds=0-\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}ds$$

سطح S' بخشی از صفحه $z=0$ بوده و بردار قائم رو به خارج آن $\vec{n}=-\vec{k}$ است. (توجه کنید که بردار $\vec{k}$ رو به داخلِ نیم‌کره است و $-\vec{k}$ رو به خارج آن)

در نتیجه داریم $\vec{F}.\vec{n}ds=\vec{F}.(-\vec{k})ds=-e^{x^2+y^2}ds$. توجه کنید که طبق معادله‌ی $g:z=0$ داریم $ds=\frac{|\vec{\nabla}g|}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=dA$، پس با استفاده از مختصات قطبی، درون دایره‌ی $x^2+y^2=1$ خواهیم داشت:
$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds=-\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}ds=-\iint_{S'}-e^{x^2+y^2}dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2}rdrd\theta=(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^1 re^{r^2}dr)=2\pi\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1=\pi(e-1)$$