این فایل شامل حدود ۸۳۲ تست منتخب ریاضی عمومی (۱) و (۲) کارشناسی ارشد و دکتری از سال ۹۱ تا ۹۶ می‌باشد (غیر از سؤالات ریاضی عمومی (۱) و (۲) کارشناسی ارشد سراسری رشته‌های مکانیک، عمران، MBA و ریاضی که در پایان کتاب ریاضی (۲) وجود دارد).

با توجه به این که تعداد این سؤالات حدود ۱۸۰۰ عدد بود به دلیل بالا بردن کیفیت و جبران کمبود زمان تست‌های بی‌کیفیت و تکراری (از لحاظ ذات و مفهوم) حذف شدند. ضمناً این ۸۳۲ تست نیز اولویت‌بندی شدند و ۵۳۶ تست اول آن در واقع مهم‌تر از بقیه هستند (اگر فرصت کم دارید فقط ۵۳۶ تست اول را پاسخ دهید و اگر زمان دارید تمام آن‌ها را).

سعی کنید مواردی نظیر تست‌زنی، بالا بردن سرعت، کاهش زمان پاسخگویی به هر تست را به خوبی تمرین کنید و پاسخ‌های فایل را هم حتماً ببینید حتی در مورد تست‌هایی که درست جواب داده‌اید.

منتخب سؤالات ریاضی عمومی (۱ و ۲) ارشد و دکتری ۹۱ ـ ۹۶

۱ـ کدام انتگرال ناسره، همگراست؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{\operatorname{Ln}x}$ ۲) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+3\sin x}$ ۳) $\int_{1}^{\infty}\cos x\,dx$ ۴) $\int_{1}^{\infty}\frac{x\,dx}{x+1}$

۲ـ مقدار انتگرال معین $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{3\sin^2x+\cos^2x}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\pi\sqrt{3}$

۳ـ فرض کنید T ناحیه مثلثی شکل با رئوس (π,π)، $(-\pi,-\pi)$ و $(0,-\pi)$ است. مقدار $\iint_T \cos(x-y)dA$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

۴ـ فرض کنید γ مرز دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع R در جهت خلاف عقربه‌های ساعت (جهت مثبت) است. اگر $\vec{F}=(F_1,F_2)$ میدان برداری باشد که $F_1=\frac{-y}{x^2+y^2}-2y+e^{x^2}$ و $F_2=\frac{x}{x^2+y^2}+x+\operatorname{tg}y^2$، در این صورت $\oint_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) 2π ۲) $\pi(R^2+1)$ ۳) $\pi(3R^2+2)$ ۴) $\pi(2R^2+2)$

۵ـ اگر S بخشی از کره‌ی $x^2+y^2+(z-1)^2=5$ باشد که بالای صفحه‌ی xy قرار دارد و $\vec{N}$ بردار قائم یک رو به خارج بر S باشد و $\vec{F}=(\sin(x^2z)+y,3x+\cos(z^2y),\sin(x^2y+xy^2)+6z)$، مقدار $\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{N}ds$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) 8π ۲) 12π ۳) 16π ۴) 20π

۶ـ کدام گزینه در رابطه با دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی $a_n=\frac{2(1+\frac{1}{n})^{2n+1}}{[(1+\frac{1}{n})^n+(1+\frac{1}{n})^{n+1}]}$ درست است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) همگرا و نزولی اکید است. ۲) همگرا و صعودی اکید است. ۳) واگرا است. ۴) همگرا است ولی یکنوا نیست.

۷ـ مقدار $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ به طوری که (x_1,y_1,z_1) روی کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و (x_2,y_2,z_2) روی کره $x^2+y^2+z^2=b^2$ قرار دارد و $0<a<b$، کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) $b-a$ ۲) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ۳) $\sqrt{b-a}$ ۴) $\sqrt{b+a}$

۸ـ صفحه مماس بر رویه $S:=x^2+y^2-z^2=1$ در نقطه‌ی $(1,1,1)$ در چند خط راست با رویه اشتراک دارد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۹ـ کدام گزینه در مورد نقاط بحرانی تابع $\begin{cases} f:R^3\to R \\ f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xyz \end{cases}$ صحیح است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) یک نقطه‌ی بحرانی دارد که مینیمم موضعی است.

۲) پنج نقطه بحرانی دارد که چهار نقطه‌ی زینی و یک نقطه مینیمم موضعی دارد.

۳) چهار نقطه بحرانی دارد که همگی زینی هستند.

۴) هیچ‌کدام

۱۰ـ کدام گزینه معادله‌ی دایره‌ی بوسان (انحناء) منحنی $y=x^2$ در مبدأ است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۳)

۱) $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ ۲) $x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ ۳) $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=4$ ۴) $x^2+y^2=\frac{1}{4}$

۱۱ـ برای دو عدد حقیقی a و b با شرط $0 < a < b$ حد دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با ضابطه زیر کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۴)

$$x_1 = a$$
$$x_2 = b$$
$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \qquad (n \ge 3)$$

۱) b
۲) $\frac{1}{3}(a+2b)$
۳) $\frac{1}{2}(a+b)$
۴) $\frac{1}{8}(3a+5b)$

۱۲ـ برد تابع $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۴)

۱) $(0, e^e]$
۲) $(0, 1]$
۳) $(0, e^{-1}]$
۴) $(0, e^{e^{-1}}]$

۱۳ـ مساحت رویه حاصل از دوران منحنی $x = \frac{1}{8}(t - \sin t)$ و $y = \frac{1}{8}(1 - \cos t)$ ، $0 \le t \le 2\pi$ حول محور x کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\pi}{3}$
۲) $\frac{\pi}{2}$
۳) 2π
۴) $\frac{5\pi}{3}$

۱۴ـ سیالی در درون یک مخزن استوانه‌ای به شعاع ۲ در حال چرخش است، به طوری که حرکتش توسط میدان سرعتی $\vec{F}(x,y,z) = -y\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{i} + x\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{j}$ صورت می‌گیرد. اگر S سطح فوقانی و $\vec{N}$ بردار قائم یکه رو به خارج مخزن استوانه‌ای باشد، مقدار انتگرال $\iint_S (\mathrm{curl}\vec{F}).\vec{N}ds$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۴)

۱) 6π
۲) 4π
۳) 10π
۴) 16π

۱۵ـ فرض کنید A یک ماتریس مربعی حقیقی باشد به طوری که $A^2 \ne 0$ و $A^3 = 0$ و $(I + 2A)^{-1} = I + \alpha A + \beta A^2$ مقادیر α و β کدام هستند؟
(علوم کامپیوتر ـ علوم تصمیم و مهندسی دانش ـ سراسری ۹۴)

۱) $\alpha = -2 , \beta = 4$
۲) $\alpha = 2 , \beta = -4$
۳) $\alpha = -2 , \beta = -4$
۴) $\alpha = 2 , \beta = 4$

۱۶ـ اگر $z \ne 1$ یکی از ریشه‌های پنجم عدد یک باشد، آنگاه مقدار $\frac{z}{1+z^2} + \frac{z^2}{1+z^4} + \frac{z^3}{1+z} + \frac{z^4}{1+z^3}$ ، کدام است؟
(علوم کامپیوتر (علوم تصمیم و مهندسی دانش) ـ سراسری ۹۵)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۵

۱۷ـ چند تابع f بر بازه $[0,1]$ وجود دارد که $f(0) = f(1) = 0$ و به‌ازای یک تابع پیوسته g، تساوی $f'' + f'g = f$ بر $[0,1]$ برقرار باشد؟
(علوم کامپیوتر (علوم تصمیم و مهندسی دانش) ـ سراسری ۹۵)

۱) ۱
۲) ۲
۳) هیچ تابع f وجود ندارد.
۴) بی‌نهایت تابع وجود دارد.

۱۸ـ مقدار $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{(1-\cos x)^{\frac{7}{2}}} dx$ ، کدام است؟ (علوم کامپیوتر (علوم تصمیم و مهندسی دانش) ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{7}{5}$
۲) $\frac{7}{2}$
۳) $\frac{7}{3}$
۴) ۱

۱۹ـ حجم جسمی صلب که از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و از پایین به مخروط $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ محصور است، کدام است؟
(علوم کامپیوتر (علوم تصمیم و مهندسی دانش) ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{6}$
۲) $\frac{4\pi}{3}$
۳) $\frac{5\pi}{6}$
۴) $\frac{8\pi}{3}$

۲۰ـ بازه‌ی همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})n} x^n$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر (علوم تصمیم و مهندسی دانش) ـ سراسری ۹۵)

۱) $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$
۲) $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$
۳) $[-1, 1)$
۴) $(-1, 1)$

۲۱ـ رتبه ماتریس $\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & a \\ b & b & b \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ برابر با کدام‌یک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۵)

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۲ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos\frac{6\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) ∞

۲۳ـ کدام گزینه سری توانی تابع $f(x)=\frac{x^3}{(1+4x^2)^2}$ است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 4^{2n}x^{2n+3}$ ۲) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n+1}$ ۳) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}4^{n-1}nx^{2n+1}$ ۴) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}4^{n-1}n^2x^{2n+1}$

۲۴ـ مقدار $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{e^{-x}}{x}dx$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $\text{Ln}2$ ۴) e

۲۵ـ اگر $x=\int_0^{2y}\frac{1}{\sqrt{1+5t^2}}dt$، آنگاه نسبت $\frac{d^2y}{dx^2}$ به y کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) 1 ۳) 5 ۴) 10

۲۶ـ اگر $\alpha>0$ مقدار $\int_0^{\infty}x^2e^{-\alpha x^2}dx$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ ۲) $\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ ۳) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ ۴) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

۲۷ـ هرگاه p و q اعداد حقیقی و مثبت و $p\le q$ آنگاه $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$ همگرا است اگر و تنها اگر ... (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) $p>1, q>1$ ۲) $p\le 1<q$ ۳) $p<1, q<1$ ۴) $p<1<q$

۲۸ـ مساحت رویه حاصل از دوران منحنی قطبی $r=1+\cos\theta$ حول محور xها کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{64\pi}{5}$ ۲) $\frac{32\pi}{5}$ ۳) $\frac{16\pi}{5}$ ۴) $\frac{8\pi}{5}$

۲۹ـ حجم ناحیه محصور به درون کره $x^2+y^2+z^2=4$ و سهمی‌گون $x^2+y^2=4(1-z)$ که شامل مبدأ نیست، کدام است؟
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{5\pi}{3}$ ۲) $\frac{10\pi}{3}$ ۳) 5π ۴) 10π

۳۰ـ اگر $\vec{F}=(z^2-x)\vec{i}+xy\vec{j}+3z\vec{k}$ یک میدان برداری و سطح S قسمتی از رویه، $z=4-y^2$، $z\ge 0$، بین صفحات $x=0$ و $x=3$ و n قائم یکه روبه‌بالای S (در جهت مثبت محور zها) باشد، مقدار انتگرال سطح $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۴۳ ۳) ۱۴۵ ۴) ۱۴۶

۳۱ـ دنباله $\{a_n\}$ به صورت $a_1=1$ و $a_2=4$ و $n\ge 3$, $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+2$ تعریف شده است، کدام گزاره صحیح است؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\{a_n\}$ نوسانی است.
۲) $\{a_{2n}\}$ واگرا ولی $\{a_{2n-1}\}$ همگراست.
۳) $\{a_n\}$ صعودی و واگراست.
۴) $\{a_n\}$ نزولی و همگراست.

۳۲ـ اگر $f(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt[3]{\sin t}\,dt$، آنگاه به ازای چه مقدار x در بازه‌ی $[0,2\pi]$ تابع $f(x)$ ماکزیمم است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 2π

۳۳ـ اگر F یک میدان برداری باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر بی‌معنی است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}[\text{div}(\nabla\vec{F})]$ ۲) $\vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}(\text{div}(\vec{F})]$ ۳) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}[\text{div}(\vec{\nabla}\times\vec{F})])$ ۴) $\vec{\nabla}(\text{div}[\vec{\nabla}(\text{div}\vec{F})])$

۳۴ـ فرض کنید u و v تابع‌هایی دو متغیره و دو بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $\nabla.(\nabla(uv))$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) $v\nabla^2u+u\nabla^2v+\nabla u.\nabla v$ ۲) $u\nabla^2u+v\nabla^2v+\nabla u.\nabla v$ ۳) $v\nabla^2u+u\nabla^2v+2\nabla u.\nabla v$ ۴) $u\nabla^2u+v\nabla^2v+2\nabla u.\nabla v$

۳۵ـ مساحت منحنی بستهٔ $3x^2-2xy+3y^2=4$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\pi\sqrt{3}$ ۲) $\pi\sqrt{2}$ ۳) $\pi\sqrt{5}$ ۴) $2\pi\sqrt{2}$

۳۶ـ مقدار $\iint_R e^{x+y}\cos(x-y)\,dx\,dy$ روی ناحیه $R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \frac{\pi}{2}\}$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1-e^{\pi}}{2}$ ۲) $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ ۳) $\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ ۴) $\frac{1+e^{\pi}}{2}$

۳۷ـ شعاع انحنای منحنی $x^4-y^4+x^3-y^3+x^2-y^2+y=0$ در مبدأ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\rho=\frac{1}{3}$ ۲) $\rho=\frac{1}{4}$ ۳) $\rho=\frac{1}{2}$ ۴) $\rho=\frac{1}{5}$

۳۸ـ فرض کنید C منحنی بستهٔ هموازی باشد که مبدأ را احاطه کرده است. کدام گزینه در مورد مقدار $\oint_C \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$ صحیح است؟

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) موجود نیست. ۲) صفر است. ۳) برابر 2π است. ۴) مضرب صحیحی از 2π است.

۳۹ـ مکان اعداد مختلط $z=x+iy$ در صفحه اعداد مختلط که در نامساوی $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}+1)\le 2$ صدق کنند، کدام است؟

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) محیط و خارج دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$

۲) محیط و داخل دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$

۳) محیط و داخل دایره‌ای به مرکز $(1,0)$ و شعاع یک

۴) محیط و داخل دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$

۴۰ـ عرض از مبدأ خط مجانب منحنی $x^3+y^3=6xy$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) ۳ ۲) ۲− ۳) ۲ ۴) ۳−

۴۱ـ مقدار انتگرال معین $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi+2}{8}$ ۲) $\frac{\pi+2}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}+1$

۴۲ـ ذوزنقه‌های متساوی‌الساقینی به مساحت ثابت K و زاویه بین ساق و قاعده α را در نظر بگیرید. طول ساق ذوزنقه‌ای که محیط آن کمینه باشد کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $\sqrt{\frac{K}{\cos\alpha}}$ ۲) $\sqrt{\frac{K}{\sin\alpha}}$ ۳) $\frac{K}{\sin\alpha}$ ۴) $\frac{K}{\cos\alpha}$

۴۳ـ متحرکی در فضا بر روی صفحه $2x+5y-z=11$ حرکت می‌کند، تاب متحرک در یک نقطه دلخواه برابر است با:

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{\sqrt{30}}$ ۳) $\sqrt{14}$ ۴) $\sqrt{30}$

۴۴ـ خطی از نقطه‌ی $A(2,1)$ چنان مرور می‌دهیم که محور x ها را در C و محور y ها را در D قطع کند. هرگاه مساحت مثلث OCD می‌نیمم باشد، معادله خط کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$ ۲) $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=1$ ۳) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ ۴) $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$

۴۵ـ خطوط $L_1:\begin{cases}x=1\\ y=t+1\\ z=-t-1\end{cases}$ و $L_2:\begin{cases}x+2z=2\\ y=2\end{cases}$ را در نظر بگیرید. معادله صفحه‌ای که از دو خط به یک فاصله باشد کدام است؟

(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $2x-y-z=\frac{13}{9}$ ۲) $-2x+y+z=\frac{13}{9}$ ۳) $x+2y+2z=\frac{63}{9}$ ۴) $x+2y+2z=\frac{63}{18}$

۴۶ـ $\cos(\pi\sinh \mathrm{Ln}3)$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴۷ـ فاصله نقطه‌ی $A(4,1,-2)$ از فصل مشترک صفحات $2x+y-4z-16=0$ و $x-2y+3z+2=0$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۴۸ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty} Ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$، (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) واگرا است.
۲) همگرا به ۲ است.
۳) همگرا به $\frac{1}{2}$ است.
۴) همگرا به $Ln\frac{1}{2}$ است.

۴۹ـ تعداد ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^{13}+7x^3-5=0$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) یک ریشه دارد که مثبت نیز هست.
۲) دو ریشه دارد.
۳) یک ریشه دارد که منفی نیز است.
۴) ریشه ندارد.

۵۰ـ اگر θ زاویه بین دو بردار $(1,1,\cdots,1)$ و $(1,2,\cdots,n)$ در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\theta$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{\pi}{6}$
۲) $\frac{\pi}{4}$
۳) $\frac{\pi}{3}$
۴) $\frac{\pi}{2}$

۵۱ـ برای چه مقادیری از K نمودار تابع $f(x)=x^3-3x^2+K$، در سه نقطه متمایز محور xها را قطع می‌کند؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $K>0$
۲) $K=0,4$
۳) $0<K<4$
۴) تمام مقادیر K

۵۲ـ انتگرال معادل عبارت $\int_1^2\int_x^{x^3} f(x,y)dydx+\int_2^8\int_x^8 f(x,y)dydx$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $\int_1^8\int_{y^3}^{y} f(x,y)dxdy$
۲) $\int_1^4\int_{y^{\frac{1}{3}}}^{y} f(x,y)dxdy$
۳) $\int_1^8\int_{y^{\frac{1}{3}}}^{y} f(x,y)dxdy$
۴) $\int_1^8\int_{y^2}^{y} f(x,y)dxdy$

۵۳ـ اگر صفحات مماس بر دو رویه‌ی $x^2+(y-1)^2+z^2=1$ و $(x-c)^2+y^2+z^2=3$ در هر نقطه برخورد دو رویه بر هم عمود باشند آنگاه:
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $C=\pm\sqrt{3}$
۲) $C=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
۳) $C=0$
۴) $C=\pm1$

۵۴ـ مشتق سوئی تابع $f(x,y)=e^{-xy}$ در نقطه‌ی $(1,-1)$ و در امتداد $\theta=\frac{2\pi}{3}$، کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $-\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)e$
۲) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}e$
۳) $-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)e$
۴) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}e$

۵۵ـ ریشه‌های معادله‌ی $(z+1)^5+z^5=0$ که در آن $z=x+iy$ روی کدام خط قرار دارند؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۴)

۱) $x=\frac{1}{5}$
۲) $x=\frac{1}{2}$
۳) $x=-\frac{1}{5}$
۴) $x=-\frac{1}{2}$

۵۶ـ صفحه‌ی مماس بر سطح $z=x^3y^2$ در کدام نقاط (x,y) بر خط $\begin{cases}x=2-3t\\y=3+4t\\z=2+t\end{cases}$ عمود است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۴)

۱) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$
۲) $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$
۳) $(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\sqrt{2},\frac{-\sqrt{2}}{2})$
۴) $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$

۵۷ـ f تابعی دوبار مشتق‌پذیر است که $f'(1)=1$ و $\int_0^1(f'(x)-xf''(x))dx=1$. مقدار $f(1)-f(0)$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۴)

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۰

۵۸ـ مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}dx$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{12}$
۳) $\frac{5}{12}$
۴) $\frac{7}{12}$

۵۹ـ اگر $z=e^{\frac{2\pi i}{5}}$، حاصل $1+z+z^2+z^3+5z^4+4z^5+4z^6+4z^7+4z^8+5z^9$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۴)

۱) $4e^{\frac{3\pi i}{5}}$
۲) $-5e^{\frac{3\pi i}{5}}$
۳) $-4e^{\frac{2\pi i}{5}}$
۴) $5e^{\frac{4\pi i}{5}}$

۶۰ـ مقدار $\iint_S F.\vec{n}d\sigma$ کدام است که در آن $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+2y\vec{j}+4z^2\vec{k}$ و S سطح کل استوانه $4 \le x^2+y^2$ و $0 \le z \le 2$ و n بردار قائم یکه رو به خارج سطح می‌باشد. (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۴)

۱) 80π ۲) 40π ۳) 32π ۴) 8π

۶۱ـ مقدار $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+2)^n}$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) e^{-2} ۲) $e^{-\sqrt{2}}$ ۳) e^2 ۴) $e^{\sqrt{2}}$

۶۲ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) 0 ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) ∞ ۴) $Ln2$

۶۳ـ اگر $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x+ax+bx^3}{x^3}$ موجود و برابر صفر باشد، کدام گزینه درست است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) $b=9, a=-3$ ۲) $b=\dfrac{9}{2}, a=-3$ ۳) $b=\dfrac{9}{2}, a=3$ ۴) $b=9, a=3$

۶۴ـ صفحه بوسان خم C به معادله برداری $r(t)=e^t i+e^{-t}j+tk$ در نقطه $P_0=(1,1,0)$ موازی کدام صفحه است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) $x-y+z=-1$ ۲) $x+y-z=0$ ۳) $x+2y-z=1$ ۴) $x-y-2z=2$

۶۵ـ اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که x_1 و $x_2>0$ به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $x_{n+2}=x_{n+1}+\dfrac{1}{2}x_n$ آنگاه کدام گزینه درست است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۶)

۱) $\lim\limits_{x\to\infty} x_n=+\infty$

۲) $\{x_n\}$ کران‌دار و واگراست.

۳) $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ همگراست.

۴) $\{x_n\}$ بی‌کران است ولی به $+\infty$ میل نمی‌کند.

۶۶ـ کدام گزینه درباره‌ی سری‌های $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{2}-1)$ و $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ درست است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۶)

۱) هردو همگرا هستند. ۲) A همگرا و B واگرا است. ۳) A واگرا و B همگرا است. ۴) هردو واگرا هستند.

۶۷ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\left(1+2+3+\ldots+\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۶)

۱) 0 ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) این حد وجود ندارد.

۶۸ـ تعداد مجانب‌های قائم و افقی تابع $y=\dfrac{\sqrt{x^6-3x+1}}{x^3-x^2-4x+4}$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۶)

۱) ۳ قائم ۱ افقی ۲) ۲ قائم ۱ افقی ۳) ۳ قائم ۲ افقی ۴) ۲ قائم ۲ افقی

۶۹ـ تابع $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^6}{6!}$ دارای چند ریشه‌ی حقیقی است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۶)

۱) 0 ۲) 2 ۳) 4 ۴) 6

۷۰ـ اگر شعاع همگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برابر R باشد، شعاع همگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}a_n^2x^n$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۶)

۱) $\dfrac{1}{e}R^2$ ۲) R^2 ۳) eR^2 ۴) e^2R

۷۱ـ نسبت شعاع به ارتفاع یک مخزن استوانه‌ای شکل با حجم ماکزیمم در حالتی که مساحت کل آن مقدار ثابت A است، کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۶)

۱) $\dfrac{1}{4}$ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) 4

۷۲ـ مقدار $\int_0^2\int_{1+y^2}^5 ye^{(x-1)^2}dxdy$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۶)

۱) $\dfrac{1}{4}(e^{16}-1)$ ۲) $\dfrac{1}{4}(e^{16}+1)$ ۳) $\dfrac{1}{16}(e^4-1)$ ۴) $\dfrac{1}{16}(e^4+1)$

۷۳ـ حاصل عبارت زیر کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۱)

$$\lim_{x\to+\infty} x^{۲}(\sinh^{-1}x - \mathrm{Ln}x - \mathrm{Ln}۲)$$

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۷۴ـ فرض کنید $f(x)=\sinh x$. مقدار $\frac{d}{dx}f^{-1}(\sqrt{۳})$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۱)

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۷۵ـ حاصل انتگرال $\int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۲}{۳}} e^{۹(x-\frac{۲}{۳})^{۲}}dx + ۳\int_{-۴}^{-۵} e^{(x+۵)^{۲}}dx$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{\pi}$ ۴) e

۷۶ـ همگرایی یا واگرایی سری‌های $S_۱=\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{n-۱}{n+۱})^{n(n+۱)}$ و $S_۲=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۱)

۱) هر دو همگرا هستند. ۲) هر دو واگرا هستند. ۳) $S_۱$ همگرا و $S_۲$ واگرا است. ۴) $S_۱$ واگرا و $S_۲$ همگرا است.

۷۷ـ طول منحنی $\mathrm{Ln}(\frac{۱}{۱-x^{۲}})$ از $x=۰$ تا $x=\frac{۱}{۲}$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۱)

۱) $\mathrm{Ln}۳-\frac{۱}{۲}$ ۲) $۲\mathrm{Ln}۳-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}$ ۴) $۲\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}$

۷۸ـ مساحت عرقچینی که صفحه $z=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ از بالای کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ جدا می‌کند برابر است با: (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $۲\pi\sqrt{۲}$ ۳) $\pi(۲-\sqrt{۲})$ ۴) $\pi(\sqrt{۲}+۲)$

۷۹ـ برای آن که $\int \vec{F}.d\vec{r}$ بین هر دو نقطه A و B مستقل از مسیر باشد؛ $\phi(z)$ را به دست آورید. (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۱)

$$\vec{F}(x,y,z)=(xy-\sin z)\vec{i}+\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}+e^{y}\varphi(z)\right)\vec{j}+(\frac{e^{y}}{z}\mathrm{Ln}z-x\cos z)\vec{k}$$

۱) $\mathrm{Ln}z+c$ ۲) $\frac{\mathrm{Ln}z}{z}+c$ ۳) $\frac{۱}{۲}(\mathrm{Ln}z)^{۲}+c$ ۴) $z(\mathrm{Ln}z-۱)+c$

۸۰ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{۱\times۱!+۲\times۲!+\dots+n\times n!}{(n+۱)!}$، برابر کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e ۴) $+\infty$

۸۱ـ حاصل انتگرال $I=\int\frac{dx}{\mathrm{tgh}\,x-۱}$، کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۲)

۱) $-(\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\sinh^{۲}x+\frac{۱}{۴}\sinh ۲x)+c$ ۲) $-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\sinh^{۲}x-\frac{۱}{۴}\sinh ۲x+c$

۳) $-\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\sinh^{۲}x+\frac{۱}{۴}\sinh ۲x+c$ ۴) $(\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\sinh^{۲}x-\frac{۱}{۴}\sinh ۲x)+c$

۸۲ـ طول قوس خم $y=\mathrm{Ln}(۱-x^{۲})$ کدام است؟ $|x|\le\frac{۱}{۲}$ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۲)

۱) ۱ ۲) $۲\mathrm{Ln}۳-۱$ ۳) $\mathrm{Ln}\frac{۵}{۲}$ ۴) $۳\mathrm{Ln}۲-۱$

۸۳ـ مقدار $\mathrm{Arg}\left(\left|\frac{۲+i}{۵-۳i}\right|^{۱۳۹۲}(-۱+i)\right)$، برابر کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۲)

۱) $-\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $-\frac{۳\pi}{۴}$

۸۴ـ مشتق سوئی تابع $f(x,y,z)=x\mathrm{Ln}(z^{۲}+y^{۲})$ در امتداد مماس بر منحنی $z=-۲t^{۴}$ و $y=۲t^{۲}$ و $x=t$، در نقطهٔ $M(۱,۲,-۲)$ کدام است؟
(عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۹}(\mathrm{Ln}۸+۶)$ ۲) $\frac{۱}{۴}\mathrm{Ln}۸+۶$ ۳) $\frac{۱}{۲}\mathrm{Ln}۸+۶$ ۴) $\mathrm{Ln}۸+۶$

۸۵ـ مقدار انتگرال $\iiint_D \frac{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}}{x^2+y^2+z^2+1}dV$ کدام است؟ D ناحیه‌ی $1 \le x^2+y^2+z^2$ می‌باشد. (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{5\pi}{6}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) π

۸۶ـ فرض کنید c دلگون $r=1-\cos\theta$ و در جهت مثلثاتی باشد. در این صورت مقدار انتگرال زیر، برابر کدام است؟(عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۲)

$$\int_c (x^3-y)dx+(3x-2y^2)dy$$

۱) -6π ۲) -3π ۳) 3π ۴) 6π

۸۷ـ حجم محدود به کره‌ی $x^2+y^2+z^2=5$ از بالا و سهمی گون $x^2+y^2=4z$ از پایین، برابر کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{5}-2)$ ۲) $\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-4)$ ۳) $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{5}-1)$ ۴) $\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{5}-4)$

۸۸ـ فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy$ و $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=3$، در این صورت $f'(x)$، کدام است؟

(عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۳)

۱) $3x$ ۲) $5x$ ۳) $3x+5$ ۴) $5x+3$

۸۹ـ ماکزیمم مقدار تابع $f(x,y,z)=e^{x^2}$ روی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۳)

۱) $\sqrt{e}$ ۲) $e^{\sqrt{2}}$ ۳) e^2 ۴) e^4

۹۰ـ مقدار $\lim_{x\to 1^+}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}\right)$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) $+\infty$

۹۱ـ اگر $I_n=\int x^2(Lnx)^n dx$ باشد، کدام رابطه زیر صحیح است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴)

۱) $I_{n+1}+(n+1)I_n=x^3(Lnx)^n$ ۲) $3I_{n+1}+nI_n=x^3(Lnx)^{n+1}$

۳) $3I_{n+1}+(n+1)I_n=x^3(Lnx)^n$ ۴) $3I_{n+1}+(n+1)I_n=x^3(Lnx)^{n+1}$

۹۲ـ مساحت ناحیه درون دایره $r=3\sin\theta$ و بیرون $r=2-\sin\theta$ واقع در ربع اول، کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{3}$

۹۳ـ اگر C مرز ذوزنقه با رئوس (۱,۱) و (۱,۲) و (۲,۳) و (۲,۱) باشد که یک بار در جهت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود و $\vec{F}(x,y)=(e^{x^4}+y^2,xy+\sin(Lny))$ باشد، $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۹۴ـ اگر D ناحیه داده شده با $x^2+y^2\ge a^2, x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ و S سطح ناحیه D باشد، انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ برای میدان برداری $\vec{F}=(x+yz)\vec{i}+(y-xz)\vec{j}+(z-e^x\sin y)\vec{k}$ روی رویه S کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴)

۱) $4\pi a^3\sqrt{3}$ ۲) $8\pi a^3\sqrt{3}$ ۳) $12\pi a^3\sqrt{3}$ ۴) $16\pi a^3\sqrt{3}$

۹۵ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $y=\cos x$، $y=\cos(x-c)$، $x=0$ برابر مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $y=\cos(x-c)$، $x=\pi$، $y=0$ است. مقدار c کدام است؟ $(0<c<\frac{\pi}{2})$ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{5}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

۹۶ـ کدام مورد برای انتگرال‌های $B=\iint_Q e^{-x-y}dA$ و $C=\iint_Q \frac{dA}{(1+x^2)(1+y^2)}$ (Q ربع اول صفحه‌ی xy) درست است؟

(عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۵)

۱) $B=1$ و $C=\frac{\pi^2}{4}$ ۲) B واگرا و $C=\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $B=1$ و C واگرا ۴) B و C واگرا

۹۷ـ مقدار انتگرال $\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}dxdy$ کدام است که در آن D ناحیه محصور به $y=x^2$ و $x=y^2$ می‌باشد؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{(e-1)^2}{3}$ ۲) $\frac{(e-1)^2}{5}$ ۳) $3(e-1)^2$ ۴) $5(e-1)^2$

۹۸ـ حد $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$ در صورت وجود، برابر است با: (مواد ـ سراسری ۹۱)

۱) $\operatorname{Ln}\sqrt{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۹۹ـ فرض کنید S مرز ناحیه‌ی محدود به مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$ و صفحه‌ی $x=2$، بردار $\vec{n}$، قائم یکانی بر S به سمت خارج و $\vec{F}(x,y,z)=(3x+\tan yz)\vec{i}+(y+xz)\vec{j}+(2z+e^{xy})\vec{k}$، در این صورت کدام گزینه مقدار $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma$ را نشان می‌دهد؟ (مواد ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{16\pi}{3}$ ۲) $\frac{32\pi}{3}$ ۳) 16π ۴) 32π

۱۰۰ـ حاصل انتگرال $\int\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) $\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}(\frac{tgx}{\sqrt{2}})+C$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}(\frac{tgx}{\sqrt{2}})+C$ ۳) $\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}(\frac{tg2x}{\sqrt{2}})+C$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}(\frac{tg2x}{\sqrt{2}})+C$

۱۰۱ـ سری توانی تابع $f(x)=\int_0^x\frac{\operatorname{Ln}(1+t)}{t}dt$، ($|t|<1$) و بازه‌ی همگرایی آن کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2}$، $-1\le x\le 1$ ۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$، $-1\le x\le 1$

۳) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n+1}}{n^2}$، $-1<x<1$ ۴) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{n+1}}{n^2}$، $-1<x<1$

۱۰۲ـ حجم ناحیه‌ی توپر محصور بین سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$، کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

۱۰۳ـ معادله‌ی برداری خم فضایی C به صورت $r(t)=(a\cos t)\vec{i}+(a\sin t)\vec{j}+bt\vec{k}$، $0\le t\le 2\pi$ است. به ازای کدام b، خمیدگی (انحناء) خم برابر $\frac{1}{2a}$ می‌شود؟ ($a>0$، $b>0$ ثابت) (مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) $b=\frac{a}{2}$ ۲) $b=a$ ۳) $b=2a$ ۴) امکان‌پذیر نیست.

۱۰۴ـ نقاطی از رویه‌ی $(y+z)^2+(z-x)^2=16$ که خط عمود بر رویه در آن نقاط موازی صفحه‌ی yz می‌باشد، کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) نقاط دو خط $x=4-y=z$ و $x=-4-y=z$ ۲) نقاط فصل مشترک $\begin{cases}x=4-y=z\\x=-4-y=z\end{cases}$

۳) نقاط صفحه $x-z=0$ ۴) نقاط فصل مشترک $x-z=0$ با رویه

۱۰۵ـ قاعده‌ی جسمی یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است که طول هر ساق آن ۱۲ واحد است. اگر هر مقطع عرضی عمود بر یکی از این ساق‌ها یک نیم قرص باشد، آنگاه حجم جسم برابر کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۳)

۱) 73π ۲) 144π ۳) 146π ۴) 72π

۱۰۶ـ مقدار انتگرال $\iint_R \arctan(\frac{y}{x})dxdy$ که در آن R قطاع طوقی $\frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x$ و $1\le x^2+y^2\le 4$ برابر کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{16}$ ۳) $\frac{\pi^2}{16}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

۱۰۷ـ مقدار انتگرال $\iint_D 2xydA$ که در آن D ناحیه محصور به دو منحنی $y=x^2$ و $y=2-x^2$ می‌باشد، کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۰ ۴) ۲

۱۰۸ـ فرض کنید $f(x)=e^xp(x), p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$. در این صورت $f^{(n)}(0)$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۴)

۱) $c_0+c_1+2c_2$ ۲) $c_0+c_1+c_2$ ۳) $c_0+nc_1+2n(n-1)c_2$ ۴) $c_0+nc_1+n(n-1)c_2$

۱۰۹ـ اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد، آیا می‌توانیم داشته باشیم $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t.\cos^n tdt = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n tdt$ اگر پاسخ مثبت است، ثابت a کدام است؟

(مواد ـ سراسری ۹۴)

۱) بلی، $a = 2^{-n}$ ۲) بلی، $a = 2^{1-n}$ ۳) بلی، $a = 2^{-1-n}$ ۴) خیر

۱۱۰ـ حاصل جمع سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n+1}$، کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۴)

۱) $|x| < 1\ ,\ Ln(1-x^2)$ ۲) $|x| \le 1\ ,\ Ln(1+x^2)$

۳) $|x| \le 1\ ,\ x \ne 0\ ,\ \frac{Ln(1+x^2)}{x^2}$ ۴) $\frac{Ln(1-x^2)}{x^2}\ ,\ x \ne 0,1$ و ۱ به ازای $x = 0$

۱۱۱ـ فرض کنیم $w = f(x,y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته و $\begin{cases} x = 2u + v \\ y = u - v \end{cases}$. در این صورت عبارت $5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ برابر با کدام مورد زیر است؟

(مواد ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ ۲) $\frac{2\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ ۳) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ ۴) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$

۱۱۲ـ مساحت بخشی از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ که بین صفحات $z = 0$ و $x + 2z = 3$ واقع شده، کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۴)

۱) $\pi\sqrt{3}$ ۲) $\pi\sqrt{6}$ ۳) $2\pi\sqrt{3}$ ۴) $2\pi\sqrt{6}$

۱۱۳ـ اگر مثلث c با رئوس $(1,0,0)$ و $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$، از نقطه $(1,1,1)$ در جهت عقربه‌های ساعت دیده شود، آنگاه مقدار انتگرال $\oint_c xydx + yzdy + zxdz$ کدام است؟

(مواد ـ سراسری ۹۴)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

۱۱۴ـ جسمی تحت اثر نیروی $\vec{F} = -yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ روی مارپیچ $\begin{cases} r = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k} \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$ به سمت بالا حرکت می‌نماید. کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$، کدام است؟

(مواد ـ سراسری ۹۵)

۱) $\sqrt{\pi}$ ۲) $\sqrt{2\pi}$ ۳) 2π ۴) $2\pi^2$

۱۱۵ـ انتگرال $\int_0^2\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}dydx + \int_2^{2\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx$ به‌صورت یک انتگرال دوگانه در مختصات قطبی کدام است؟

(مواد ـ سراسری ۹۵)

۱) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sqrt{2}} r^2 drd\theta$ ۲) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\sqrt{2}} r^2 drd\theta$ ۳) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} r\,dr\,d\theta$ ۴) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 r^2 dr\,d\theta$

۱۱۶ـ کدام مورد با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری معادل انتگرال $\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} f(x,y,z)dzdy\,dx$ است؟ (مواد ـ سراسری ۹۵)

۱) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ ۲) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

۳) $\int_{-1}^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ ۴) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

۱۱۷ـ در بین تمام نواحی مستطیلی $0 \le x \le a$ و $0 \le y \le b$، مقدار مینیمم شار برونسوی کل میدان $\vec{F} = (x^2 + 4xy)\vec{i} - 6y\vec{j}$ گذرنده از چهار ضلع مستطیل کدام است؟

(مواد ـ سراسری ۹۵)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 0 ۴) 2

۱۱۸ـ شار برونسوی میدان برداری $\vec{F} = x^2\vec{i} + xz\vec{j} + 3z\vec{k}$ گذرنده از کرانه‌ی ناحیه $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۵)

۱) 8π ۲) 16π ۳) 32π ۴) 64π

۱۱۹ـ مختصات مرکز ثقل $\frac{1}{4}$ از بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ واقع در ربع اول با چگالی ثابت یک برابر است با: (هوافضا ـ سراسری ۹۳)

۱) $X_C = \frac{2b}{3\pi}\ ,\ Y_C = \frac{2a}{3\pi}$ ۲) $X_C = \frac{2a}{3\pi}\ ,\ Y_C = \frac{2b}{3\pi}$ ۳) $X_C = \frac{4b}{3\pi}\ ,\ Y_C = \frac{4a}{3\pi}$ ۴) $X_C = \frac{4a}{3\pi}\ ,\ Y_C = \frac{4b}{3\pi}$

۱۲۰ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{a} e^{-x^2}dx$ برابر است با: (هوافضا ـ سراسری ۹۳)

۱) $a+\frac{a^3}{1!}+\frac{a^5}{2!}+\frac{a^7}{3!}+\cdots$
۲) $a-\frac{a^3}{1!\times 3}+\frac{a^5}{2!\times 5}-\frac{a^7}{3!\times 7}+\cdots$
۳) $a+\frac{a^3}{1!\times 3}+\frac{a^5}{2!\times 5}+\frac{a^7}{3!\times 7}+\cdots$
۴) انتگرال وجود دارد ولیکن قابل محاسبه نمی‌باشد.

۱۲۱ـ حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^p}$ (m و n و p اعداد صحیح و نامنفی) موجود است هرگاه: (هوافضا ـ سراسری ۹۳)

۱) $m+n<2p$
۲) $m+n>2p$
۳) $m+n\le 2p$
۴) $m+n\ge 2p$

۱۲۲ـ اگر $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=B$ ، در این صورت، $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x^5-x^2)$ کدام است؟ (هوافضا ـ سراسری ۹۳)

۱) صفر
۲) B
۳) B^3-B^5
۴) B^5-B^3

۱۲۳ـ سطح محصور بین منحنی $y=x^2$ و خط $y=2$ توسط خط $y=c$ به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. در آن صورت c کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{3}{2}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\sqrt[3]{2}$
۴) $\sqrt{2}$

۱۲۴ـ هرگاه برای تابعی $f(0)=0$ و برای هر x داشته باشیم $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ آنگاه کدام گزینه برای $f(2)$ صحیح است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۱)

۱) $1<f(2)<2$
۲) $\frac{1}{5}<f(2)<\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}<f(2)<\frac{3}{2}$
۴) $\frac{2}{5}<f(2)<2$

۱۲۵ـ منحنی c با معادلات ضمنی $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=t \end{cases}$ داده شده است، انحناء منحنی همواره برابر است با: (معماری کشتی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۰ پس منحنی c یک خط است.
۲) ۱ پس منحنی c یک دایره است.
۳) بستگی به نقطه منحنی دارد و شکل c یک بیضی است.
۴) ۱ پس منحنی c یک سهمی است.

۱۲۶ـ مساحت محصور به منحنی $x^2-y^2=2(x^2+y^2)^2$ برابر کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) $\sqrt{2}$
۴) ۲

۱۲۷ـ سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n}{2n-1}\right)^2$ چه وضعیتی را دارد؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۳)

۱) همگراست.
۲) واگراست.
۳) همگرایی و واگرایی به زوج یا فرد بودن n بستگی دارد.
۴) نمی‌توان نظر خاصی داد و بستگی به توان جمله سری دارد.

۱۲۸ـ حد دنباله با جمله عمومی $x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}$ کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$
۲) $\frac{a-\sqrt{1+4a}}{2}$
۳) $\frac{a+\sqrt{1+4a}}{2}$
۴) $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$

۱۲۹ـ مشتق nام تابع $f(x)=e^{ax}x^2$ کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۳)

۱) $e^{ax}[a^{n+1}x^2+2na^{n+2}+n(n+1)a^n]$
۲) $e^{ax}[a^n x^2+2na^{n+1}x+n(n+1)a]$
۳) $e^{ax}[a^n x^2+2na^{n-1}x+n(n-1)a^{n-2}]$
۴) $e^{ax}[a^{n-1}x^2+2na^n x+n(n-1)a^{n-1}]$

۱۳۰ـ اگر $f(x)=\sqrt[n]{1+x}, x>0, n\ge 2, n\in N$ و $g(x)=1+\frac{x}{n}$ کدام رابطه صحیح است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۳)

۱) $f(x)<g(x)$
۲) $f'(x)>g'(x)$
۳) $f(x)>g(x)$
۴) $f'(x)=g'(x)$

۱۳۱ـ سری توانی تابع $f(x)=\frac{x^2}{(1-x^3)^2}$ ،$(|x|<1)$ کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{3n-1}$
۲) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}x^{3n+1}$
۳) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n+1}$
۴) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n nx^{3n-1}$

۱۳۲ـ حجم ناحیه‌ای که در درون استوانه دایره‌ای $x^2+y^2=2y$ و استوانه سهموی $z^2=y$ قرار دارد، کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{32\sqrt{2}}{5}$
۲) $\frac{64\sqrt{2}}{5}$
۳) $\frac{32\sqrt{2}}{15}$
۴) $\frac{64\sqrt{2}}{15}$

۱۳۳ـ در صفحه مختلط مکان هندسی z هایی که به ازای آن، $\operatorname{Re}(\frac{1}{z}+2i)\le\frac{\operatorname{Im}(z-\bar{z})}{|z|^2}$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) $z=bi$ که $b\in R$ و $b>0$
۲) $z=a$ که $a\in R$ و $a<0$
۳) $z=a+bi$ که $a,b\in R$ و $a\le b$ و $(a,b)\neq(0,0)$
۴) $z=a+bi$ که $a,b\in R$ و $a\le 2b$ و $(a,b)\neq(0,0)$

۱۳۴ـ کدام گزینه بسط تیلور تابع $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ در همسایگی صفر است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(2n+1)x^n$
۲) $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n-1}$
۳) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n$
۴) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6}x^{n-1}$

۱۳۵ـ فرض کنید $f(x)$ تابع پیوسته‌ای بر $[0,2]$ باشد و $f(0)=0$ و $f(2)=2$. به علاوه به ازای هر $x\in[0,2]$ داریم $f'(x)>0$ و $\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$، مقدار $\int_0^2 f^{-1}(y)dy$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{7}{3}$
۴) $\frac{11}{3}$

۱۳۶ـ فرض کنید $I_n=\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx$ برای $n\in N$، در این صورت $\lim_{n\to\infty}I_n$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) 0
۲) -1
۳) 1
۴) وجود ندارد.

۱۳۷ـ اگر $\mu=\mu(r,s,t)$ و $r=2x+3y-z$ ، $s=-4x-y+z$ و $t=7x-2y-z$ آن‌گاه کدام رابطه‌ی زیر صحیح است؟
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) $5\mu_x+\mu_y+\mu_z=0$
۲) $\mu_x+\mu_y-5\mu_z=0$
۳) $\mu_x+\mu_y+5\mu_z=0$
۴) $\mu_x+5\mu_y+\mu_z=0$

۱۳۸ـ فرض کنید $f(x)=\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}\,du\,dt$ مقدار $f(\pi)$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) 0
۲) -1
۳) 1
۴) $\sqrt{2}$

۱۳۹ـ حجم ناحیه محصور به رویه $(5x+2y+z)^2+(y-z+5)^2+(5z+3)^2=25$ برابر است با: (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{100\pi}{3}$
۲) $\frac{20\pi}{3}$
۳) $\frac{125\pi}{3}$
۴) $\frac{500\pi}{3}$

۱۴۰ـ فرض کنید $f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه ۳ باشد که دارای سه ریشه حقیقی است. اگر $|f(2i)|=8$، آنگاه داریم:
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) تمام ریشه‌های $f(x)$ با یکدیگر برابرند.
۲) $f(x)$ یک ریشه مثبت با درجه تکرار ۱ دارد.
۳) تمام ریشه‌های $f(x)$ اعدادی مثبت هستند.
۴) $f(x)$ یک ریشه مثبت با درجه تکرار ۲ دارد.

۱۴۱ـ اگر a_n و b_n دو دنباله مثبت باشند و به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داشته باشیم $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge\frac{n}{n+1}$ و $\frac{b_{n+1}}{b_n}\ge\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$، در این صورت $\sum a_n$ و $\sum b_n$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) واگرا ـ واگرا
۲) واگرا ـ همگرا
۳) هر دو سری می‌توانند همگرا یا واگرا باشند.
۴) همگرا ـ واگرا

۱۴۲ـ فرض کنید $f:[0,2]\to[0,2]$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت کدام گزینه در مورد معادله $1+9x=\int_0^{x^2}f(t)dt$، صحیح است؟
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) دقیقاً یک جواب دارد.
۲) دقیقاً دو جواب دارد.
۳) جواب ندارد.
۴) دو جواب در $[0,1]$ و یک جواب در $[1,2]$ دارد.

۱۴۳ـ انتگرال‌های ناسره $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ و $\int_1^{+\infty}\frac{1+\sin x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) واگرا ـ واگرا
۲) همگرا ـ همگرا
۳) واگرا ـ همگرا
۴) همگرا ـ واگرا

۱۴۴ـ مقدار $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{7^{n+1}}$، برابر کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{1}{27}$
۲) $\frac{7}{27}$
۳) $\frac{11}{27\times49}$
۴) $\frac{22}{27\times49}$

۱۴۵ــ فرض کنید $I_n=\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+4)^n}$، در این صورت کدام‌یک از روابط زیر صحیح است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) $32I_5=7I_4+\frac{1}{625}$
۲) $32I_5=8I_4+\frac{1}{625}$
۳) $32I_5=16I_4+\frac{1}{625}$
۴) $32I_5=15I_4+\frac{1}{625}$

۱۴۶ــ مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{e^{x^2}dx}{e^{(1-x)^2}+e^{x^2}}$، کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) 0
۲) $\frac{1}{2}$
۳) 1
۴) $\frac{2}{3}$

۱۴۷ــ هرگاه C مثلثی با رئوس $(0,0)$ و $(1,0)$ و $(0,1)$ در جهت مثلثاتی باشد، مقدار انتگرال $\oint_C xydx+(x^2+y^2)dy$، کدام است؟
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{1}{6}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{5}{6}$
۴) $\frac{2}{3}$

۱۴۸ــ مقدار $\iiint_D (x^2+y^2)dV$ را بیابید که در آن D ناحیه محدود به $\frac{1}{8}$ اول و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و استوانه $r=\sin\theta$ می‌باشد.
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{6}{75}$
۲) $\frac{7}{75}$
۳) $\frac{9}{75}$
۴) $\frac{8}{75}$

۱۴۹ــ فرض کنید $F(x,y,z)=(xy^2,yz^2,x^2z)$، اگر S کره‌ای به شعاع ۳ حول مبدأ باشد، مقدار $\iint_S F.ds$ کدام است؟ $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح به سمت بالا است. (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{962\pi}{5}$
۲) $\frac{968\pi}{5}$
۳) $\frac{972\pi}{5}$
۴) $\frac{970\pi}{5}$

۱۵۰ــ فرض کنید S رویه‌ای باشد که بین صفحه xy و $x^2+y^2+z=4$ واقع است که در آن $z\geq 0$ می‌باشد. شار برونسوی عبــوری از S بــه وســیله $F(x,y,z)=3x\vec{i}+xz\vec{j}+z^2\vec{k}$، کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{132\pi}{3}$
۲) $\frac{134\pi}{3}$
۳) $\frac{138\pi}{3}$
۴) $\frac{136\pi}{3}$

۱۵۱ــ فرض کنید S سطح ناحیه‌ای باشد که $2x+3y+z=6$ از ربع اول جدا می‌کند و $f(x,y,z)=x+y$ می‌باشد. مقدار $\iint_S fds$، کدام است؟
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) $2\sqrt{14}$
۲) $3\sqrt{14}$
۳) $5\sqrt{14}$
۴) $4\sqrt{14}$

۱۵۲ــ معادله زیر، در مختصات کروی، معرف چه شکلی است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

$$3\sin\phi\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=5\cos\phi+\frac{12}{\rho}$$

۱) یک خط
۲) یک صفحه
۳) یک استوانه
۴) یک کره

۱۵۳ــ فرض کنید z_1، z_2، z_3 و z_4 ریشه‌های چهارم $4e^{\frac{4\pi i}{3}}$ باشند، که هر z_i در ربع iام صفحه‌ی مختلط قرار دارد. در این صــورت مقــدار $\frac{z_3+z_4}{z_1+z_2}$، کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) -1
۲) 1
۳) $-1+i\sqrt{3}$
۴) $i+\sqrt{3}$

۱۵۴ــ اگر $A_n=\frac{1}{n^2}tg^{-1}(\frac{1}{n})+\frac{2}{n^2}tg^{-1}(\frac{2}{n})+\cdots+\frac{n}{n^2}tg^{-1}(\frac{n}{n})$، مقدار $\lim_{n\to\infty} A_n$، کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$
۲) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$
۳) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$
۴) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}$

۱۵۵ــ در مورد همگرایی و واگرایی انتگرال‌های $A=\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}+x^3\sqrt{x}}$ و $B=\int_1^{+\infty}\frac{2+\sin x}{e^x+x+1}$ گزینه‌ی صحیح کدام است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) A و B هر دو واگرا
۲) A و B هر دو همگرا
۳) A همگرا و B واگرا
۴) A واگرا و B همگرا

۱۵۶ــ شعاع همگرایی $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}(2x-1)^n$، کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{1}{e}$
۲) e
۳) $\frac{1}{2e}$
۴) $2e$

۱۵۷ـ فرض کنید $S_n=\int_1^2 e^{x^2}\sin(nx)dx$، $\lim_{n\to+\infty} S_n$، کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) e^4-e ۴) حد ندارد

۱۵۸ـ در مورد همگرایی و واگرایی سری‌های $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor}}{n}$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-\sqrt{n}}$، به ترتیب کدام مورد صحیح است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است) (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) واگرا ـ همگرا ۲) واگرا ـ واگرا ۳) همگرا ـ همگرا ۴) همگرا ـ واگرا

۱۵۹ـ فرض کنید $A=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\sin x+\sin y}$ و همچنین $B=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2)-x^2}{x^2+y}$، کدام گزینه در مورد A و B صحیح است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) A وجود ندارد و $B=0$ ۲) $A=1$ و B وجود ندارد. ۳) A و B وجود ندارند. ۴) $A=1$ و $B=0$

۱۶۰ـ فرض کنید R ناحیه‌ی محدود به چهارضلعی با رئوس (۰,۰)، (۱,۲)، (۲,۱) و (۳,۳) می‌باشد. مقدار انتگرال $\iint_R \frac{e^{2x-y}}{1-2x+4y}dA$، برابر کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{1}{3}(\mathrm{Ln}\sqrt{7})(e^3+1)$ ۲) $(\mathrm{Ln}\sqrt{7})(e^3-1)$ ۳) $\frac{1}{3}(\mathrm{Ln}\sqrt{7})(e^3-1)$ ۴) $(\mathrm{Ln}\sqrt{7})(e^3-1)$

۱۶۱ـ از تقاطع صفحه‌ی $x+y+2z=2$ و مخروط $z=x^2+y^2$ ناحیه‌ای بیضی شکل حاصل می‌شود. اگر A و B به‌ترتیب نزدیک‌ترین و دورترین نقطه‌ی این بیضی از مبدأ باشد، فاصله‌ی A از B کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۱۶۲ـ مقدار $\oint_C \vec{F}.\vec{dr}$، کدام است؟ اگر $F=(e^{x^2}+y,\sin y^2-z,z^5-2x)$ و C، منحنی فصل مشترک استوانه‌ی $x^2+y^2=2$ و صفحه‌ی $2x+3y+z=4$ باشد، که در جهت مثلثاتی طی شده است. (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) 2π ۲) 4π ۳) 8π ۴) 16π

۱۶۳ـ فرض کنید کره‌ی S به شعاع a بالای صفحه‌ی xy قرار دارد و در مبدأ مختصات بر صفحه‌ی xy مماس است. کدام‌یک از انتگرال‌های زیر حجم قسمتی از کره را که بالای صفحه‌ی $z=a$ قرار دارد، نشان می‌دهد؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{a\sec\phi}^{2a\cos\phi}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$ ۲) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{a\sin\phi}^{2a\cos\phi}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$

۳) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{a\cos\phi}^{2a\sec\phi}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$ ۴) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{a\sin\phi}^{2a\sec\phi}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$

۱۶۴ـ فرض کنید $\vec{F}=(\cos x^3+(y+z)^2,y^4+xz,1+xz)$ و S بخشی از کره‌ی $x^2+y^2+(z-1)^2=5$ برای $z>0$ باشد. شار رو به خارج $\vec{F}$ روی سطح S کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) 3π ۲) 4π ۳) 5π ۴) 6π

۱۶۵ـ فرض کنید S سطح نیم‌کره‌ی $x^2+y^2+z^2=9$ برای $z>0$ و $\vec{N}$ بردار قائم یکه‌ی رو به خارج رویه‌ی S باشد. اگر $\vec{F}=(2x+yz,y+xz,2+z)$، آن‌گاه مقدار $\iint_S \vec{F}.\vec{N}ds$، کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) 162π ۲) 164π ۳) 92π ۴) 90π

۱۶۶ـ مقدار $\int_C \frac{x^5+x^3y^2-3y}{x^2+y^2}dx+\frac{yx^2+y^3+3x}{x^2+y^2}dy$، کدام است؟ هرگاه C منحنی $x^4+y^4=1$ در جهت مثلثاتی باشد. (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) ۰ ۲) 2π ۳) 4π ۴) 6π

۱۶۷ـ مقدار $\lim_{x\to\infty}[2\sin\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cos n]^n$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۶)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) e ۴) $+\infty$

۱۶۸ـ انتگرال‌های $A=\int_1^{\infty}\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$ و $B=\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ مفروضند، کدام مورد صحیح است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۶)

۱) A و B هر دو همگرای مشروط ۲) A و B هر دو همگرای مطلق

۳) A همگرای مطلق و B همگرای مشروط ۴) A همگرای مشروط و B همگرای مطلق

۱۶۹ـ با فرض $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\alpha$ مقدار $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^2}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۶)

۱) $-\frac{\alpha}{8}$ ۲) $-\frac{\alpha}{16}$ ۳) $-\frac{3\alpha}{8}$ ۴) $-\frac{3\alpha}{16}$

۱۷۰ـ $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^4}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۶)

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) وجود ندارد.

۱۷۱ـ فرض کنید $h(x,y)=f(\frac{y}{x})+xg(\frac{y}{x})$ که در آن f و g توابع مشتق‌پذیر تا مرتبه دوم هستند. در این صورت مقدار $x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ برابر کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۶)

۱) $xy\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}$ ۲) $-xy\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}$ ۳) $2xy\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}$ ۴) $-2xy\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}$

۱۷۲ـ اگر دو استوانه دوار، هر یک به شعاع ۳ یکدیگر را در زاویه‌ای قائمه قطع کنند، حجم ناحیه مشترک واقع در یک هشتم اول آن‌ها چند برابر r^3 است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۱

۱۷۳ـ مقدار انتگرال معین $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^4 x\,dx$ کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۷۴ـ مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$ برابر کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۲)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۷۵ـ فاصله همگرایی سری $x+\frac{a-b}{2!}x^2+\frac{(a-b)(a-2b)}{3!}x^3+\cdots$ کدام است؟ (a و b ثابت‌های مثبت‌اند). (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۲)

۱) $[-b,b)$ ۲) $(-b,b]$ ۳) $[-\frac{1}{b},\frac{1}{b})$ ۴) $(-\frac{1}{b},\frac{1}{b}]$

۱۷۶ـ فرض کنید رویه‌ی S بخشی از صفحه $3x+4y+12z=1$ است که داخل استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ قرار دارد. مساحت رویه برابر کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{4\pi}{5}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{13\pi}{5}$ ۴) $\frac{13\pi}{3}$

۱۷۷ـ مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $r(\theta)=\sin\theta$ حول محور xها کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۳)

۱) $16\pi^2$ ۲) $8\pi^2$ ۳) $4\pi^2$ ۴) $32\pi^2$

۱۷۸ـ مقدار $I=\iint_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2}\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$، کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۳)

۱) 2π ۲) -2π ۳) -4π ۴) 4π

۱۷۹ـ حاصل انتگرال $I=\int_0^2\int_y^2 e^{\frac{2y}{x}}\,dxdy$، کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{e^2+1}{2}$ ۲) e^2-1 ۳) $\frac{e^2-1}{2}$ ۴) e^2+1

۱۸۰ـ فرض کنیم D ناحیه محدود بین کره $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ و استوانه $x^2+y^2=a^2$ باشد و S سطح ناحیه D، اگر $\vec{F}=(\sqrt{3}x+y\sin z)\vec{i}+(\sqrt{3}y+x\sin z)\vec{j}+(\sqrt{3}z+xy\cos xy)\vec{k}$ یک میدان برداری باشد. در آن صورت شار رو به بیرون از سطح S توسط $\vec{F}$ کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۴)

۱) $36\sqrt{3}\,\pi a^3$ ۲) $36\pi a^3$ ۳) $12\sqrt{3}\,\pi a^3$ ۴) $12\pi a^3$

۱۸۱ـ مقدار دترمینان ماتریس زیر کدام است؟ (نفت ـ سراسری ۹۶)

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۲ & ۲ & ۴ \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۲ & -۲ & ۲ \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۴ & ۴ & ۲ \\ \frac{۱}{۸} & -\frac{۱}{۸} & ۸ & -۸ & ۲ \\ \frac{۱}{۱۶} & \frac{۱}{۱۶} & ۱۶ & ۱۶ & ۲ \end{bmatrix}$$

۱) $-\frac{۲۰۲۵}{۴}$
۲) $-\frac{۲۰۲۵}{۱۶}$
۳) $\frac{۲۰۲۵}{۴}$
۴) $\frac{۲۰۲۵}{۱۶}$

۱۸۲ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{n}}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۹۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) e ۴) ∞

۱۸۳ـ مقدار $A=۲+۳+\frac{۱۲}{۴}+\frac{۲۰}{۸}+\frac{۳۰}{۱۶}+\frac{۴۲}{۳۲}+\frac{۵۶}{۶۴}+\cdots$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۹۱)

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

۱۸۴ـ اگر مشتق تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ همه جا منفی باشد و $f(۰)=۱$ و $\frac{d}{dx}(f^{-۱}(x))=-\frac{۱}{۱+x^۲}$ آنگاه مقدار $\int_۰^۱ f^{-۱}(x)dx$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۹۱)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}\text{Ln}۲$ ۴) ∞

۱۸۵ـ نقطه‌های $P(۰,۰,۰)$، $Q(۰,۱,-۱)$ نقاط بحرانی تابع $f(x,y,z)=x^۲+۱۲yz+(y-z)^۳$ هستند. نوع این نقاط کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۹۱)

۱) P نقطه زینی و Q نقطه می‌نیمم
۲) P و Q هر دو نقطه زینی
۳) P و Q هر دو نقطه ماکسیمم
۴) P و Q هر دو نقطه ماکسیمم

۱۸۶ـ با این فرض که u تابعی هموار از دو متغیر t و x است و $\frac{\partial u}{\partial x}=-\alpha\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}$ عبارت $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۹۱)

۱) $(۱)^k ga^k\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$
۲) $(-۱)^k\alpha^k\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$
۳) $(-۱)^k\alpha^k\frac{\partial^{۲^k} u}{\partial t^{۲^k}}$
۴) $(-۱)^k\alpha^k\frac{\partial^{۲k} u}{\partial t^{۲k}}$

۱۸۷ـ دنباله $\{x_n\}$ به‌صورت $n\ge ۲$ ، $x_۱=۱$ ، $x_۲=۱$ ، $x_{n+۱}=x_n+x_{n-۱}$ تعریف می‌شود. مقدار $\sum\limits_{n=۲}^{\infty}\frac{x_n}{x_{n-۱}\cdot x_{n+۱}}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ∞

۱۸۸ـ مقدار $\int_۰^{\frac{e+e^{-۱}}{۲}}\cosh^{-۱}x\,dx+\int_۰^۱\cosh x\,dx$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۹۲)

۱) $\cosh ۱$ ۲) $۲\cosh ۱$ ۳) $\cosh ۲-۲\sinh ۱+۱$ ۴) $\cosh ۲-\cosh ۱$

۱۸۹ـ مشتق تابع $f(x)=\text{Ln}(\frac{\sin x}{۲})+\text{Ln}(۱+\text{tg}^۲\frac{x}{۲})$ در نقطه $x=\frac{x}{۲}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۹۲)

۱) $-\text{Ln}۲$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\text{Ln}۲$

۱۹۰ـ حجم ناحیه R که بالای صفحه xy است و از اطراف به هذلولی گون یک پارچه $x^۲+y^۲-\frac{z^۲}{۴}=۱$ و از بالا به رویه $۴-z=x^۲+y^۲$ محدود می‌باشد، کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{۳\pi}{۲}-\frac{۲\pi\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $۵\pi-\pi\sqrt{۳}$ ۳) $۱۰\pi-۴\pi\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۱۴\pi}{۳}$

۱۹۱ـ برای تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^۲y}{x^۲+y^۲} & ; \quad (x,y)\ne(۰,۰)\\ ۰ & ; \quad (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟ (آمار ـ سراسری ۹۲)

۱) f در مبدا ناپیوسته است.
۲) f_y در مبدا پیوسته است.
۳) f_x در مبدا ناپیوسته است.
۴) مشتقات پاره‌ای f در مبدا موجود نیست.

۱۹۲ـ انتگرال $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۹۲)

۱) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{4\sin\theta} f(r)rdrd\theta$
۲) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{4\sin\theta} f(r)rdrd\theta$
۳) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{4\cos\theta} f(r)rdrd\theta$
۴) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{4\cos\theta} f(r)rdrd\theta$

۱۹۳ـ معادله خط مماس بر محل تلاقی رویه‌های $x+z-4=0$ و $x^2+y^2-2=0$ در نقطه $p(0,\sqrt{2},4)$ عبارت است از: (آمار ـ سراسری ۹۲)

۱) $x=2t\sqrt{2}, y=\sqrt{2}, z=4$
۲) $x=2t\sqrt{2}, y=\sqrt{2}, z=4-2t\sqrt{2}$
۳) $x=t, y=\sqrt{2}, z=4+t$
۴) $x=0, y=2\sqrt{2}-t\sqrt{2}, z=4$

۱۹۴ـ حاصل $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{e^{\sqrt{y}}}{y-y\sqrt{y}}dydx$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۹۲)

۱) $e-1$
۲) $2(e-1)$
۳) e
۴) $2e$

۱۹۵ـ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد نامنفی باشد، در این صورت کدام گزینه درست است؟ (آمار ـ سراسری ۹۲)

۱) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ همگرا باشد، آن گاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا است.
۲) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} na_{2n}$ همگرا باشد، آن گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.
۳) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگرا باشد، آن گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا است.
۴) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگرا باشد، آن گاه $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{a_n}$ همگرا است.

۱۹۶ـ برد تابع با ضابطه $f(x)=Ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$ کدام بازه است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۱)

۱) $(-\infty,0]$
۲) $[0,+\infty)$
۳) $(-1,1)$
۴) $(-\infty,-1)$

۱۹۷ـ با حروف کلمه FALSAFEH چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۱)

۱) ۵۴۶
۲) ۵۸۴
۳) ۶۰۰
۴) ۶۰۶

۱۹۸ـ سطح محدود به نمودار تابع $y=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ در بازه $[2,t]$ را حول محور xها دوران می‌دهیم. اندازه حجم حاصل وقتی $t\to\infty$ چند برابر π است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۱)

۱) $2-Ln3$
۲) $Ln3-1$
۳) $\frac{1}{2}(Ln3-1)$
۴) $\frac{1}{2}(2-Ln3)$

۱۹۹ـ دایره‌های متساوی در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a طوری محاط شده‌اند که تعداد این دایره‌ها در n سطر متوالی به ترتیب n,...........,۱,۲,۳ می‌باشد. اگر S_n مساحت کل این دایره‌ها باشد، $\lim_{n\to\infty} S_n$ چند برابر مساحت مثلث است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{3}$
۲) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$
۳) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$
۴) $\frac{2\pi}{3\sqrt{6}}$

۲۰۰ـ طول نقاط عطف منحنی به معادله پارامتری $(x=\cos^3 t, y=\sin^3 t)$ کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۱)

۱) $-1,0,1$
۲) $-1,1$
۳) $0,1$
۴) فاقد نقطه عطف

۲۰۱ـ دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\cos(\sin x)}+Arc\sin\frac{1+x^2}{2x}$ کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۲)

۱) $[-1,1]$
۲) $\{-1,1\}$
۳) $(0,1]$
۴) $\{\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\}$

۲۰۲ـ اگر $g(x)=\log_2(1-3x), f(x)=x+[-x]$ برد تابع gof کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۳)

۱) $[0,2)$
۲) $(0,2]$
۳) $[0,1)$
۴) $(0,1]$

۲۰۳ـ نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x-[x] & ; \text{زوج } [x] \\ 1+[x]-x & ; \text{فرد } [x] \end{cases}$ چگونه است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۳)

۱) ناپیوسته با دوره تناوب ۱
۲) ناپیوسته با دوره تناوب ۲
۳) پیوسته با دوره تناوب ۱
۴) پیوسته با دوره تناوب ۲

۲۰۴ـ تعداد نقاط تلاقی نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{\frac{x-3}{4-x}}$ و $y=2-|x-3|$ کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۳)

۱) صفر
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۲۰۵ـ مجموعه نقاط $S=\{(x,y)\in z^2 : |x+y|\le 2 , |x-y|\le 2\}$ دارای چند عضو است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۳)

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۲۰۶ـ اگر $A=\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^4}$ باشد، آنگاه حاصل $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۳)

۱) $A+1$ ۲) $1-A$ ۳) $\frac{1}{A}$ ۴) A

۲۰۷ـ خط مماس بر منحنی پارامتری $(x=t^2+2t \ , \ y=2t^2-3t+1)$ در نقطه $(8,3)$ محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۴)

۱) $-\frac{11}{3}$ ۲) $-\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

۲۰۸ـ مشتق پانزدهم تابع $y=(x^2-1)e^x$ در نقطه $(1,0)$ چند برابر e است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۴)

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۴۰

۲۰۹ـ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=(\frac{1}{2}-x)\cos x+\sin x-\frac{x^2-x}{4}$، در بازه $[0,\frac{\pi}{2}]$ چگونه است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۴)

۱) $x=\frac{1}{2}$ مینیمم، $x=\frac{\pi}{3}$ ماکزیمم
۲) $x=\frac{1}{2}$ مینیمم، $x=\frac{\pi}{6}$ ماکزیمم
۳) $x=\frac{1}{2}$ ماکزیمم، $x=\frac{\pi}{3}$ مینیمم
۴) $x=\frac{1}{2}$ ماکزیمم، $x=\frac{\pi}{6}$ مینیمم

۲۱۰ـ نقطه M روی منحنی به معادله $\sqrt{4x+y}-\operatorname{Ln}y=3$ تغییر مکان می‌دهد. در حوالی نقطه $y=1$ اگر مقدار $\frac{dy}{dt}$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{dx}{dt}$ کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۲۱۱ـ اگر $f(x)=\log_2(x-x^2)$ و $g(x)=\sqrt{x+3}$ باشد، دامنه‌ی تابع gof، کدام بازه است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۶)

۱) $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$ ۲) $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2},\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$ ۳) $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{4},\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right]$ ۴) $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{4},\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right]$

۲۱۲ـ مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $y=\sqrt{2x+6}$ و محور xها و خط قائم بر منحنی در نقطه $(5,4)$، کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{62}{3}$ ۲) $\frac{64}{3}$ ۳) $\frac{68}{3}$ ۴) $\frac{70}{3}$

۲۱۳ـ حجم حاصل از دوران سطح محدود به دایره $x^2+y^2=1$ و سهمی $2y^2=3x$ در داخل سهمی، حول محور xها کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{11\pi}{24}$ ۲) $\frac{19\pi}{48}$ ۳) $\frac{17\pi}{48}$ ۴) $\frac{7\pi}{24}$

۲۱۴ـ طول قوس منحنی $y=1-\operatorname{Ln}(\cos x)$ وقتی $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$ تغییر کند، کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۶)

۱) $\operatorname{Ln}3$ ۲) $\operatorname{Ln}2$ ۳) $\operatorname{Ln}\sqrt{3}$ ۴) $\operatorname{Ln}\frac{3}{2}$

۲۱۵ـ برد تابع با ضابطه $f(x)=(1-x+\lfloor x\rfloor)^{-\frac{1}{2}}$ کدام است؟ (نماد ⌊ ⌋ به مفهوم جزء صحیح است.) (جغرافی ـ سراسری ۹۲)

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $[1,+\infty)$

۲۱۶ـ نمودارهای دو تابع $f(x)=2^x$ و $g(x)=\frac{1}{2}\log x^2$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟ (جغرافی ـ سراسری ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

۲۱۷ـ در بسط عبارت $(x^2-\frac{1}{x}+1)^6$ مجموع جملات فاقد x کدام است؟ (پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۶۴ ۲) ۶۸ ۳) ۷۲ ۴) ۷۶

۲۱۸ـ تابع با ضابطه $y=||x|-1|+|x|-1$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟ (پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۱)

۱) $(-1,0)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1)$

۲۱۹ـ خط $y=2x$ مجانب‌های منحنی به معادله $y=\frac{9x-2}{x^2-x-6}+\frac{2x}{x+2}$ را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. فاصله این دو نقطه، کدام است؟ (پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۳)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۲۲۰ـ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x)=(|x+1|-|x|)^2$، کدام است؟ (پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۴)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۲۱ـ حد نقطه تلاقی دو خط به معادلات $cy+(c^2+2)x=2$ و $y+3x=c+1$ وقتی $c\to 1$، کدام است؟ (علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۶)

۱) $(3,-7)$ ۲) $(2,-4)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(1,-1)$

۲۲۲ـ نقطه M بر روی منحنی به معادله ضمنی $Ln(x^2-3)+\sqrt{3y+2x}-y+2=0$ در حرکت است. در حوالی $x=2$ اگر $\frac{dx}{dt}=0/05$ باشد، مقدار $\frac{dy}{dt}$ کدام است؟ (علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۶)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

۲۲۳ـ نقطه $A(2,3,4)$ یک رأس مکعب است که یکی از وجه‌های آن در صفحه‌ای به معادله $4x+4y-7z+2=0$ قرار دارد، حجم این مکعب کدام است؟ (علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{8}{27}$ ۲) $\frac{27}{64}$ ۳) $\frac{64}{27}$ ۴) $\frac{27}{8}$

۲۲۴ـ فرض کنید $I_k=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin kx\,dx$. در این صورت $\lim\limits_{k\to+\infty}I_k$ برابر است با:

(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) π ۴) e^{π^2}

۲۲۵ـ حاصل انتگرال $\int_0^2\int_{2x}^{6-x}f(x,y)dydx$ با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۱)

۱) $\int_0^6\int_0^{\frac{y}{2}}f(x,y)dxdy$

۲) $\int_0^6\int_{\frac{y}{2}}^{6-y}f(x,y)dxdy$

۳) $\int_0^4\int_0^{\frac{y}{2}}f(x,y)dxdy+\int_4^6\int_0^{6-y}f(x,y)dxdy$

۴) $\int_0^2\int_0^{\frac{y}{2}}f(x,y)dxdy+\int_2^6\int_0^{6-y}f(x,y)dxdy$

۲۲۶ـ اگر C مرز ناحیه $(x-2)^2+(y-2)^2\le 1$ باشد که در جهت مثبت در نظر گرفته شده است، مقدار $\oint_C\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ کدام است؟

(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۱)

۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) ۰

۲۲۷ـ فرض کنیم z_1 و z_2 و z_3 بردارهایی با طول واحد باشند و $z_1+z_2+z_3=0$، در این صورت کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۱)

۱) $z_1^3+z_2^3+z_3^3=0$ ۲) $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ ۳) $z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=0$ ۴) $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0$

۲۲۸ـ اگر W چهاروجهی با رئوس $(0,0,0),(\frac{1}{3},0,0),(0,\frac{1}{2},0),(0,0,1)$ باشد، در این صورت حجم W ، کدام است؟

(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{1}{36}$ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۲۲۹ـ فرض کنید $f(x,y)$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد. مقدار $\int_0^2\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}}f(x,y)dydx$ ، کدام است؟

(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۲)

۱) $\int_0^2\int_{\frac{y^2}{4}}^{2+\sqrt{4-y^2}}f(x,y)dxdy+\int_2^{2\sqrt{2}}\int_{\frac{y^2}{4}}^{2}f(x,y)dxdy$

۲) $\int_0^2\int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}}f(x,y)dxdy+\int_2^{2\sqrt{2}}\int_{\frac{y^2}{4}}^{2}f(x,y)dxdy$

۳) $\int_0^2\int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}}f(x,y)dxdy+\int_2^4\int_{\frac{y^2}{4}}^{2}f(x,y)dxdy$

۴) $\int_0^{2\sqrt{2}}\int_{\frac{y^2}{4}}^{2}f(x,y)dxdy$

۲۳۰ـ چند جمله‌ای $f(z)=(z^2+1)(z^4-1)(z^3-1)$ در دستگاه اعداد مختلط، چند جواب متمایز دارد؟

(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۲)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۳۱ـ تابع $f(x,y)=e^{(x^2+y^2-xy+2y+x)}$ در نقطه $(-\frac{4}{3},-\frac{5}{3})$ دارای ....

(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۳)

۱) مینیمم موضعی می‌باشد. ۲) ماکزیمم موضعی می‌باشد. ۳) نقطه زینی می‌باشد. ۴) نقطه بحرانی نمی‌باشد.

۲۳۲ـ حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به منحنی‌های $y = ۲x - x^۲$ و $(x-۱)^۲ + y^۲ = ۱$ حول محور x ها، کدام است؟
(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{۴\pi}{۱۵}$
۲) $\frac{\pi}{۲}$
۳) $\frac{۱۴\pi}{۳}$
۴) $\frac{۳\pi}{۵}$

۲۳۳ـ اگر D، ناحیه محدود به خم $y = \frac{۱}{x}$ و خط $y = ۱$ و محور y ها باشد، حاصل $\iint_D -\frac{dA}{x+y}$، کدام است؟
(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\pi}{۲} + \text{Ln}۲$
۲) $-\frac{\pi}{۲} + \text{Ln}۲$
۳) $-\pi + \text{Ln}۲$
۴) $\text{Ln}\sqrt{۲}$

۲۳۴ـ اگر $\vec{F} = < xz\,,\, xy\,,\, ۳xz >$ و c مرز بخشی از صفحهٔ $۲x + y + z = ۲$ در یک هشتم اول و در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت وقتی از بالا مشاهده می‌شود پیموده شده باشد، مقدار انتگرال $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟
(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۴)

۱) ۳-
۲) ۲
۳) ۱-
۴) ۳

۲۳۵ـ مقدار سری $\sum_{n=۲}^{+\infty} \frac{n^۲}{۵^n}$، کدام است؟
(مهندسی نساجی، تکنولوژی نساجی و شیمی نساجی و علوم الیاف ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{۱۳}{۳۲}$
۲) $\frac{۱۵}{۳۲}$
۳) $\frac{۴۱}{۱۶۰}$
۴) $\frac{۴۳}{۱۶۰}$

۲۳۶ـ فرض کنید $F = (x, ۲y, ۳z)$ و D کره‌ای به حجم V حول مبدأ مختصات باشد. اگر رویه S سطح روی D و $\vec{N}$ بردار قائم رو بـه خـارج بـر S باشد، چنانچه $I = \iint_S F.Nds$، کدام رابطه صحیح است؟
(مهندسی نساجی، تکنولوژی نساجی و شیمی نساجی و علوم الیاف ـ سراسری ۹۵)

۱) $I = V$
۲) $I = ۲V$
۳) $I = ۶V$
۴) $I = ۳V$

۲۳۷ـ اگر $f(x) = \begin{cases} x & ;\ \text{x عددی گویا} \\ -x & ;\ \text{x عددی غیر گویا} \end{cases}$ در این صورت $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{۱ + ۲x^۲}$ برابر است با:
(مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۱)

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) ۰
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) وجود ندارد.

۲۳۸ـ حجم جسمی به ارتفاع h سانتی‌متر که مقطع عرضی آن با هر صفحه‌ی افقی به ارتفاع y بالای قاعـده‌ی آن، قطـاع دایـره‌ای بـه شـعاع a سانتی‌متر و زاویهٔ $۲\pi(۱ - \frac{y}{h})$ رادیان است، کدام است؟
(مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\pi ah}{۲}$
۲) $\frac{\pi a^۲ h}{۲}$
۳) πah
۴) $\pi a^۲ h$

۲۳۹ـ فرض کنید R ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $y = x^۲ + ۱$ و $y = \frac{x^۳ + |x^۳|}{۲}$ که $-۱ \le x \le ۱$ باشد، مساحت R کدام است؟
(مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{۲۷}{۱۴}$
۲) $\frac{۲۹}{۱۲}$
۳) $\frac{۲۷}{۱۲}$
۴) $\frac{۲۹}{۱۴}$

۲۴۰ـ اگر $\alpha > ۰$، کدام مورد برای سری $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{\cos(۳^n \alpha)}{۳^n}$، صحیح است؟
(مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۵)

۱) برای $\alpha \ge ۱$ همگرا و برای $۰ < \alpha < ۱$ واگراست.
۲) برای $\alpha \ge ۱$ واگرا و برای $۰ < \alpha < ۱$ همگراست.
۳) همواره همگراست.
۴) همواره واگراست.

۲۴۱ـ فرض کنید C منحنی $\alpha(t) = ((۱-t)\cos t, t^۲ + ۱, ۲t + ۱)$ که $۰ \le t \le ۱$ باشد. اگـر $f(x,y,z) = (۲x + z, z, y + x)$ باشـد، مقـدار $\int_C \vec{F}.\vec{dr}$ کـدام است؟
(مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۱-
۲) ۰
۳) ۱
۴) ۳

۲۴۲ـ فرض کنید $f(x,y) = xy - xy^۳ - x^۳y$، به‌طوری که $x > ۰$ و $y > ۰$، در این‌صورت مقدار تابع f در نقطه بحرانی آن کدام است و این نقطه از چه نوع نقاطی است؟
(مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$، ماکزیمم
۲) $\frac{۱}{۴}$، زینی
۳) $\frac{۱}{۸}$، ماکزیمم
۴) $\frac{۱}{۸}$، مینیمم

۲۴۳ـ حجم محصور به رویه‌های $r = z(۱ + \sin\theta)$ و $z = ۱$، کدام است؟
(مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{۶}$
۲) $\frac{\pi}{۲}$
۳) $\frac{\pi}{۳}$
۴) π

۲۴۴ـ فرض کنید $\begin{cases} x^2+y^3+UV+U=4 \\ xy+U^2+V=3 \end{cases}$، با توجه به اینکه U و V را می‌توان به‌عنوان توابعی از x و y در نقاط نزدیک بـه $(x,x,U,V)=(1,1,1,1)$ بدست آورد، در این صورت مقدار $U_x - V_x$ حول نقطه $\begin{vmatrix} x=1 \\ y=1 \end{vmatrix}$، کدام است؟ (مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۳− ۴) ۵−

۲۴۵ـ اگر x عددی گنگ باشد $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^m)$ برابر است با: (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۱)

۱) ۱− ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ∞

۲۴۶ـ حد دنباله‌ی $\{x_n\}$ با تعریف $\begin{cases} x_1=1 \\ x_{n+1}=\dfrac{x_n}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{x_n} \quad n\geq 1 \end{cases}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۱)

۱) $\sqrt{2}-1$ ۲) موجود نیست. ۳) $1+\sqrt{2}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$

۲۴۷ـ مجموع سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ برابر است با: (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۴۸ـ مساحت محصور به‌وسیله $x^2-y^2=\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۱)

۱) 4π ۲) π ۳) ۴ ۴) ۲

۲۴۹ـ انحنای منحنی $r=2+\sin\theta$ در نقطه‌ای که $\theta=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{3}{27}$ ۲) $\frac{3}{27}$ ۳) $\frac{12}{27}$ ۴) $\frac{24}{27}$

۲۵۰ـ در منحنی با نمایش $(-\infty<t<\infty)$؛ $\vec{r}(t)=(e^t\cos t)\vec{i}+(e^t\sin t)\vec{j}+e^t\vec{k}$ اگر طول قوس را به‌عنوان پارامتر انتخاب کنیم رابطـه بـین طـول قوس s و t کدام‌یک از روابط است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۱)

۱) $s=\sqrt{3}(e^t-1)$ ۲) $s=\sqrt{2}(e^t+1)$ ۳) $s=\sqrt{3}(e^t+1)$ ۴) $s=\sqrt{2}(e^t-1)$

۲۵۱ـ حجم ناحیه‌ای از فضا که از پایین به رویه‌ی $z=r^2$ و از بالا به رویه‌ی $z=r$ محدود است توسط کدام انتگرال به‌دست می‌آید؟ (ϕ زاویه‌ی شعاع حامل با جهت مثبت محور z هاست.) (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۱)

۱) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\cos\phi}{\sin^2\phi}}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

۲) $\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\cos\phi}{\sin^2\phi}}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

۳) $\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi}}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

۴) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi}}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

۲۵۲- حاصل $\int_0^{\pi}\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 2π

۲۵۳ـ تابع $z=x^4-x^2-y$ چند نقطه بحرانی روی دایره یکه دارد؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۴

۲۵۴ـ اگر D درون ناحیه $x^2+y^2\leq 1$ باشد آنگاه $\iint_D\dfrac{x^2+xy+1}{(x+y)^2+2}dxdy$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) π ۴) 2π

۲۵۵ـ تعداد جواب‌های معادله‌ی $3x-\int_0^x t^4\cos(t^7)dt=2$ در بازه $[0,1]$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۵۶ـ ناحیه محصور به $y=\cos x$ و $y=0$ را به ازای $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ حول خط $y=-1$ دوران می‌دهیم. حجم ناحیه حاصل از دوران کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۲)

۱) $\pi(1+\frac{\pi}{4})$ ۲) $\pi(1+\frac{\pi}{8})$ ۳) $2\pi(1+\frac{\pi}{8})$ ۴) $2\pi(1+\frac{\pi}{4})$

۲۵۷ـ مقدار $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$ برابر است با:

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۲)

۱) 2π ۲) 0 ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

۲۵۸ـ فرض کنید S بخشی از رویه‌ی $z+y^2=5-x^2$ باشد که بالای صفحه‌ی $z=1$ قرار دارد و جهت آن رو به بالا است. فرض کنید $F(x,y,z)=(z^2,-3xy,x^3y^3)$ مقدار $\iint_S \text{curl}.\text{F}ds$ کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{3\pi}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) صفر

۲۵۹ـ فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر است و $f'(x)=\sinh x^2$ و $f(1)=0$ در این صورت $\int_0^1 f(x)dx$ برابر است با:

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}$ ۲) $\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}$ ۳) $\frac{1}{2}(1-\frac{e}{2}-\frac{1}{2e})$ ۴) $\frac{1}{2}(1+\frac{e}{2}+\frac{1}{2e})$

۲۶۰ـ مقدار $(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})^{3n}+(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^{3n}$ که در آن n یک عدد طبیعی است، کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

۲۶۱ـ جواب انتگرال نامعین $\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$، $a^2+b^2>0$ کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۳)

$$(A=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \theta=\text{arccot}\frac{a}{b})$$

۱) $\frac{1}{A}\log|\cot(\frac{x-\theta}{2})|+C$ ۲) $\frac{1}{A}\log|\cot(\frac{x+\theta}{2})|+C$ ۳) $\frac{1}{A}\log|\text{tg}(\frac{x-\theta}{2})|+C$ ۴) $\frac{1}{A}\log|\text{tg}(\frac{x+\theta}{2})|+C$

۲۶۲ـ حجم جسمی که از دوران قرصی به شعاع a حول یکی از مماس‌هایش حاصل می‌شود برابر است با:

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۳)

۱) π^2a^2 ۲) π^2a^3 ۳) $2\pi^2a^2$ ۴) $2\pi^2a^3$

۲۶۳ـ سری توانی تابع $f(x)=\frac{1}{(2-x)^2}$ روی بازه‌ی .... برابر است با ....

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۳)

۱) $(-2,2)$، $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^n$ ۲) $(-2,2)$، $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}x^n$ ۳) $[-2,2)$، $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+3}}x^n$ ۴) $[-2,2)$، $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}x^n$

۲۶۴ـ با فرض آنکه $a-b$ مضربی صحیح از π نباشد، انتگرال نامعین $\int\frac{dx}{\sin(a-x)\sin(b-x)}$ کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{1}{\sin(a-b)}\log|\frac{\sin(a-x)}{\sin(b-x)}|+C$ ۲) $\frac{1}{\sin(a-b)}\log|\frac{\sin(b-x)}{\sin(a-x)}|+C$

۳) $\frac{1}{\cos(a-b)}\log|\frac{\cos(a-x)}{\cos(b-x)}|+C$ ۴) $\frac{1}{\cos(a-b)}\log|\frac{\cos(b-x)}{\cos(a-x)}|+C$

۲۶۵ـ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\log(\cos\frac{1}{2^n})$ کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۳)

۱) $\log(\sin 1)$ ۲) $\log(\sin\frac{1}{2})$ ۳) $\log(\cos 1)$ ۴) $\log(\cos\frac{1}{2})$

۲۶۶ـ مساحت ناحیه‌ی واقع در داخل نمودار $r = ۳\cos\theta$ و خارج نمودار $r = ۱+\cos\theta$ کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۳)

۱) $\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}}[(۳\cos\theta)^۲-(۱+\cos\theta)^۲]d\theta$

۲) $\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}}[(۳\cos\theta)^۲-(۱+\cos\theta)^۲]d\theta$

۳) $\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}[(۳\cos\theta)^۲-(۱+\cos\theta)^۲]d\theta$

۴) $\int_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{۲\pi}{۳}}[(۳\cos\theta)^۲-(۱+\cos\theta)^۲]d\theta$

۲۶۷ـ با فرض اینکه $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^۲}dx=\sqrt{\pi}$ ، مقدار $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^۲-۲y^۲-۳z^۲}dzdydx$ کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۳)

۱) $\sqrt{\frac{\pi}{۳}}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{۶}}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{\pi}}{۶}$ ۴) $\pi\sqrt{\pi}$

۲۶۸ـ اگر $D=\{(x,y)\,|\,x\geq ۰, y\geq ۰, x^۲+y^۲\leq\pi\}$ ، مقدار انتگرال دوگانه‌ی زیر کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۳)

$$\iint_D xy[\cos(x^۲+y^۲)-\sin(x^۲-y^۲)]dxdy$$

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۶۹ـ حجم محصور بین سهمیگون $(x-۱)^۲+y^۲=z$ و صفحه‌ی $۲x+z=۲$ برابر است با: (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) π ۴) ۲π

۲۷۰ـ مساحت بیضی $(x+۲y)^۲+۴(x-y)^۲=۴$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{۱}{۴\pi}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۴π

۲۷۱ـ اگر $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^۴}=\frac{۲}{۳}$ آنگاه مقدار $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{xdx}{(\sin x+\cos x)^۴}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۲۷۲ـ بسط مک لورن تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲-۳x+۲}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۴)

۱) $\sum_{n=۰}^{\infty}[۱+(-\frac{۱}{۲})^n]x^n$ ۲) $\sum_{n=۰}^{\infty}(۱-\frac{۱}{۲^n})x^n$ ۳) $\sum_{n=۰}^{\infty}[۱+(-\frac{۱}{۲})^{n+۱}]x^n$ ۴) $\sum_{n=۰}^{\infty}(۱-\frac{۱}{۲^{n+۱}})x^n$

۲۷۳ـ میدان نیروی $f(x,y)=cxyi+x^۶y^۲j$ ذره‌ای را از نقطه $(۰,۰)$ به نقطه $(۱,a)$ روی مسیر $(a>۰)y=ax^b$ جابجا می‌کند. a برابر چند باشد، تا کار انجام شده مستقل از b باشد؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۴)

۱) $a=\sqrt{\frac{۲}{۳}}c$ ۲) $a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}c$ ۳) $a=\sqrt{\frac{۳c}{۲}}$ ۴) $a=\frac{۲c^۲}{۳}$

۲۷۴ـ مقدار $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{(۲n+۱)۲^{۲n+۱}}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۴)

۱) $\mathrm{Ln}\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{\mathrm{Ln}\,۳}{۲}$ ۳) $\mathrm{Ln}\,۳$ ۴) $\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}$

۲۷۵ـ فرض کنید c مثلثی به رئوس $(۰,۰)$، $(\pi,۰)$ و $(۰,\frac{\pi}{۲})$ در جهت مثلثاتی باشد. مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_c(e^{-x}\cos y+xy)dx+(e^{-x}\sin y+y^۲)dy$$

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۴)

۱) $-\frac{\pi^۳}{۱۲}$ ۲) $\frac{e^۳}{۶}$ ۳) $\frac{\pi^۲+e^۲}{۴}$ ۴) $-\pi(e-۱)$

۲۷۶ـ نیم کره $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^۳: x^۲+y^۲+z^۲=۱, y\geq ۰\}$ و میدان نیروی $\vec{F}=(y,۲x,-x)$ داده شده‌اند. مقدار $\iint_S \mathrm{curl}f.NdS$ که در آن N قائم یکه رو به خارج کره باشد، کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) ۰

۲۷۷ـ تابع f با معادله $F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}$ به ازای کدام مقدار α بر ناحیه‌ای که شامل مبدأ نیست، در معادله‌ی $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$ صدق می‌کند؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۴)

۱) $\alpha=0$ یا $\alpha=-\frac{1}{2}$ ۲) فقط $\alpha=0$ ۳) $\alpha=0$ یا $\alpha=\frac{1}{2}$ ۴) $\alpha=0$ یا $\alpha=-2$

۲۷۸ـ انتگرال $\int_0^{\pi}\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dydx$ معادل کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۴)

۱) $\int_{-1}^{1}\int_{-2\mathrm{Arcsin}\,y}^{\mathrm{Arcsin}\,y} f(x,y)dxdy$

۲) $\int_0^1\int_{\pi-\mathrm{Arcsin}\,y}^{\mathrm{Arcsin}\,y} f(x,y)dxdy+\int_{-1}^{0}\int_{-2\mathrm{Arcsin}\,y}^{\pi} f(x,y)dxdy$

۳) $\int_0^1\int_{\mathrm{Arcsin}\,y}^{\pi-\mathrm{Arcsin}\,y} f(x,y)dxdy+\int_{-1}^{0}\int_{-2\mathrm{Arcsin}\,y}^{\pi} f(x,y)dxdy$

۴) $\int_{-1}^{1}\int_{-\mathrm{Arcsin}\,y}^{2\mathrm{Arcsin}\,y} f(x,y)dxdy$

۲۷۹ـ مقدار $(1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})^{120}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) -1 ۲) 1 ۳) $-i$ ۴) i

۲۸۰ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2},\sqrt[4]{2},\sqrt[8]{2},\dots,\sqrt[2^n]{2})$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\mathrm{Ln}\sqrt{2}$ ۳) $\mathrm{Ln}2$ ۴) 2

۲۸۱ـ کدام گزینه در مورد تابع $y=|x-1|+\coth(x-1)$ درست است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) فقط دارای یک مجانب است.
۲) ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ندارد.
۳) دارای سه مجانب است.
۴) هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی دارد.

۲۸۲ـ اگر f یک تابع مشتق‌پذیر و نزولی بر $[a,b]$ باشد که $f(a)-f(b)=1$، مقدار $\int_a^b |f'(x)|f(x)dx$ کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) $f(a)-\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}-f(b)$ ۴) $f(a)+f(b)$

۲۸۳ـ فاصله دو خط $\begin{cases}x=1+t\\y=1+6t\\z=2t\end{cases}$ و $\begin{cases}x=1+2s\\y=5+15s\\z=-2+6s\end{cases}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) 2 ۲) $\frac{3}{4}\sqrt{15}$ ۳) $\frac{7}{15}\sqrt{30}$ ۴) $\frac{24}{5}\sqrt{2}$

۲۸۴ـ یک بالون هواشناسی بر مسیری به معادله $x=t$ و $y=2t$ و $z=t-t^2$ در حرکت است. اگر دمای بالون در لحظه‌ی t از معادله $T(x,y,z,t)=\frac{xy}{1+z}(1+t)$ به‌دست آید، آنگاه آهنگ تغییر دما در لحظه‌ی $t=1$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) 10 ۲) 12 ۳) 14 ۴) 15

۲۸۵ـ حجم ناحیه بزرگتر جدا شده توسط صفحه $z=1$ از کره $x^2+y^2+z^2=4$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) 9π ۲) $\frac{8\pi}{3}$ ۳) 6π ۴) $\frac{5\pi}{3}$

۲۸۶ـ اگر $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}-x^2\vec{j}+(x+z)\vec{k}$ و S بخشی از صفحه $x+y+\frac{1}{2}z=3$ در $\frac{1}{8}$ اول فضا و $\vec{n}$ قائم یکه رو به بالای سطح S باشد، مقدار $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) 9

۲۸۷ـ مجموعه تمامی مقادیر x که به ازای آن سری $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$ همگرا است، کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) $(-1,1)$ ۲) $[0,1]$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۲۸۸ـ مقدار $\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{(\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{1}{\sqrt{e}}(\cos\frac{1}{2}-\cos 1)$ ۲) $\frac{1}{e}(\cos\frac{1}{2}-\cos 1)$ ۳) $\frac{\cos\frac{1}{2}}{\sqrt{e}}-\frac{\cos 1}{e}$ ۴) $\frac{1}{e}(\cos\frac{1}{2}+\cos 1)$

۲۸۹ـ مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=2x^3+2xy^2-x-y^2$ روی قرص $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$ کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) $1,-\frac{5}{4}$ ۲) $1,-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ ۳) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{5}{4}$ ۴) $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

۲۹۰ـ اگر $(n\in\mathbb{N})$ $a_n=\frac{[\sqrt{2}]+[2\sqrt{2}]+\cdots+[n\sqrt{2}]}{n^2}$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to\infty} a_n$ کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۶)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $+\infty$

۲۹۱ـ مجموعه تمام مقادیر x که به ازای آن‌ها سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{Lnx}$ همگرا است، کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۶)

۱) ϕ (مجموعه تهی) ۲) $(0,e^{-1})$ ۳) $(0,e)$ ۴) $(0,e^{-C})$

۲۹۲ـ فاصله نقطه ماکسیمم نسبی نمودار تابع $f(x)=Ln(8x-x^2)$ از خط مجانب آن کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۶)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۹۳ـ درباره انتگرال‌های ناسره‌ی $I=\int_1^{\infty}\frac{dx}{xe^x+4e^{-x}}$ و $J=\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{xLn(Lnx)}$، کدام گزینه درست است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۶)

۱) J و I واگرا هستند. ۲) I همگرا و J واگراست. ۳) J همگرا و I واگرا است. ۴) J و I همگرا هستند.

۲۹۴ـ انحناء خم قطبی $r=\frac{1}{16}(tg^2\frac{\theta}{2}+1)$ در نقطه متناظر با $\theta=\frac{2\pi}{3}$ کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱۶

۲۹۵ـ مساحت ناحیه‌ای که خم $r=(4-4\sin\theta\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$ از ربع اول جدا می‌کند کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۶)

۱) $\pi-1$ ۲) π ۳) $\pi+1$ ۴) $\pi-2$

۲۹۶ـ اگر تابع سه متغیره حقیقی مقدار f دارای مشتقات جزئی مرتبه اول باشد و $z=f(3u-2v-w,-v+w$ و $2u+2v-4w)$، آن‌گاه مقدار $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial w}$ کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۶)

۱) 0 ۲) $-uvw$ ۳) ۱ ۴) uvw

۲۹۷ـ حجم محدود به رویه‌های $z=1+x^2+y^2$ و $z=4-2x^2-11y^2$ کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۲۹۸ـ در بسط عبارت $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^{20}$ چند جمله گویا وجود دارد؟
(آماد ـ سراسری ۹۱)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۲۹۹ـ اگر خط $y=k$ نمودار تابع $f(x)=2x^3-6x+1$ را در سه نقطه قطع کند، حدود k کدام است؟
(آماد ـ سراسری ۹۲)

۱) $[-3,5)$ ۲) $(-3,5)$ ۳) $(-3,5]$ ۴) $[-3,5]$

۳۰۰ـ اضلاع مثلثی منطبق بر خطوط به معادلات $x+2y=7$, $y-2x=1$, $3y-x+2=0$ است. شعاع دایره محیطی این مثلث کدام است؟
(آماد ـ سراسری ۹۳)

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $\sqrt{13}$

۳۰۱ـ دامنه تابع با ضابطه $Z=\sqrt{x^2+4y^2-16y+12}$ مجموعه نقاطی از کدام ناحیه است؟
(آماد ـ سراسری ۹۳)

۱) درون و روی بیضی ۲) بیرون و روی بیضی ۳) بیرون و روی دایره ۴) درون و روی دایره

۳۰۲ـ با حروف کلمه "DANESHMAND" چند رمز عبور سه‌حرفی می‌توان ساخت؟
(آماد ـ سراسری ۹۵)

۱) ۱۸۶ ۲) ۱۶۸ ۳) ۲۶۴ ۴) ۲۴۶

۳۰۳ـ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y=|x-1|$ و $y=3-|x|$ کدام است؟
(آماد ـ سراسری ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

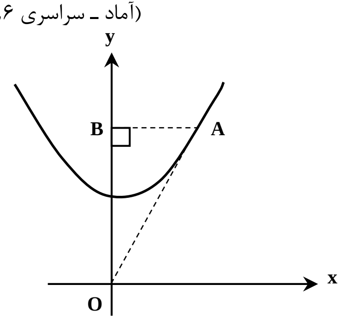
۳۰۴ـ کمترین مقدار عبارت $|x^3-3x-4|+|x^2-3x+1|$ کدام است؟
(آماد ـ سراسری ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۰۵ـ با حروف کلمه TARAVAT چند رمز عبور چهارحرفی می‌توان ساخت؟ (آماد ـ سراسری ۹۶)

۱) ۹۶ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۲

۳۰۶ـ در شکل زیر نقطه B با سرعت ثابت $\frac{۳}{۲}$ واحد در ثانیه از رأس سهمی $y=۱+\frac{x^۲}{۲}$ روی محور yها شروع به حرکت و از آن دور می‌شود. در پایان ثانیه ۱۲ سرعت افزایش مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB کدام است؟ (آماد ـ سراسری ۹۶)



۱) $\frac{۴۹}{۸}$

۲) $\frac{۵۳}{۸}$

۳) $\frac{۵۵}{۸}$

۴) $\frac{۴۷}{۸}$

۳۰۷ـ مقدار حد عبارت $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\frac{۱}{n})(\frac{۱+۲^{۱۳۹۰}+\cdots+n^{۱۳۹۰}}{n^{۱۳۹۰}})$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۱)

۱) ۰ ۲) $\sin(\frac{۱}{۱۳۹۱})$ ۳) $\sin(\frac{۱}{۱۳۹۰})$ ۴) $\frac{۱}{۱۳۹۱}$

۳۰۸ـ فرض کنید $F(x)$ تابعی مشتق‌پذیر است که $F'(x)=\frac{\sin x}{x^۲}$ و $F(\pi)=۰$ و $F(۲\pi)=A$، که A عددی حقیقی است. مقدار $I=\int_{\pi}^{۲\pi}xF(x)\,dx$ کدام گزینه است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۲)

۱) $\pi^۲A+۱$ ۲) $\pi^۲A+۲$ ۳) $۲\pi^۲A+۲$ ۴) $۲\pi^۲A+۱$

۳۰۹ـ شار گذرنده‌ی بیرونی میدان $\vec{F}=(e^{y^۲}\sin y^۲z^۲, e^{x^۲}\sin x^۲z^۲, \sin(x^۲+y^۲))$ از سطح بالایی رویه $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۴}+\frac{z^۲}{۵}=۱$ چقدر است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۲)

۱) $\pi(۱-\cos ۴)$ ۲) $\pi(۱-\sin ۴)$ ۳) $\pi(۱+\cos ۴)$ ۴) $\pi(۱+\sin ۴)$

۳۱۰ـ فرض کنید a_n دنباله‌ای باشد که $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+۱}}{a_n}|=۱۰$، آنگاه شعاع همگرایی $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{na_nx^n}{۲^n}$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳۱۱ـ فرض کنید $\int_۰^۱ \mathrm{Ln}(\cos x)dx=A$، چنانچه $a_n=\sqrt[n]{\cos(\frac{۱}{n})\cos(\frac{۲}{n})\cdots\cos(\frac{n}{n})}$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ چقدر است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۳)

۱) A ۲) ۲A ۳) e^A ۴) $۲e^A$

۳۱۲ـ مقدار مینیمم تابع $f(x,y,z)=x^۲+y+z$ بر رویه فصل مشترک دو رویه $x+y+z=۱$ و $x^۲-y^۲+z^۲=۳$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۳)

۱) -۳ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۳

۳۱۳ـ با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری در عبارت $\int_۰^۱\int_۰^{x^{\frac{۲}{۳}}}f(x,y)dydx+\int_۱^۲\int_۰^{۱-\sqrt{۴x-x^۲-۳}}f(x,y)dydx$ کدام گزینه به‌دست می‌آید؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۳)

۱) $\int_۰^۲\int_{y^{\frac{۳}{۲}}}^{۲+\sqrt{۲y-y^۲}}f(x,y)dxdy$ ۲) $\int_۰^۱\int_{y^{\frac{۳}{۲}}}^{۲+\sqrt{۲y-y^۲}}f(x,y)dxdy$

۳) $\int_۰^۲\int_{y^{\frac{۳}{۲}}}^{\sqrt{۲y-y^۲}}f(x,y)dxdy$ ۴) $\int_۰^۱\int_{y^{\frac{۳}{۲}}}^{۲-\sqrt{۲y-y^۲}}f(x,y)dxdy$

۳۱۴ـ در صورتی که $\int_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ باشد، حاصل $\int_m^{\infty} e^{-(\frac{x-m}{s})^2} dx$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2s}$ ۲) $\frac{s\sqrt{\pi}}{2}$ ۳) $\frac{s\sqrt{\pi}}{m}$ ۴) $\frac{s\sqrt{\pi}}{2m}$

۳۱۵ـ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}+1$ ۳) $\frac{\pi}{4}-1$ ۴) $1-\frac{\pi}{4}$

۳۱۶ـ حاصل عبارت $xU_x + yU_y + ZU_z$ برای تابع چند متغیر زیر کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۴)

$$U(x,y,z) = \sinh(\cosh(\sqrt[5]{\frac{xyz}{x^3+2y^3+7z^3}}))$$

۱) 0

۲) $\cosh(\sinh(\sqrt[5]{\frac{xyz}{x^3+2y^3+7z^3}}))$

۳) $\frac{1}{5}\cosh(\sinh(\sqrt[5]{\frac{xyz}{x^3+2y^3+7z^3}}))$

۴) $\frac{3}{5}\cosh(\sinh(\sqrt[5]{\frac{xyz}{x^3+2y^3+7z^3}}))$

۳۱۷ـ اگر $A_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$، مقدار $\lim_{n\to+\infty} A_n$، کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{12}$ ۴) 0

۳۱۸ـ مجموع سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Ln(2^n)}{e^n}$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{e}{(e-1)^2}$ ۲) $\frac{e^2}{e-1}$ ۳) $\frac{eLn2}{e-1}$ ۴) $\frac{eLn2}{(e-1)^2}$

۳۱۹ـ تعداد جواب‌های معادله‌ی $tg\, x = \sin x + 1$، در $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ برابر کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۵)

۱) 0 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

۳۲۰ـ اگر بخشی از درون کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2$ را که بالای صفحه‌ی $z=1$ قرار دارد در مختصات کروی به شکل $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\phi\le b \\ A\le\rho\le B \end{cases}$ توصیف کنیم، در این‌صورت A و B کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۵)

۱) $B=\frac{\sqrt{2}}{2}, A=\sec\phi$ ۲) $B=\frac{\sqrt{2}}{2}, A=\cos\phi$ ۳) $B=\sqrt{2}, A=\sec\phi$ ۴) $B=\sqrt{2}, A=\cos\phi$

۳۲۱ـ اگر w_1, w_2, w_3 و w_4 ریشه‌های غیرحقیقی پنجم واحد باشند، در این صورت مقدار $w_1^3+w_2^3+w_3^3+w_4^3$ برابر کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۹۶)

۱) $-i$ ۲) i ۳) -1 ۴) 1

۳۲۲ـ وضعیت تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۹۶)

۱) مشتق‌پذیر است.
۲) پیوسته نیست.
۳) مشتق‌پذیر نیست ولی پیوسته است.
۴) در هیچ جهتی دارای مشتق سویی نیست.

۳۲۳ـ فرض کنید منحنی C مستطیلی است که با شروع از $(0,0,0)$ به $(1,0,0)$ و سپس به ترتیب به $(1,1,1)$ و $(0,1,1)$ رسم شده است. مقدار $\oint_C (\sin(x^2)+x^4)dx + (xy^2+y^4)dy + (xz^2+\cos(z^2))dz$ کدام است؟ (معدن ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۳۲۴ـ مقدار انتگرال $\int_1^e (xLnx)^2 dx$ کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{9}(e^3-2)$ ۲) $\frac{1}{27}(5e^3-2)$ ۳) $\frac{1}{5}(e^3-2)$ ۴) $\frac{1}{9}(e^3+12)$

۳۲۵ـ از دوران خط $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ حول محور x ها چه رویه‌ای ایجاد می‌شود؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۱)

۱) $x^2+y^2=11z^2$ ۲) $x^2+y^2=13z^2$ ۳) $y^2+z^2=13x^2$ ۴) $y^2+z^2=11x^2$

۳۲۶ـ حاصل $\int_0^\pi \frac{\sin(1392x)}{\sin x}dx$، کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۲)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۳۲۷ـ مقدار سری $\sum_{n=1}^{+\infty} Arctg\frac{1}{1+n(n+1)}$، کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۳۲۸ـ اگر $\theta=t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}$ باشد، مقدار n چقدر باشد تا تساوی $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r})=\frac{\partial\theta}{\partial t}$ برقرار باشد؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۲)

۱) $n=-\frac{3}{2}$ ۲) $n=-\frac{1}{2}$ ۳) $n=\frac{1}{2}$ ۴) $n=\frac{3}{2}$

۳۲۹ـ فرض کنید $F=y(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}i-x(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}j+(2z-1)k$ و D ناحیه‌ی توپر در R^3 باشد که از بالا به سهمی‌گون $z=9-x^2-y^2$ و از پایین به صفحه‌ی $z=5$ محصور و رویه‌ی S مرز ناحیه‌ی D باشد. اگر n بردار قائم یکه بر S و رو به خارج ناحیه‌ی D باشد، مقدار انتگرال $\iint_S F.nds$ کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۲)

۱) 8π ۲) 12π ۳) 16π ۴) 18π

۳۳۰ـ شار برونسوی میدان $\vec{F}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$ گذرنده از مکعب محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=1$ و $y=1$ و $z=1$ کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۳۳۱ـ فرض کنیم به ازای هر x و y، $f(\frac{x+y}{2})=\frac{f(x)+f(y)}{2}$، اگر $f'(0)=-1$ و $f(0)=1$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟ (f مشتق‌پذیر است) (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۴)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) موجود نیست.

۳۳۲ـ تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $x^7+x^4+x^3+1=0$ کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳۳ـ معادله خطی که از نقطه $(1,2,-1)$ می‌گذرد و دارای زوایای مساوی با جهت مثبت محورهای مختصات می‌باشد، کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۴)

۱) $x=t+1,\ y=2t+2,\ z=-t-1$
۲) $x=2t+1,\ y=t+2,\ z=-t-1$
۳) $x=t+1,\ y=t+2,\ z=t-1$
۴) $x=2t+1,\ y=t+2,\ z=t-1$

۳۳۴ـ در خصوص مماس‌های منحنی $R(t)=(t^2-4t+2,\ t^3-6t^2+11t-5)$، در نقطه‌ی $(-1,1)$، کدام مورد صحیح است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۴)

۱) دو خط مماس دارد که بر هم عمودند.
۲) تنها یک خط مماس به معادله $y-x-2=0$ دارد.
۳) تنها یک خط مماس به معادله $y+x=0$ دارد.
۴) از این نقطه، مماسی بر منحنی نمی‌توان رسم نمود.

۳۳۵ـ طول قوس منحنی قطبی $\theta=\int_1^r \frac{\sinh t}{t}dt$ در فاصله $1\le r\le 2$ کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\sinh 2-\sinh 1$ ۲) $\cosh 2-\cosh 1$ ۳) $\sinh 2$ ۴) $\cosh 2$

۳۳۶ـ مربع D محدود به $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 1$ در صفحه xy و مربع S محدود به $0 \le u \le 1$ و $0 \le v \le 1$ در صفحه uv مفروض‌اند. تبدیل $x = 4u - 4u^2$ و $y = v$ مربع S را به D تبدیل می‌کند. اگر $I = \iint_D dy\,dx$ و J انتگرال تبدیل‌شده I در مختصات v و u باشد، آنگاه:

(مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۵)

۱) $J = \frac{1}{2}$ و $I = 1$
۲) $I = J = 1$
۳) $J = \frac{3}{2}$ و $I = 1$
۴) $J = 2$ و $I = 1$

۳۳۷ـ مساحت ناحیه محصور به منحنی $4y^2 - xy^2 - x^2 = 0$ و مجانب آن در ربع اول و چهارم کدام است؟ (مهندسی در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{8}{3}$
۲) $\frac{16}{3}$
۳) $\frac{32}{3}$
۴) $\frac{64}{3}$

۳۳۸ـ نقاط برخورد رویه‌های $\rho = 2$ و $\rho = 2\cos\phi$ (در مختصات کروی) عبارتند از: (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۱)

۱) فقط یک نقطه $(0,0,2)$
۲) بی‌نهایت نقطه روی خم حاصل از تقاطع دو رویه
۳) قسمتی از سطح کره $\rho = 2$ که بالای صفحه $z = \sqrt{2}$ قرار دارد.
۴) این دو رویه اصلاً همدیگر را قطع نمی‌کنند.

۳۳۹ـ ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ داده شده، کلیه مقادیر λ که به ازاء آن‌ها ماتریس $(A - \lambda I)$ وارون نداشته باشد عبارتند از:

(مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\lambda = -1, 2, -4$
۲) $\lambda = 2, -3, 4$
۳) $\lambda = 1, 2, 4$
۴) $\lambda = 2, 3, 4$

۳۴۰ـ اگر $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ برابر A باشد، حجم حاصل از دوران خم $y = f(\sin x)$ حول محور yها و $0 \le x \le \pi$، کدام است؟

(مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۲)

۱) $2\pi^2 A$
۲) $2\pi A^2$
۳) A^3
۴) $2A^3$

۳۴۱ـ اگر $a_n = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{\dots\frac{1}{2^n}}}}$ باشد، مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ کدام است؟ (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) 2
۴) 4

۳۴۲ـ بسط تیلور تابع $f(x) = \cos x$، حول نقطه $x_0 = -\frac{\pi}{4}$، کدام است؟ (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{[n/2]}}{(2n)!}(x+\frac{\pi}{4})^{2n}$
۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{[n/2]}}{n!}(x+\frac{\pi}{4})^{n}$
۳) $\sqrt{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{[n/2]}}{(2n)!}(x+\frac{\pi}{4})^{2n}$
۴) $\sqrt{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{[n/2]}}{n!}(x+\frac{\pi}{4})^{n}$

۳۴۳ـ اگر A ماتریس زیر باشد، آنگاه $|A|$ کدام است؟ (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۲)

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 1 & 1 & 81 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & -8 & 1 & -1 & 27 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

۱) -5760
۲) -2880
۳) 2880
۴) 5760

۳۴۴ـ فرض کنید: $\vec{r}(t) = (3tg^2t + 1)\vec{i} + (2tg^2t - 3\sec^2 t)\vec{j} + (5\sec^2 t - 2)\vec{k}$ یک خم فضایی باشد، در آن صورت تاب مسیر در نقطه‌ی $(1,-3,3)$ کدام است؟

(مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{2}$
۲) $\kappa = \sqrt{2}$
۳) $\kappa = 0$
۴) در این نقطه κ تعریف نشده است.

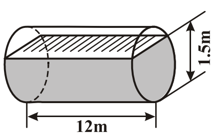
۳۴۵ـ اگر D ناحیه‌ای از فضای xyz باشد، که به شکل $1 \le x \le 2$ ، $0 \le x^2y \le 2$ ، $0 \le z \le 1$ تعریف شده است؛ و $I = \iiint_D (x^4y + 3x^6y^2z)dxdydz$ باشد، آنگاه با تغییر متغیر $u = x^2$ و $v = x^2y$ و $w = 3z$ مقدار I در دستگاه uvw کدام است؟ (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۲)

۱) $I = \frac{1}{6}\int_0^3\int_0^2\int_1^4 (v + 3v^2w)\frac{1}{\sqrt{u}}dudvdw$
۲) $I = \frac{1}{6}\int_0^3\int_0^2\int_1^4 (v + v^2w)\frac{1}{\sqrt{u}}dudvdw$
۳) $I = 6\int_0^3\int_0^2\int_1^4 (u + v^2w)\frac{1}{\sqrt{u}}dudvdw$
۴) $I = 6\int_0^3\int_0^2\int_1^4 (u + 3v^2w)\frac{1}{\sqrt{u}}dudvdw$

۳۴۶ـ فرض کنیم $f(p)=\int_{۱}^{\infty} e^{-x}x^{-p}dx$ یک تابع باشد در آن صورت مقدار $\int_{۰}^{۱}\frac{dt}{۱-\ln t}$ کدام است؟ (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۳)

۱) $ef(-۱)$ ۲) $ef(۰)$ ۳) $ef(۱)$ ۴) $ef(۲)$

۳۴۷ـ یک مخزن نفتی به شکل استوانه با سطح مقطع دایره به شعاع ۱ متر مطابق شکل زیر از پهلو روی زمین قرار دارد. اگر ارتفاع مایع نفتی درون آن ۱/۵ متر باشد، حجم مایع درون آن چند متر مکعب است؟ (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۴)



۱) $۱۱\pi-۳\sqrt{۳}$
۲) $۱۰\pi-\sqrt{۳}$
۳) $۹\pi+\sqrt{۳}$
۴) $۸\pi+۳\sqrt{۳}$

۳۴۸ـ حاصل عبارت $\int\frac{۶e^{\alpha x}}{\alpha^{۲}x^{۴}}dx-\int\frac{e^{\alpha x}}{x^{۲}}dx$، کدام است؟ (مهندسی نفت و مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\alpha x-۲}{\alpha^{۲}x^{۳}}e^{\alpha x}$ ۲) $\frac{\alpha x+۲}{\alpha^{۲}x^{۳}}e^{\alpha x}$ ۳) $\frac{\alpha x+۱}{\alpha^{۲}x^{۳}}e^{\alpha x}$ ۴) $\frac{\alpha x-۱}{\alpha^{۲}x^{۳}}e^{\alpha x}$

۳۴۹ـ مقدار انتگرال $\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin x^{n}}{x}dx$، کدام است؟ (مهندسی نفت و مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{n\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۲n}$ ۳) $\frac{\pi}{n}$ ۴) $n\pi$

۳۵۰ـ به ازای کدام مقادیر x، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{nx^{n}}{(n+۱)(۲x+۱)^{n}}$، همگرای مطلق است؟ (مهندسی نفت و مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۵)

۱) $x>-۱$ ۲) $x>-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-۱<x<-\frac{۱}{۳}$ ۴) $x<-۱$ و $x>-\frac{۱}{۳}$

۳۵۱ـ اگر $z_n=e^{i(\frac{\pi-۲}{\pi})^{n}}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $P=z_۰\times z_۱\times z_۲\times z_۳\times\cdots$، کدام است؟ (مهندسی نفت و مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) i ۴) $-i$

۳۵۲ـ حاصل انتگرال $I=\iint_{|x|+|y|<۱}\lfloor x+y\rfloor dxdy$، کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ = تابع جزء صحیح است.) (مهندسی نفت و مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $-\sqrt{۲}$

۳۵۳ـ مساحت قسمتی از نیم‌کره‌ی $\rho=۲$ که داخل مخروط $\varphi=\frac{\pi}{۳}$ قرار دارد، کدام است؟ (مهندسی نفت و مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) ۴π ۴) ۳π

۳۵۴ـ جرم مارپیچ‌وار $\vec{f}(r,\theta)=r\cos\theta\vec{i}+r\sin\theta\vec{j}+\theta\vec{k}$، که در آن $۰\le r\le۱$، $۰\le\theta\le۲\pi$ و چگالی سطحی آن $\delta(x,y,z)=۲\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ باشد، کدام است؟ (مهندسی نفت و مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{۴\pi}{۳}(۲\sqrt{۲}-۱)$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}(۲\sqrt{۲}-۱)$ ۳) $\frac{\pi}{۳}(۲\sqrt{۲}-۱)$ ۴) $\frac{\pi}{۶}(۲\sqrt{۲}-۱)$

۳۵۵ـ فرض کنید تابع $f:[۰,۱]\times[۰,۱]\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{۲}-y^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}} & ;\ (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & ;\ (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ تعریف شود. اگر $A=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}f(x,y)dxdy$ و $B=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}f(x,y)dydx$ آن‌گاه: (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) $A=\frac{-\pi}{۴}$ و $B=\frac{\pi}{۴}$ ۲) $A=\frac{\pi}{۴}$ و $B=\frac{-\pi}{۴}$ ۳) $A=B=\frac{\pi}{۴}$ ۴) $A=B=\frac{-\pi}{۴}$

۳۵۶ـ نقطه $M(x,۰)$ را به نقطه‌های $A(۱,۱)$ و $B(۲,۲)$ وصل می‌کنیم. هرگاه M روی قسمت مثبت محور xها حرکت کند، ماکسیمم مقدار زاویه $\widehat{AMB}$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۳۵۷ـ تابع $f(x)=\begin{cases}|x|^{x} & x\neq۰\\ a & x=۰\end{cases}$ به ازای چه مقادیری از a در همسایگی نقطه $x=۰$ مشتق‌پذیر است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) به ازای هر a دلخواه ۲) برای $a=۰$ ۳) برای $a=۱$ ۴) به ازای هیچ مقدار a

۳۵۸ـ هرگاه $\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+\dots+x_n}{n}$ موجود و برابر یک باشد، در مورد $\lim_{n\to\infty}x_n$ چه می‌توان گفت؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) ممکن است موجود نباشد.
۲) موجود و برابر یک است.
۳) موجود است ولی ممکن است برابر یک نباشد.
۴) موجود نیست.

۳۵۹ـ تابع f روی قسمت مثبت محورها پیوسته است و برای تمام انتخاب‌های $x>0$ و $y>0$ انتگرال $\int_x^{xy}f(t)dt$ مستقل از x است. اگر $f(2)=2$ در این‌صورت مقدار $A(x)=\int_1^x f(t)dt$ ، $x>0$ ، کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{2}Lnx$
۲) Lnx
۳) $2Lnx$
۴) $4Lnx$

۳۶۰ـ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+2+\dots+n}$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) -2
۲) $2-4Ln2$
۳) 2
۴) $2+4Ln2$

۳۶۱ـ مقدار $\int_1^{\infty}\frac{(Lnx)^n}{x^2}dx$ وقتی که $n\in\mathbb{N}$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) $n!$
۲) $(-1)^n n!$
۳) $\frac{(-1)^n}{n!}$
۴) انتگرال فوق واگراست.

۳۶۲ـ کدام مورد برای $\int_0^{\infty}\frac{Lnx}{1+x^2}dx$ درست است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) انتگرال همگراست و لیکن مقدار آن قابل محاسبه نمی‌باشد.
۲) مقدار انتگرال برابر با صفر است.
۳) انتگرال واگراست.
۴) چون $\frac{Lnx}{1+x^2}>0$ $(x\geq 1)$ لذا مقدار انتگرال بزرگ‌تر از صفر است.

۳۶۳ـ فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند، کدام گزینه نادرست است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی نباشند آن‌گاه $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}+(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$
۲) $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$
۳) در حالت کلی تساوی $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ همواره برقرار نیست.
۴) شرط لازم برای صحت تساوی گزینه (۱) این است که $\vec{a}\perp\vec{b}$

۳۶۴ـ صفحه‌ی مماس بر رویهٔ $xyz=1$ در نقطه (x_0,y_0,z_0) در $\frac{1}{8}$ اول با صفحات مختصات یک چهاروجهی می‌سازد. حجم این چهاروجهی کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{3}{2}$
۲) $\frac{27}{4}$
۳) $\frac{9}{2}$
۴) $\frac{27}{2}$

۳۶۵ـ هرگاه $\vec{F}=z\vec{i}+x\vec{j}+3y^2z\vec{k}$ و S قسمتی از رویهٔ $x^2+y^2=16$ واقع در $\frac{1}{8}$ اول و محصور مابین صفحات $z=0$ و $z=5$ و $\vec{n}$ قائم یکّه‌ی رو به خارج آن باشد، مقدار $\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۹۰
۲) ۵۰
۳) ۴۰
۴) ۰

۳۶۶ـ اگر $\vec{F}=-3y\vec{i}+3x\vec{j}+z^4\vec{k}$ و S قسمتی از رویهٔ $2x^2+2y^2+z^2=1$ باشد که بالای صفحهٔ $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ قرار دارد، مقدار $\iint_S\nabla\times\vec{F}.\vec{n}ds$ کدام است؟ ($\vec{n}$ قائم یکّه رو به خارج S است). (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) $\frac{3\pi}{2}$
۳) $\frac{5\pi}{2}$
۴) $\frac{7\pi}{2}$

۳۶۷ـ مساحت داخل حلقه‌ی منحنی $x^3+y^3=3xy$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) $\frac{9}{2}$

۳۶۸ـ تابع غیرثابت $f(t)$ و منحنی $\gamma:\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+f(t)\vec{k}$ را در نظر بگیرید، کدام گزینه شرط لازم برای اینکه γ یک منحنی مسطح باشد، نیست؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) ضابطه f باید به صورت $f(t)=A\cos t+B\sin t+C$ باشد.
۲) به ازای هر تابع f که منحنی را به یک منحنی مسطح تبدیل کند، بردار نرمال صفحه‌ی دربرگیرنده منحنی موازی هیچ‌یک از محورهای مختصات نیست.
۳) به ازای هر تابع f که منحنی γ را به یک منحنی مسطح تبدیل کند، اگر $f(0)=0$ آن‌گاه صفحه‌ی شامل منحنی از مبدأ عبور می‌کند.
۴) هیچ‌کدام

۳۶۹ـ معادله‌ی صفحه‌ای که از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر صفحات $x+2y+2z=0$ و $2x+y-2z+5=0$ عمود می‌شود، کدام است؟

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) $x-2y+z=0$ ۲) $2x-2y+z=0$ ۳) $2x-y+2z=0$ ۴) $x-2y+2z=0$

۳۷۰ـ حداکثر تفاضل بین $\sin(x+h)$ و $\sin x+h\cos x$ چقدر است؟

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۱ ۲) $\frac{h^2}{2}$ ۳) $\frac{h^2}{4}$ ۴) h

۳۷۱ـ چگالی نیم کره توپر $z\geq 0$ و $x^2+y^2+z^2\leq 2ay$ به شعاع a در نقطه‌ی p مساوی با فاصله‌ی p تا مبدأ است. جرم کل نیم کره برابر است با:

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{a^4\pi}{8}$ ۲) $\frac{a^4\pi}{5}$ ۳) $\frac{5a^4\pi}{8}$ ۴) $\frac{4a^4\pi}{5}$

۳۷۲ـ مساحت ناحیه‌ی داخل دایره $r=3\sin\theta$ و بیرون دلوار $r=2-\sin\theta$ برابر است با:

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{3}$

۳۷۳ـ حجم محدود به هذلولی‌گون $x^2+y^2-z^2=1$ و صفحات $z=0$ و $z=2$ کدام است؟

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) 4π ۲) $\frac{8\pi}{3}$ ۳) $\frac{14\pi}{3}$ ۴) $\frac{16\pi}{3}$

۳۷۴ـ فاصله‌ی صفحه $x+y=4$ از رویه $x^2+4y^2=4$ کدام است؟

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) $d=\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ۲) $d=\frac{4-\sqrt{5}}{2}$ ۳) $d=\frac{\sqrt{5}+4}{2}$ ۴) $d=\frac{\sqrt{5}+4}{\sqrt{2}}$

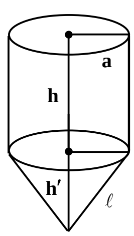
۳۷۵ـ مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=xy(1-x-y)$ روی مثلث T با رأس‌های $(0,0),(1,0),(0,1)$ به ترتیب برابر است با:

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) $0,\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3},\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{27},\frac{1}{27}$ ۴) $0,\frac{1}{27}$

۳۷۶ـ می‌خواهیم یک منبع آب به شکل زیر بسازیم. اگر شعاع استوانه a و حجم منبع v هر دو ثابت باشند و هزینه هر متر مربع ساخت برای مخروط دو برابر استوانه باشد، آنگاه ابعاد لازم چقدر باشند تا هزینه ساخت حداقل گردد؟ (از ضخامت منبع و ضایعات صرف‌نظر می‌شود.)

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)



۱) $h'=\frac{a\sqrt{2}}{4},h=\frac{v}{\pi a^2}-\frac{a\sqrt{2}}{12}$

۲) $h'=\frac{a\sqrt{2}}{2},h=\frac{va^2}{\pi}-\frac{a\sqrt{2}}{12}$

۳) $h'=-\frac{a\sqrt{2}}{4},h=\frac{v}{\pi a^2}+\frac{a\sqrt{2}}{12}$

۴) $h'=-\frac{a\sqrt{2}}{2},h=\frac{va^2}{\pi}-+\frac{a\sqrt{2}}{12}$

۳۷۷ـ صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $(0,0,1)$ و مماس بر سطح $x^2-y^2+3z=0$ و موازی با خط $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$ برابر است با:

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) $4x+4z-4=0$ ۲) $x+4y+3z-3=0$ ۳) $3x+2y+4z-4=0$ ۴) $4x-2y+3z-3=0$

۳۷۸ـ برای تابع $(x>0)f(x)=\int_0^x(1+t^3)^{-\frac{1}{2}}dt$ عدد c وجود دارد به طوری‌که: $(f^{-1})''(y)=c(f^{-1}(y))^2$. در این صورت c برابر است با:

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۳۷۹ـ حاصل انتگرال $\int_0^1\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$ برابر است با:

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{Ln(\sqrt{2}-1)}{2}$ ۲) $\frac{Ln(\sqrt{2}+1)}{2}$ ۳) $\frac{Ln(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{Ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$

۳۸۰ـ فرض کنید تابع حقیقی f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و همواره $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. در این صورت $f(x)$ برابر است با:

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) $tg(xf'(0))$
۲) $f'(0)tgx$
۳) tgx
۴) $f'(0)$

۳۸۱ـ معادلات خط مماس بر منحنی فصل مشترک صفحه‌ی $x=1$ با هذلولی‌گون دورانی دو پارچه $x^2+y^2-z^2=-1$ در نقطه‌ی $(1,1,\sqrt{3})$ برابر است با:

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) $x=1$ و $\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-\sqrt{3}}{3}$
۲) $x=1$ و $\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-\sqrt{3}}{1}$
۳) $x=1, y=1+\sqrt{3}t, z=\sqrt{3}+t$
۴) $x=1, y=1-\sqrt{3}t, z=\sqrt{3}+t$

۳۸۲ـ انتگرال $\iint_S zds$ که در آن رویه‌ی S بخشی از صفحه‌ی $z=1+x$ است و توسط استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ بریده می‌شود برابر است با:

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۳)

۱) 0
۲) $\dfrac{\pi}{2}$
۳) π
۴) $\sqrt{2}\pi$

۳۸۳ـ برای $u=xyf(\dfrac{x+y}{xy})$ داریم $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=G(x,y)u$ کدام‌یک از موارد زیر در مورد $G(x,y)$ درست است؟

(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۳)

۱) $G(x,y)=x-y$
۲) $G(x,y)=x+y$
۳) $G(x,y)=\dfrac{x-y}{xy}$
۴) $G(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$

۳۸۴ـ مقدار اکسترمم‌های تابع $f(x,y,z)=2x-y+3z$، به طوری‌که $x^2+y^2=5$ و $y+z=4$ باشد، برابر است با: (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۳)

۱) ۱۱ و ۲
۲) ۱۱ و ۳
۳) ۲۲ و ۲
۴) ۲۲ و ۳

۳۸۵ـ چند جمله‌ای تیلور درجه دوم تابع دو متغیره‌ی $f(x,y)=\dfrac{1+x}{1-y^2}$ در همسایگی نقطه‌ی $(0,0)$ کدام است؟(اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۳)

۱) $1+x+y^2$
۲) $1+x-y^2$
۳) $1+x+2y^2$
۴) $1+x-2y^2$

۳۸۶ـ مساحت ناحیه‌ی محصور به نمودار منحنی: $(\dfrac{x}{a})^{\frac{2}{3}}+(\dfrac{y}{a})^{\frac{2}{3}}=1$ برابر است با: (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\dfrac{3}{8}a\pi^2$
۲) $\dfrac{3}{8}a^2\pi$
۳) $\dfrac{8}{3}a^2\pi$
۴) $\dfrac{8}{3}a\pi^2$

۳۸۷ـ طول منحنی $e^{2y}tghx=1$، بین نقاط $x=1$ و $x=2$ برابر است با: (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۳)

۱) $tgh4+coth2$
۲) $\dfrac{1}{2}Ln\dfrac{\sinh 4}{\sinh 2}$
۳) $Ln\dfrac{e^4-e^2}{2}$
۴) $\sinh 4+\sinh 2$

۳۸۸ـ هرگاه $y=x^2(\cosh x-\sinh x)$ آنگاه $y^{(n)}$ (مشتق n ام تابع) برابر است با: (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۳)

۱) $y^{(n)}=x^2(\cosh nx-\sinh nx)+2nx$
۲) $y^{(n)}=(-1)^n x^2e^{-x}+(-1)^{n-1}xe^{-x}+(-1)^{n-2}e^{-x}$
۳) $y^{(n)}=x^2(\cosh nx-\sinh nx)+2x\sinh 2x$
۴) $y^{(n)}=(-1)^n x^2e^{-x}+(-1)^{n-1}2nxe^{-x}+(-1)^{n-2}n(n-1)e^{-x}$

۳۸۹ـ کدام‌یک از نامساوی‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۳)

۱) $e^x\ge 1+x$
۲) اگر $x>0$، $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$
۳) اگر $0<y<x$ و $n>1$، $\dfrac{x^n-y^n}{x-y}>nx^{n-1}$
۴) اگر $x>0$، $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

۳۹۰ـ اگر $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ تابع نزولی و مشتق‌پذیر باشد، کدام گزینه درست است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\int_0^\pi f(x)\cos xdx>\dfrac{1}{2}$
۲) $\int_0^\pi f(x)\cos xdx\ge 0$
۳) $\int_0^\pi f(x)\cos xdx<\dfrac{1}{2}$
۴) $\int_0^\pi f(x)\cos xdx\le 0$

۳۹۱ـ فرض کنید $|x|<1$ و $f(x)=1-4x+7x^2-10x^3+\cdots$. در این صورت $f(x)$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۴)

۱) $\dfrac{1-2x}{(1+x)^2}$
۲) $\dfrac{1+2x}{(1+x)^2}$
۳) $\dfrac{1-2x}{(1-x)^2}$
۴) $\dfrac{1+2x}{(1-x)^2}$

۳۹۲ـ اگر x یک عدد حقیقی دلخواه باشد و $a_n=\sum_{k=1}^{n}(\dfrac{1+x^2}{2+x^2})^k$، آنگاه $\lim\sqrt[n]{a_n^{n+1}}$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۴)

۱) 0
۲) 1
۳) x^2
۴) $1+x^2$

۳۹۳ـ اگر $p,q>0$، آنگاه تابع $f(x)=x^p(1-x)^q\ (0\le x\le 1)$ در نقطه .... مطلق خود را اختیار می‌کند. (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۴)

۱) $x=\frac{q}{p+q}$ مینیمم ۲) $x=\frac{q}{p+q}$ ماکسیمم ۳) $x=\frac{p}{p+q}$ ماکسیمم ۴) $x=\frac{p}{p+q}$ مینیمم

۳۹۴ـ حجم جسم محدود از بالا به کرهٔ $x^2+y^2+z^2=2z$ و از پایین به مخروط $z^2=x^2+y^2$، کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۴)

۱) π ۲) $\frac{5\pi}{6}$ ۳) $\frac{11\pi}{6}$ ۴) $\frac{7\pi}{6}$

۳۹۵ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\cos x+6}{2\cos x+\sin x+3}dx$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۴)

۱) $\pi+\text{Ln}\frac{5}{4}$ ۲) $\pi+\text{Ln}\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{\pi}{2}+\text{Ln}\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{\pi}{2}+\text{Ln}\frac{5}{4}$

۳۹۶ـ مقدار $\lim\limits_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\frac{\sqrt{k}+\sqrt{m}}{m^2\sqrt{m}}}$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{8}{15}(\sqrt{2}+1)$ ۲) $\frac{8}{15}(\sqrt{2}-1)$ ۳) $\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$ ۴) $\frac{4}{15}(\sqrt{2}-1)$

۳۹۷ـ اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ یک سری همگرا با جملات مثبت باشد، آنگاه همه سری‌های زیر همگرا هستند، به غیر از: (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(a_n)$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\text{Arctg}\frac{1}{a_n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\text{Ln}(1+a_n)$

۳۹۸ـ کدام گزینه برای هر x در بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ درست است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\sin x\le x-\frac{1}{3!}x^3$ ۲) $\sin x\ge x-\frac{1}{3!}x^3$ ۳) $\cos x\le 1-\frac{1}{2}x^2$ ۴) $\cos x\ge 1-\frac{1}{2}x^2$

۳۹۹ـ مقدار $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{2}-\text{Ln}(2+\sqrt{3})$

۲) $\frac{\pi}{2}+\text{Ln}(2+\sqrt{3})$

۳) π

۴) تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ در همسایگی $x=1$ بی‌کران است لذا انتگرال بالا موجود نیست.

۴۰۰ـ معادله $\rho\sec\theta=\sin\varphi(1+\text{tg}\theta)+\cos\varphi\sec\theta$ کدام رویه را نمایش می‌دهد؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) هذلولی‌گون دو پارچه به موازات محور z ها
۲) هذلولی‌گون دو پارچه به موازات محور y ها
۳) کره به مرکز $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۴) کره به مرکز $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴۰۱ـ حجم جسم محدود به صفحات $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$، $x=0$، $y=0$ و $z=0$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) abc ۲) $\frac{abc}{2}$ ۳) $\frac{abc}{3}$ ۴) $\frac{abc}{6}$

۴۰۲ـ سطح حاصل از دوران منحنی $9y^2=x(3-x)^2$ بر بازه‌ی $[0,3]$ حول محور X کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۶)

۱) 2π ۲) 3π ۳) 4π ۴) 6π

۴۰۳ـ با انتخاب و جایگشت ارقام ۰,۳,۴,۴,۵,۷ چند عدد چهار رقمی شامل رقم صفر می‌توان نوشت؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۸۷ ۲) ۹۲ ۳) ۹۶ ۴) ۹۹

۴۰۴ـ نقطه بحرانی تابع $f(x,y)=x^3+y^2-2x^2y+x$ کدام است؟ (صنایع غذایی و مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۹۳)

۱) $(1,1)$ زینی ۲) $(1,1)$ می‌نیمم ۳) $(1,1)$ ماکسیمم ۴) $(-1,1)$ می‌نیمم

۴۰۵ــ مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $y=-x^۲-۲x+۵$ و خط مماس بر آن در نقطه‌ی $(۲,-۳)$ و محور yها کدام است؟

(صنایع‌غذایی ــ علوم و مهندسی آب ــ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳}$

۴۰۶ــ اگر $S_n=\sum_{P=۱}^{۲n}(-۱)^{P+۱}P$ و $x_n=\frac{S_n}{\sqrt{n^۲+۱}+\sqrt{۴n^۲-۱}}$ باشد، $\lim_{n\to\infty}x_n$ کدام است؟

(مهندسی مکانیک بیوسیستم و مهندسی کشاورزی آب ــ سراسری ۹۵)

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۴۰۷ــ حجم جسم حاصل از دوران منحنی قطبی $r=\cos\theta$، حول محور قطبی کدام است؟

(مهندسی مکانیک بیوسیستم و مهندسی کشاورزی آب ــ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۲}$

۴۰۸ــ مقدار تابع $z=Ln(x^۲+\sqrt{y})$ در نقطه $(۱/۹۷,۱/۰۴)$ چقدر از $Ln۵$ کمتر است؟

(مهندسی مکانیک بیوسیستم و مهندسی کشاورزی آب ــ سراسری ۹۵)

۱) $۰/۰۱$ ۲) $۰/۰۱۲$ ۳) $۰/۰۱۵$ ۴) $۰/۰۲$

۴۰۹ــ تعداد ریشه‌های معادله‌ی $xLnx=۱$، کدام است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ــ سراسری ۹۶)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۱۰ــ حجم حاصل از دوران سطح محدود به هذلولی $x^۲-y^۲=۳$ و دو خط $y=۲$ و $y=-۲$، در حول محور yها چند برابر $\frac{\pi}{۳}$ است؟

(مهندسی مکانیک بیوسیستم ــ سراسری ۹۶)

۱) ۴۴ ۲) ۴۹ ۳) ۵۲ ۴) ۵۶

۴۱۱ــ مساحت بین منحنی‌های $y=\frac{۱}{x}$ و $y=۲x-x^۲$ کدام است؟ (دریانوردی ــ سراسری ۹۱)

۱) $Ln\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}-Ln\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}+Ln\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}-Ln\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$

۴۱۲ــ انتگرال $\int_۰^۱\sin^{-۱}xdx$ کدام است؟ (دریانوردی ــ سراسری ۹۱)

۱) ۲ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}-۱$

۴۱۳ــ گشتاور ماند ناحیه مستطیلی محدود به خطوط $x=۰$، $x=a$، $y=۰$ و $y=b$، نسبت به مبدأ مختصات (با چگالی ثابت ۱) کدام است؟

(دریانوردی ــ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{ab(a^۲+b^۲)}{۲}$ ۲) $\frac{ab(a^۲+b^۲)}{۳}$ ۳) $\frac{a^۲b^۲(a+b)}{۲}$ ۴) $\frac{a^۲b^۲(a+b)}{۳}$

۴۱۴ــ حجم واقعی بین رویه‌ی $z=۴-x^۲-y^۲$ و صفحه‌ی xy، کدام است؟ (دریانوردی ــ سراسری ۹۲)

۱) ۲π ۲) ۸π ۳) ۱۲π ۴) ۱۶π

۴۱۵ــ حاصل انتگرال $\int_۲^۶\frac{dx}{x^۲\sqrt{۴+x^۲}}$، کدام است؟ (دریانوردی ــ سراسری ۹۲)

۱) $۳\sqrt{۲}+\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}-\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۳) $(\frac{۳}{۵}+\frac{۴}{۷})\pi$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}(۳\sqrt{۲}-\sqrt{۱۰})$

۴۱۶ــ انتگرال سه گانه $\iiint_E\frac{۱}{(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۵}{۲}}}dv$ کدام است؟ که در آن E ناحیه بین دو کره $x^۲+y^۲+z^۲=R^۲$ و $x^۲+y^۲+z^۲=r^۲$، $r<R$ است.

(دریانوردی ــ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{۱}{۴\pi}[r^۲-R^۲]$ ۲) $۴\pi[r^۲+R^۲]$ ۳) $۴\pi[\frac{۱}{r^۲}-\frac{۱}{R^۲}]$ ۴) $۴\pi[\frac{۱}{r^۲}+\frac{۱}{R^۲}]$

۴۱۷ـ نمودار تابع $f(x)=x^2-x$، با یک انتقال به نمودار تابع $g(x)=x^2+5x$ منطبق می‌شود. در این انتقال نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر نمودار تابع f به نقطه‌ای با کدام مختصات منطبق می‌شود؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۱)

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,0)$ ۳) $(1,6)$ ۴) $(-1,-4)$

۴۱۸ـ به ازای یک مقدار c ماکزیمم توابع $f(x)=|x^2+c|$ در بازه $[-1,1]$ کمترین مقدار را دارد. در این حالت $f(\sqrt{2})$ کدام است؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۴۱۹ـ در چه نقاطی خط مماس بر منحنی $y=\sqrt[3]{\cos x}$ موازی محور yها است. این نقاط چگونه‌اند؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{2}$، عطف ۲) $\frac{k\pi}{2}$، بازگشت ۳) $k\pi+\frac{\pi}{2}$، بازگشت ۴) $k\pi+\frac{\pi}{2}$، عطف

۴۲۰ـ کمترین مقدار تابع $f(x)=\max\{|2x|,|x+1|\}$ کدام است؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۴۲۱ـ گشتاور ماند ناحیه محدود به منحنی $y^2=x$ و خط $x=1$ حول خط به معادله $y=1$ کدام است؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{8}{5}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{12}{5}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۴۲۲ـ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ در نقطه‌ی $x=\frac{5}{4}$ واقع بر آن، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۲۳ـ حجم جسم حاصل از دوران منحنی قطبی $r=1-\cos\theta$، حول محور قطبی، کدام است؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{4\pi}{3}$ ۲) $\frac{5\pi}{3}$ ۳) 2π ۴) $\frac{8\pi}{3}$

۴۲۴ـ دورترین و نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی $A(3,4,12)$ از نقاط کره‌ی $x^2+y^2+z^2=9$، کدام است؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۱۴، ۸ ۲) ۱۴، ۹ ۳) ۱۶، ۱۰ ۴) ۱۵، ۹

۴۲۵ـ یک مخزن به صورت مخروط وارونه، با ارتفاع ۸ متر و شعاع قاعده دو متر است. آب به طور ثابت در دقیقه $\frac{\pi}{10}$ متر مکعب وارد مخزن می‌شود. در حالی‌که فاصله سطح آب تا سطح قاعده مخروط ۳ متر باشد، سرعت افزایش ارتفاع آب کدام است؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۳)

۱) ۰/۰۷۲ ۲) ۰/۱۲۸ ۳) ۰/۰۶۴ ۴) ۰/۰۳۲

۴۲۶ـ فاصله دورترین نقاط کره $x^2+y^2+z^2+6z=7$ از نقطه ثابت $(3,4,9)$ کدام است؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۳)

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۴۲۷ـ فاصله مرکز ثقل قوس $0\le t\le\pi$; $\begin{cases}x=t+\sin t\\y=1-\cos t\end{cases}$ از محور xها کدام است؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۴۲۸ـ دو خط به معادلات $4x+3y=5$, $5x+12y+2=0$، نسبت به خط Δ قرینه هستند. شیب منفی خط Δ کدام است؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۴)

۱) $-\frac{9}{7}$ ۲) $-\frac{7}{6}$ ۳) $-\frac{6}{7}$ ۴) $-\frac{7}{9}$

۴۲۹ـ اگر x سرعت کامیون برحسب کیلومتر در ساعت باشد، هزینه یک کامیون در حال کار $12+\frac{x}{300}$ واحد پول در هر کیلومتر است. اگر حقوق راننده ۲۷ واحد پول در ساعت باشد، برای رسیدن به حداقل هزینه، سرعت متوسط کامیون چند کیلومتر در ساعت باید باشد؟ (ایمنی صنعتی و دریانوردی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۷۵ ۲) ۸۰ ۳) ۹۰ ۴) ۹۶

۴۳۰ـ حاصل عبارت $\mathrm{Arctg}\sqrt{x^2-x}+\mathrm{Arcsin}(2x^2-2x+1)$ کدام است؟ (مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۱)

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۴۳۱ـ در بسط عبارت $(x\sqrt{x}+\frac{۳}{x^{۲}})^{۸}$، ضریب جمله شامل $x^{۵}$ کدام است؟ (مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۱)

۱) ۲۱۶ ۲) ۲۳۴ ۳) ۲۴۳ ۴) ۲۵۲

۴۳۲ـ حاصل $\sin^{-1}(x^{۲}+۲x+۲)+tg^{-1}\sqrt{۲-x}$ کدام است؟ (مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۴۳۳ـ تابع با ضابطه $f(x)=\frac{|x+۴|-|x|-۴}{x}$ در کدام بازه معکوس‌پذیر است؟ (مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۳)

۱) $(۰,۰)$ ۲) $(۰,+\infty)$ ۳) $(-۴,۰)$ ۴) $(-\infty,-۴)$

۴۳۴ـ اگر $f(x)=\frac{۴}{۲-x}$ آنگاه تابع $y=f(f(f(x)))$ در نقاطی با کدام طول ناپیوسته است؟ (مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۳)

۱) ۲ و ۰ ۲) ۲ و ۱ ۳) ۴ و ۲ ۴) ۲

۴۳۵ـ دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{۲-\log(x^{۲}-۱۵x)}$ کدام است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۱)

۱) $[-۵,۲۰]$ ۲) $(۰,۱۵)$ ۳) $[-۵,۰)\cup(۱۵,۲۰]$ ۴) $(۰,۵)\cup(۱۵,۲۰]$

۴۳۶ـ مشتق مرتبه ششم تابع $f(x)=x(\frac{۱}{۴}x+۱)^{۳}(۲x-۱)^{۲}$ کدام است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵

۴۳۷ـ تابع با ضابطه $f(x)=[x^{۲}-۱]$ روی بازه $[۳,۳+k)$ پیوسته است. بیشترین مقدار k کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.) (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۳)

۱) $-۲+\sqrt{۱۰}$ ۲) $-۳+\sqrt{۱۵}$ ۳) $-۳+\sqrt{۱۰}$ ۴) ۱

۴۳۸ـ خط $y=۵$ با نمودار تابع $y=\frac{|x^{۲}-۴|}{x+۲}$ در چند نقطه مشترک است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۳۹ـ مقدار تقریبی $\sqrt[۳]{(۱/۹۸)^{۴}+(۳/۰۲)^{۲}+۱/۹۸}$ با کمک دیفرانسیل کدام است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۴)

۱) ۲/۹۶ ۲) ۲/۹۷ ۳) ۲/۹۸ ۴) ۲/۹۹

۴۴۰ـ تعداد و علامت جواب‌های حقیقی معادله حاصل از برخورد منحنی $y=x^{۳}-۳x^{۲}$ با خط به معادله $y=x+۱$ چگونه است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۵)

۱) یک ریشه منفی
۲) یک ریشه مثبت
۳) دو ریشه مثبت و یک ریشه منفی
۴) دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت

۴۴۱ـ حجم محدود به استوانه $\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{y^{۲}}{۹}=۱$ و صفحات $z=۰$ و $z=x-۲y+۴$ کدام است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۶π ۲) ۱۲π ۳) ۱۸π ۴) ۲۴π

۴۴۲- در نقطه M واقع بر منحنی قطبی $r=\sqrt{۲\cos ۲\theta}$، خط مماس موازی محور قطبی (محور x ها) است. فاصله این نقطه از قطب (مبدأ مختصات) کدام است؟ (مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۶)

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۴۴۳ـ دایره‌ای در نقطه (۱,۲) بر سهمی $y=x^{۲}+۱$ مماس است. اگر مقادیر مشتق دوم دایره و سهمی در آن نقطه برابر باشند، شعاع دایره کدام است؟ (مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۳}$ ۳) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$

۴۴۴ـ نقاط $(۰,۰)$، $(۳,۰)$ و $(۰,۴)$ رأس‌های مثلثی هستند. مساحت تبدیل‌یافته این مثلث تحت ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$، کدام است؟ (مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۶)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۴۴۵ـ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $z^{۳}-iz^{۲}-z+i=۰$ به صورت $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ است. دوتایی (r,θ) کدام است؟ (مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۶)

۱) $(\sqrt{۲},\pi)$ ۲) $(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۲})$ ۳) $(۱,\frac{\pi}{۲})$ ۴) $(۱,\frac{۳\pi}{۲})$

۴۴۶ـ حاصل $\sqrt{x^2-4}+\mathrm{Arcsin}(x+1)$ کدام است؟ (هواشناسی کشاورزی ـ سراسری ۹۱)

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۴۴۷ـ محور تقارن منحنی به معادله $y=\frac{2x^2-4x-3}{4-x^2+2x}$ خود منحنی را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (هواشناسی کشاورزی ـ سراسری ۹۱)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) -1 ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) 1

۴۴۸ـ دنباله با جمله عمومی $a_n=\frac{3n+1}{n+2}$ و تابع با ضابطه $f(x)=\frac{(-1)^{[x]}+1}{x^2-5}$ مفروض‌اند (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)، حدّ $f(a_n)$ وقتی $n\to\infty$ کدام است؟ (هواشناسی کشاورزی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) صفر

۴۴۹ـ تابع $f(x)=\frac{1}{x^2-x+1}$ را به صورت مجموع یک تابع فرد و یک تابع زوج می‌نویسیم. مقدار تابع زوج $x=3$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{7}{65}$ ۲) $\frac{13}{63}$ ۳) $\frac{5}{42}$ ۴) $\frac{10}{91}$

۴۵۰ـ در بسط عبارت $(a^2-\frac{b}{3}+2)^n$ یکی از جملات به‌صورت $\frac{560a^2b^2}{3}$ می‌باشد، n کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۵۱ـ اگر $z+\frac{4}{z}=2$ آنگاه $z^5+(\bar{z})^5$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۴۵۲ـ نمودار تابع $f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$ روی بازه $[-2,2]$ با نیمساز ناحیه اول و سوم در چند نقطه مشترک است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۵۳ـ با حروف کلمه MAHDASHT چند رمز عبور سه حرفی می‌توان ساخت؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۳۵ ۳) ۱۵۰ ۴) ۲۱۰

۴۵۴ـ حجم داخل یک سطح استوانه‌ای که قاعده آن در صفحه xoy محدود به محور xها و خط $x=1$ و سهمی $y=x^2$ است و در زیر صفحه $z=x+2y$ قرار گرفته است، کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{9}{20}$

۴۵۵ـ کدام گزینه در مورد سری $1-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})-\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\cdots$ درست است؟ (درس آنالیز ریاضی، ریاضی ـ سراسری ۹۲)

۱) شرط لازم همگرایی را ندارد.
۲) سری همگرای مطلق است.
۳) سری همگرای مشروط است، ولی همگرای مطلق نیست.
۴) سری واگراست.

۴۵۶ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}$ برابر است با: (مبانی آنالیز ریاضی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) 1 ۳) $e-1$ ۴) e

۴۵۷ـ اگر $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}$ و $B=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1\times2\times3\times\dots\times n}{3\times5\times7\times\dots\times(2n+1)})^{\frac{1}{2}}$، کدام گزینه درست است؟ (ریاضی و آمار ـ سراسری ۹۵)

۱) سری A همگرا و سری B واگرا است.
۲) سری A واگرا و سری B همگرا است.
۳) هر دو سری همگرا هستند.
۴) هر دو سری واگرا هستند.

۴۵۸ـ فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر $[1,+\infty)$ باشد که $f(1)=1$ و $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$. کدام گزینه درست است؟ (ریاضی و آمارـ سراسری ۹۵)

۱) تابع f کران‌دار است و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ موجود نیست.
۲) تابع f بی‌کران است و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ موجود نیست.
۳) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
۴) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ موجود و متناهی است.

۴۵۹ـ کدام گزینه جزء ریشه‌های معادله $2z^3+\bar{z}^3=1$ نیست؟ (مهندسی عمران، کلیه گرایش‌ها ـ آزاد ۹۱)

۱) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$
۲) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-\dfrac{1}{2})$
۳) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-\dfrac{1}{2})$
۴) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{1}{2})$

۴۶۰ـ با فرض این‌که صفحه $y=c$ حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y=4-x^2$ و محور xها و yها (در ربع اول)، حول محور y را به دو بخش مساوی تقسیم کند، مقدار c برابر است با: (مهندسی عمران، کلیه گرایش‌ها ـ آزاد ۹۱)

۱) $\sqrt{2}$
۲) $4-2\sqrt{2}$
۳) $1+\sqrt{2}$
۴) $2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

۴۶۱ـ اگر $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\pi}{2}$ آنگاه $\int_0^\infty (\dfrac{\sin x}{x})^2 dx$ برابر است با: (مهندسی مکانیک، کلیهٔ گریش‌ها ـ آزاد ۹۱)

۱) $\dfrac{\pi}{2}$
۲) $\dfrac{\pi}{4}$
۳) $\dfrac{\pi^2}{4}$
۴) $\dfrac{\pi^2}{2}$

۴۶۲ـ دنباله $f_n(x)=n^c x(1-x^2)^n$ مفروض است. بزرگ‌ترین مجموعه مقادیری که c می‌تواند اختیار نماید تا تساوی $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx$ برقرار گردد، برابر است با: (ریاضی، کلیهٔ گرایش‌ها ـ آزاد ۹۱)

۱) $c<1$
۲) $c\geq 1$
۳) $0<c<1$
۴) $c\leq 0$

۴۶۳ـ در مختصات کروی $tg^2\phi=1$ چه رویه‌ای را مشخص می‌کند؟ (مهندسی صنایع (سیستم و بهره‌وری و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۹۱)

۱) کره
۲) مخروط
۳) هذلولوی
۴) سهمی‌وار

۴۶۴ـ معادله با مشتقات جزئی تابع $f(x^2+y^2+z^2, z^2-2xy)=0$ که f تابعی دلخواه است، برابر است با: (مهندسی مواد (کلیهٔ گرایش‌ها) ـ آزاد ۹۱)

۱) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y-x}{z}$
۲) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y+x}{z}$
۳) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y+x}{z}$
۴) $2\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y-x}{z}$

۴۶۵ـ ناحیه مثلثی با رئوس $(0,-1)$ و $(1,0)$ و $(0,1)$ در صفحه xy حول خط $x=-1$ دوران داده می‌شود. حجم جسم دوار حاصل کدام است؟ (مهندسی عمران، کلیهٔ گرایش‌ها ـ آزاد ۹۲)

۱) $\dfrac{2\pi}{3}$
۲) $\dfrac{4\pi}{3}$
۳) $\dfrac{8\pi}{3}$
۴) $\dfrac{14\pi}{3}$

۴۶۶ـ کدام‌یک از انتگرال‌های زیر واگرا هستند؟ (مهندسی صنایع (سیستم و بهره‌وری و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۹۲)

۱) $\int_0^1 \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$
۲) $\int_0^1 \dfrac{\cos x}{x^2}dx$
۳) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{Ln\dfrac{1}{x}}}$
۴) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Ln(\sin x)dx$

۴۶۷ـ کوتاه‌ترین فاصله مبدأ از منحنی $x^2+8xy+7y^2=225$ و $z=0$ کدام است؟ (مهندسی صنایع (سیستم و بهره‌وری و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۹۲)

۱) $\sqrt{5}$
۲) ۵
۳) ۲۵
۴) $\dfrac{1}{5}$

۴۶۸ـ چنانچه ماتریس A یک ماتریس متغیر با زمان باشد، مشتق A^{-1} (معکوس A) نسبت به t کدام گزینه است؟ (مهندسی برق (کلیه گرایش‌ها) ـ آزاد ۹۲)

۱) $A^{-1}\dfrac{dA}{dt}A^{-1}$
۲) $-A^{-1}\dfrac{dA}{dt}A$
۳) $-A^{-1}\dfrac{dA}{dt}A^{-1}$
۴) $A\dfrac{dA}{dt}A^{-1}$

۴۶۹ـ تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & ;x\in\mathbb{Q} \\ 2x-1 & ;x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ روی بازه $(0,2)$ تعریف شده است، در این صورت f: (ریاضی (کلیه گرایش‌ها) ـ آزاد ۹۲)

۱) فقط در $x=1$ مشتق دارد و $f'(1)=0$
۲) فقط در $x=1$ مشتق دارد و $f'(1)\neq 0$
۳) در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.
۴) مشتق آن در اعداد گویا $2x$ و در اعداد اصم ۲ می‌باشد.

۴۷۰ـ ریشه معادله $\text{Arctgx} - \text{Arccot}\,x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (آمار ـ آزاد ۹۲)

۱) صفر ۲) $1+\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴۷۱ـ مساحت ناحیه محدود به $x^2+y^2=4$ و داخل $y^2=4(1-x)$ را محاسبه کنید. (ژئوفیزیک (کلیه گرایش‌ها) ـ آزاد ۹۲)

۱) $\pi-\frac{8}{3}$ ۲) $2\pi+\frac{8}{3}$ ۳) $\pi+\frac{2}{3}$ ۴) $\pi-\frac{1}{3}$

۴۷۲ـ انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^5 x dx$ برابر است با: (ژئوفیزیک (کلیه گرایش‌ها) ـ آزاد ۹۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۴۷۳ـ دستگاه مختصات به اندازه زاویه $\frac{\pi}{6}$ دوران کرده است. مختصات جدید نقطه $M(\sqrt{3},3)$ را بیابید. (ژئوفیزیک (کلیهٔ گرایش‌ها) ـ آزاد ۹۲)

۱) $(-1,1)$ ۲) $(3,\sqrt{3})$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(\sqrt{3},\frac{1}{2})$

۴۷۴ـ کدام گزینه در مورد $A=|\sin(x+\alpha)-\sin\alpha - x\cos\alpha|$ برای $x\in\mathbb{R}$ درست است؟ (هواشناسی ـ ژئوفیزیک ـ دکتری ۹۵)

۱) $A<\frac{|x|}{2}$ ۲) $A>\frac{|x|}{2}$ ۳) $A\geq\frac{x^2}{2}$ ۴) $A\leq\frac{x^2}{2}$

۴۷۵ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt[3]{x+1}-\sin\sqrt[3]{x})$ کدام است؟ (کشاورزی، آبیاری و زه‌کشی ـ آزاد ۹۲)

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) نامشخص

۴۷۶ـ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}$ کدام است؟ (کشاورزی، آبیاری و زه‌کشی ـ آزاد ۹۲)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) $\frac{4}{e}$

۴۷۷ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{dx}{\cos^4 2x}$ کدام است؟ (کشاورزی، مکانیزاسیون کشاورزی ـ آزاد ۹۲)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۴۷۸ـ حداکثر و حداقل تابع $f(x,y)=(x^2-4x)\cos y$ در حوزه $1\leq x\leq 3$ و $-\frac{\pi}{4}\leq y\leq\frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۳)

۱) $f_{min}=-3, f_{max}=0$
۲) $f_{min}=-4, f_{max}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
۳) $f_{min}=-\frac{4\sqrt{2}}{2}, f_{max}=0$
۴) $f_{min}=-\frac{4\sqrt{2}}{2}, f_{max}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۴۷۹ـ حاصل $\int_0^{+\infty}x^2\cos x e^{-x}dx$ کدام است؟ (مدیریت اجرایی ـ آزاد ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۴۸۰ـ حاصل $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$ برابر است با: (مهندسی مواد ـ آزاد ۹۳)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ۴) $\pi\sqrt{2}$

۴۸۱ـ مقدار انتگرال $\int_0^{\pi}\sin^6\theta d\theta$ چقدر است؟ (بیومکانیک ـ آزاد ۹۳)

۱) $\frac{5\pi}{16}$ ۲) $\frac{3\pi}{16}$ ۳) $\frac{3\pi}{8}$ ۴) $\frac{5\pi}{8}$

۴۸۲ـ اگر $\nabla f(x,y,z)$ با (x,y,z) موازی باشد، آنگاه مورد نادرست کدام است؟
(مهندسی پزشکی (کلیه گرایش‌ها)، علوم و فناوری نانو (کلیه گرایش‌ها)، محیط زیست (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۴)

۱) $f(-1,1,0)=f(0,0,\sqrt{2})$
۲) $f(1,-1,0)=f(1,0,1)$
۳) $f(1,-\sqrt{2},1)=f(\sqrt{2},-1,-\sqrt{2})$
۴) $f(\sqrt{2},-1,0)=f(1,-1,-1)$

۴۸۳ــ بیشترین مقدار تابع با ضابطه $f(x)=x-\sqrt[3]{x^3+x^2}$ کدام است؟
(سازه‌های آبی، آبیاری و زهکشی، هواشناسی کشاورزی، مکانیزاسیون کشاورزی ــ دکتری ۹۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $1-\sqrt[3]{2}$ ۳) $\sqrt[3]{2}-1$ ۴) صفر

۴۸۴ــ مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}$ و محور x ها کدام است؟
(سازه‌های آبی، آبیاری و زهکشی، هواشناسی کشاورزی، مکانیزاسیون کشاورزی ــ دکتری ۹۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{3}{16}$

۴۸۵ــ چنبره‌ای به وسیله حرکت کره‌ای به شعاع واحد که مرکز آن بر روی دایره‌ای به شعاع ۲ واحد در حرکت است به وجود می‌آید. مساحت سطح این چنبره کدام است؟
(سازه‌های آبی، آبیاری و زهکشی، هواشناسی کشاورزی، مکانیزاسیون کشاورزی ــ دکتری ۹۴)

۱) 8π ۲) 16π ۳) $4\pi^2$ ۴) $8\pi^2$

۴۸۶ــ قاعده یک تپه شنی ناحیه‌ای را در صفحه xoy می‌پوشاند که محدود است به سهمی $x^2+y=6$ و خط $y=x$. ارتفاع شن در بالای هر نقطه $M(x,y)$ برابر x^2 است. حجم شن این تپه کدام است؟
(سازه‌های آبی، آبیاری و زهکشی، مکانیک بیوسیستم، هواشناسی کشاورزی، مکانیزاسیون کشاورزی ــ دکتری ۹۴)

۱) $30/75$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) 0

۴۸۷ــ جسم همگن نازک محدود به سهمی $x+y^2-2y=0$ و خط $x+2y=0$ مفروض است. طول مرکز ثقل این جسم کدام است؟
(سازه‌های آبی، آبیاری و زهکشی، مکانیک بیوسیستم، هواشناسی کشاورزی، مکانیزاسیون کشاورزی ــ دکتری ۹۴)

۱) $-1/8$ ۲) $-2/4$ ۳) $-2/6$ ۴) $-2/8$

۴۸۸ــ اگر α زاویه بین بردار قائم بر رویه $z=(x^2+y^2+1)\sqrt{x^2+y^2}$ در نقطه $M(x,y,z)$ و محور z ها باشد، حد $\cos\alpha$ وقتی $(x,y,z)\to(0,0,0)$ کدام است؟
(سازه‌های آبی، آبیاری و زهکشی، مکانیک بیوسیستم، هواشناسی کشاورزی، مکانیزاسیون کشاورزی ــ دکتری ۹۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴۸۹ــ کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{0}\frac{2^x}{4^x+1}dx$ درست است؟ (آمار ــ دکتری ۹۴)

۱) همگرا به $\frac{\pi}{\operatorname{Ln}4}$ است. ۲) همگرا به $\frac{\pi}{4}$ است. ۳) همگرا به $\frac{\pi}{4\operatorname{Ln}2}$ است. ۴) واگراست.

۴۹۰ــ مجموعه تمامی مقادیر p که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})^p$ همگرا است، کدام است؟ (آمار ــ دکتری ۹۴)

۱) $(1,+\infty)$ ۲) $(\frac{3}{2},+\infty)$ ۳) $(\frac{2}{3},+\infty)$ ۴) به ازای هیچ مقدار

۴۹۱ــ فرض کنید $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(0)=0$. اگر $f'(x)$ بر بازه $(0,2)$ موجود و صعودی باشد، آنگاه تابع $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ بر بازه $(0,2)$:
(آمار ــ دکتری ۹۴)

۱) صعودی است. ۲) نزولی است. ۳) ثابت است. ۴) مثبت است.

۴۹۲ــ اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد که $f(0)=0$ و $f'(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$، کدام نامساوی درست است؟ (آمار ــ دکتری ۹۵)

۱) $|f(x)|\le 1$ ۲) $|f(x)|\le x^4$ ۳) $|f(x)|\le|x|$ ۴) $|x|\le|f(x)|$

۴۹۳ــ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)(\sin^n x-\sin^{n+2}x)dx$ کدام است؟ (ریاضی کاربردی ــ دکتری ۹۴)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) ۱ ۳) وجود ندارد. ۴) 0

۴۹۴ــ معادله $5^x=4^x+3^x$ دقیقاً چند جواب حقیقی دارد؟
(مهندسی عمران، مهندسی نقشه‌برداری، مهندسی دریا، مهندسی محیط زیست، فناوری نانو ــ دکتری ۹۵)

۱) دو ۲) یک ۳) چهار ۴) سه

۴۹۵ـ تابع f، یک متغیره و همه‌جا مشتق‌پذیر است، اگر $z=f(\frac{x^2+y^2}{xy})$ باشد، مقدار $(x+1)z_x+(y+1)z_y$ در $(x,y)=(2,1)$ کدام است؟

(مهندسی عمران، مهندسی نقشه‌برداری، مهندسی محیط زیست، مهندسی دریا، فناوری نانو ـ دکتری ۹۵)

۱) $-\frac{3}{4}f'(\frac{5}{2})$ ۲) $-\frac{3}{2}f'(\frac{5}{2})$ ۳) $\frac{3}{4}f'(\frac{5}{2})$ ۴) $\frac{3}{2}f'(\frac{5}{2})$

۴۹۶ـ منحنی C از $(0,0)$ شروع شده بر محور x به $(2,0)$ می‌رسد و سپس روی خطی موازی محور yها به $(2,4)$ می‌رود و نهایتاً بر خطی موازی محور xها به $(0,4)$ می‌رسد. اگر $F(x,y)=(\cos x\sin y, xy+\sin x\cos y+1)$ باشد، مقدار انتگرال F بر منحنی C کدام است؟

(مهندسی عمران، مهندسی نقشه‌برداری، مهندسی محیط زیست، مهندسی دریا، فناوری نانو ـ دکتری ۹۵)

۱) ۰ ۲) ۴− ۳) ۲۰ ۴) ۱۶

۴۹۷ـ حجم ناحیه درون $\frac{(x+y-z)^2}{4}+\frac{(y-z)^2}{9}+z^2=1$ کدام است؟

(مهندسی عمران، مهندسی نقشه‌برداری، مهندسی محیط زیست، مهندسی دریا، فناوری نانو ـ دکتری ۹۵)

۱) $\frac{15\pi}{2}$ ۲) $\frac{17\pi}{2}$ ۳) 8π ۴) 9π

۴۹۸ـ از رابطه بازگشتی $a_1=1$ ، $a_n=2a_{n-1}+1$، مقدار $a_{10}-a_9$ برابر کدام است؟

(مهندسی آب و هواشناسی، مهندسی مکانیک و مکانیزاسیون کشاورزی ـ دکتری ۹۵)

۱) ۵۱۲ ۲) ۵۲۴ ۳) ۵۶۴ ۴) ۵۷۶

۴۹۹ـ در یک مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌های حاده با سرعت $\frac{\pi}{90}$ رادیان برثانیه تغییر می‌کنند، اگر طول وتر آن ثابت و برابر ۱۸ سانتی‌متر باشد، وقتی اندازه زاویه حاده به $\frac{\pi}{6}$ برسد، سرعت تغییر مساحت مثلث قائم‌الزاویه کدام است؟

(مهندسی آب و هواشناسی، مهندسی مکانیک و مکانیزاسیون کشاورزی ـ دکتری ۹۵)

۱) $\frac{5\pi}{4}$ ۲) $\frac{4\pi}{5}$ ۳) $\frac{10\pi}{9}$ ۴) $\frac{9\pi}{10}$

۵۰۰ـ نقاط تلاقی دو خط به معادلات $y=\frac{1}{3}$ و $y=-\frac{1}{3}$ با نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\cos x & -\pi\le x\le 0\\ \cos(\pi-x) & 0<x\le\pi\end{cases}$ راس‌های یک چهارضلعی است. مساحت این چهارضلعی کدام است؟

(مهندسی آب و هواشناسی، مهندسی مکانیک و مکانیزاسیون کشاورزی ـ دکتری ۹۵)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{4\pi}{3}$

۵۰۱ـ فاصله نقطه تلاقی منحنی قطبی $r=\sin 2\theta$ با خط $\theta=\frac{\pi}{3}$، از محور قطبی کدام است؟ (علوم و مهندسی صنایع غذایی ـ دکتری ۹۵)

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۵۰۲ـ جواب معادله $\tanh(\frac{1}{2}\operatorname{Ln}x)=\frac{1}{3}$، کدام است؟ (علوم و مهندسی صنایع غذایی ـ دکتری ۹۵)

۱) ۲− ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) ۲

۵۰۳ـ نقطه $A(1,-2,5)$ مرکز مکعبی است که یک وجه آن منطبق بر صفحه به معادله $2x+y-2z=2$ می‌باشد، حجم این مکعب کدام است؟

(علوم و مهندسی صنایع غذایی ـ دکتری ۹۵)

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۵ ۳) ۲۱۶ ۴) ۵۱۲

۵۰۴ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\cos 1}\times\frac{1}{\cos\frac{1}{2}}\times\dots\times\frac{1}{\cos\frac{1}{n}}}$ کدام است؟ (ریاضی ـ دکتری ۹۵)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ∞

۵۰۵ـ فرض کنید $a>0$ و تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت عددی مانند c در بازه (a,b) یافت می‌شود به طوری که مقدار $\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$ برابر است با: (ریاضی ـ دکتری ۹۵)

۱) $f(c)$ ۲) $f'(c)$ ۳) $f(c)-cf'(c)$ ۴) $cf'(c)-f(c)$

۵۰۶ــ فرض کنید f بر $(0,\infty)$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x\to\infty} f'(x)=1$ در این صورت: (ریاضی ـ دکتری ۹۵)

۱) $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$
۲) $\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=1$
۳) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$
۴) به ازای هر $h\in(0,1)$ ، $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}$

۵۰۷ــ برد تابع $f(x)=\lim_{n\to+\infty}(\sin\frac{\pi x}{5})^n$ چند عضو دارد؟ (علوم شناختی ـ دکتری ۹۵)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵۰۸ــ ماتریس $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}$ مفروض است. کدام مورد در مورد این ماتریس صحیح نیست؟ (علوم اقتصادی ـ دکتری ۹۵)

۱) اثر (Trace) این ماتریس صفر است.
۲) ماتریس الحاقی این ماتریس صفر است.
۳) این ماتریس وارون‌پذیر است.
۴) مرتبه این ماتریس ۳ است.

۵۰۹ــ اگر $z=z(u,v)$ و $\begin{cases}u=x-t\\v=2x+t\end{cases}$ باشد، آنگاه معادله $z_{xx}+2z_{tt}=0$ به چه معادله‌ای تبدیل می‌شود؟
(برق، مهندسی شیمی، مهندسی سیستم‌های انرژی، هوافضا ـ دکتری ۹۵)

۱) $z_{uv}=0$
۲) $z_{uu}=z_{vv}$
۳) $z_{uu}+2z_{vv}=0$
۴) $z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv}=0$

۵۱۰ــ دترمینان ماتریس زیر کدام است؟ (ریاضی، درس مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی ـ دکتری ۹۵)

$$\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\2&1&-2&1\\1&-1&1&2\\-2&1&2&1\end{pmatrix}$$

۱) -30
۲) 0
۳) 30
۴) -48

۵۱۱ــ بیشترین مقدار $x+y$ که در مجموعه $\{(x,y)\,|\,x>0, y>0, 3y+x\le 21, y+2x\le 14\}$ واقع باشد کدام است؟
(سنجش از دور و سامانه اطلاعات جغرافیایی ـ دکتری ۹۶)

۱) ۸/۷
۲) ۹/۶
۳) ۹/۸
۴) ۱۰/۲

۵۱۲ــ اگر $f(x)=[x+\frac{2}{3}]+[x-\frac{1}{3}]+1$ و $g(x)=Ln(4-9x^2)$ آنگاه دامنه تابع $\frac{g}{f}$، کدام است؟
(سنجش از دور و سامانه اطلاعات جغرافیایی ـ دکتری ۹۶)

۱) $(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}]$
۲) $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$
۳) $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$
۴) $[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

۵۱۳ــ تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $x^2+2x=-1+\sqrt{x}$ کدام است؟ (سنجش از دور و سامانه اطلاعات جغرافیایی ـ دکتری ۹۶)

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۵۱۴ــ رتبه ماتریس مقابل کدام است؟ (سنجش از دور و سامانه اطلاعات جغرافیایی ـ دکتری ۹۶)

$$\begin{bmatrix}2&3&5&4\\0&2&3&4\\4&8&13&12\end{bmatrix}$$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵۱۵ــ در تابع پارامتری $\begin{cases}x=Ln(t+1)\\y=Ln(t^2-1)\end{cases}$ ، مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $x=2Ln2$ ، کدام است؟ (علوم اقتصادی ـ دکتری ۹۶)

۱) ۱
۲) ۲-
۳) ۲
۴) $-\frac{1}{2}$

۵۱۶ــ اگر $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ و $F(x)=\lim_{n\to\infty}x^2\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}tg(\frac{ix^2}{n})$ ، آنگاه $F'(x)$ کدام است؟ (هواشناسی ـ دکتری ۹۶)

۱) $xtgx$
۲) x^2tgx
۳) x^2tgx^2
۴) $2xtgx^2$

۵۱۷ـ مقدار انتگرال $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dA$ که در آن D مثلثی با رئوس $(0,0)(0,1)$ و $(1,0)$ است، کدام است؟ (هواشناسی ـ دکتری ۹۶)

۱) $\frac{1}{4}(e^{-1}-e)$ ۲) $\frac{1}{2}(e^{-1}-e)$ ۳) $\frac{e^2-1}{2e}$ ۴) $\frac{e^2-1}{4e}$

۵۱۸ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k\sqrt{k}+1}{n^2}\sin\frac{k}{n}$ کدام است؟ (آمار ـ دکتری ۹۶)

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۵۱۹ـ سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})^{\alpha}}$ همگراست اگر و تنها اگر ... (آمار ـ دکتری ۹۶)

۱) $\alpha>1$ ۲) $\alpha\ge 2$ ۳) $\alpha\ge 1$ ۴) $\alpha>0$

۵۲۰ـ شعاع همگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^{n!}$ کدام است؟ (آمار ـ دکتری ۹۶)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) ∞

۵۲۱ـ کدام گزینه درباره تابع $f(x)=[x]\sin^2(\pi x)$ بر $\mathbb{R}$ درست است؟ (آمار ـ دکتری ۹۶)

۱) برای هر $x\in\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\pi[x]\sin(2\pi x)$.
۲) این تابع فقط در نقاط صحیح مشتق‌پذیر است.
۳) این تابع در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.
۴) این تابع فقط در نقاط صحیح مشتق‌پذیر نیست.

۵۲۲ـ مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ ، $r(t)=(a\cos^3 t,a\sin^3 t)$ $(a>0)$ حول خط $4x+3y+5=0$ کدام است؟

(علوم و فناوری نانو، نانوشیمی ـ دکتری ۹۶)

۱) $\frac{42}{25}a^2\pi+5\pi a$ ۲) $\frac{47}{25}a^2\pi+5\pi a$ ۳) $\frac{42}{25}a^2\pi+3\pi a$ ۴) $\frac{47}{25}a^2\pi+3\pi a$

۵۲۳ـ اگر x ، y و z زوایای یک مثلث باشند، ماکزیمم مقدار $w=\sin x\sin y\sin z$ کدام است؟ (علوم و فناوری نانو، نانوشیمی ـ دکتری ۹۶)

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۵۲۴ـ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}+\frac{n-1}{n}]$ کدام است؟ (علوم شناختی ـ دکتری ۹۶)

۱) 1 ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ∞

۵۲۵ـ سری تیلور تابع $f(x)=\frac{x^4}{(1-x)^3}$ حول نقطه $x=0$ کدام است؟ (علوم شناختی ـ دکتری ۹۶)

۱) $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=4}^{\infty}n(n-1)x^n$ ۲) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}n(n-1)x^n$ ۳) $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=4}^{\infty}(n-3)(n-2)x^n$ ۴) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}(n-3)(n-2)x^n$

۵۲۶ـ فرض کنید S سطح نیمهٔ بالایی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=9$ باشد. مقدار انتگرال $\iint_S z^3\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$ کدام است؟

(مهندسی محیط‌زیست (کلیه گرایش‌ها) و فناوری نانو (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۶)

۱) $\frac{972\pi}{5}$ ۲) $\frac{672\pi}{5}$ ۳) 200π ۴) 100π

۵۲۷ـ فرض کنید D ناحیه نیم‌دایره‌ای بالای محور xها با معادله $x^2+y^2=4$ باشد. حاصل انتگرال $\iint_D y\cos\sqrt{x^2+y^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ کدام است؟

(مهندسی محیط‌زیست (کلیه گرایش‌ها) و فناوری نانو (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۶)

۱) $-\frac{7}{4}\cos 4-\sin 4-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{7}{4}\cos 4+\sin 4-\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{9}{4}\cos 4+\sin 4-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{9}{4}\cos 4-\sin 4-\frac{1}{4}$

۵۲۸ـ وضعیت انتگرال‌های ناسره $A=\int_0^1 \frac{(\operatorname{Ln}x)^{1395}}{\sqrt{x}}dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{1395}}{x^{1397}}dx$ به ترتیب کدام است؟

(مهندسی پزشکی (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۶)

۱) همگرا ـ همگرا
۲) همگرا ـ واگرا
۳) واگرا ـ همگرا
۴) واگرا ـ واگرا

۵۲۹ـ فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$، کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟ (مهندسی پزشکی (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۶)

۱) f در $(0,0)$ پیوسته است اما $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در این نقطه پیوسته نیستند.
۲) f در $(0,0)$ ناپیوسته است اما $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در این نقطه پیوسته‌اند.
۳) f و $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ هر سه در $(0,0)$ ناپیوسته‌اند.
۴) f و $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ هر سه در $(0,0)$ پیوسته‌اند.

۵۳۰ـ قسمتی از سطح همگن محدود به منحنی $y=2\sin 3x$ در بازه $[0,\frac{\pi}{3}]$ است. فاصله مرکز ثقل آن تا محور x ها کدام است؟

(مکانیزاسیون کشاورزی ـ دکتری ۹۶)

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) $\frac{\pi}{4}$
۳) $\frac{\pi}{6}$
۴) $\frac{\pi}{3}$

۵۳۱ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y^2=4x$ و خط قائم $x=1$ را حول محور $y=-2$ دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

(علوم و مهندسی آب (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۶)

۱) $\frac{14\pi}{3}$
۲) $\frac{16\pi}{3}$
۳) $\frac{28\pi}{3}$
۴) $\frac{32\pi}{3}$

۵۳۲ـ اگر $\vec{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و $R=|\vec{r}|$، آنگاه دیورژانس $\frac{\vec{r}}{R}$ کدام است؟ (علوم و مهندسی آب (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۶)

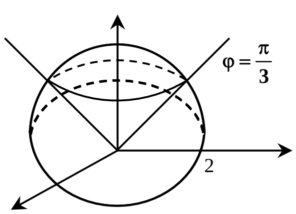
۱) $-2R^{-1}$
۲) R^{-1}
۳) صفر
۴) $2R^{-1}$

۵۳۳ـ محل تلاقی دو رویه $\phi=\frac{\pi}{3}$ و $\rho=2$ در مختصات کروی تشکیل یک منحنی در فضا را می‌دهد. خمیدگی (انحناء) κ و تاب τ منحنی در نقطه $(2,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$ در مختصات کروی به ترتیب برابرند با: (آزمون دکتری دانشگاه امیرکبیر ـ سال ۸۷)

۱) $\tau=1,\ \kappa=\frac{1}{3}$
۲) $\tau=1,\ \kappa=\sqrt{3}$
۳) $\tau=0,\kappa=\frac{1}{3}$
۴) $\tau=0,\kappa=\frac{\sqrt{3}}{3}$

۵۳۴ـ مساحت قسمتی از کره که داخل مخروطی مطابق شکل قرار دارد برابر است با: (آزمون دکتری دانشگاه امیرکبیر ـ سال ۸۷)

۱) 4π
۲) $4\pi\sqrt{3}$
۳) 4
۴) $\frac{\pi}{3}$



۵۳۵ـ کره‌ای بر دو صفحه به معادله $x+y+z=3$ و $x+y+z=9$ مماس است و دو صفحه به معادلات $y-2x=0$ و $z-3x=0$ از مرکز کره می‌گذرند. به ازای کدام مقدار a این کره بر صفحه به معادله $ax-y+2z=0$ مماس است؟ (آزمون دکتری دانشگاه صنعتی شریف ـ سال ۸۷)

۱) $2\pm\sqrt{2}$
۲) $3\pm\sqrt{5}$
۳) $1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
۴) $2\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۵۳۶ـ اگر ماتریس $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ و تعریف کنیم $e^A=I+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots$ آنگاه e^A کدام است؟

(آزمون دکتری دانشگاه صنعتی شریف ـ سال ۸۷)

۱) $\begin{pmatrix}e^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
۲) $\begin{pmatrix}2-e^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
۳) $\begin{pmatrix}e^{-1}+1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
۴) $\begin{pmatrix}e^{-1}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

۵۳۷ـ در صفحه مختلط مکان هندسی z هایی که $\frac{\text{Re}\, z}{|z|^2} = \text{Re}(\frac{1}{z+i} + 2i)$، کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $z = \frac{1}{2} + bi$ یا $z = -\frac{1}{2} + bi$ که $b \in R$
۲) $z = bi$ یا $z = -\frac{1}{2} + bi$ که $b \in R$ و $b \neq 0$
۳) $z = bi$ یا $z = a + \frac{1}{2}i$ که $b \in R$ و a و $b \neq 0$ و $b \neq -1$
۴) $z = bi$ یا $z = a - \frac{1}{2}i$ که $b \in R$ و a و $b \neq 0$ و $b \neq -1$

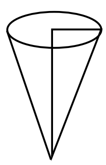
۵۳۸ـ اگر برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$، $(a \neq 0)$ آنگاه شعاع همگرایی سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\sqrt{a}}{a}$
۲) $\sqrt{a}$
۳) $a\sqrt{a}$
۴) a^2

۵۳۹ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) 0
۲) 1
۳) e^{-2}
۴) e^2

۵۴۰ـ در داخل یک ظرف مخروطی (مطابق شکل) که دارای شعاع قاعده‌ی ۳متر و ارتفاع ۴ متر است با سرعت ثابت ۵ متر مکعب بر ثانیه آب می‌ریزیم. زمانی که سطح آب در ارتفاع ۲متری قرار دارد، سرعت بالا آمدن آب در داخل ظرف چقدر است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)



۱) $\frac{5}{9\pi}$
۲) $\frac{15}{3\pi}$
۳) $\frac{20}{9\pi}$
۴) $\frac{20}{3\pi}$

۵۴۱ـ مقدار مساحت محصور در داخل $(4x - 3y)^2 + (2x + y)^2 = 25$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{25\pi}{2}$
۲) $\frac{5\pi}{2}$
۳) 250π
۴) 50π

۵۴۲ـ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{7}{4}$
۲) $\frac{13}{4}$
۳) $\frac{15}{4}$
۴) $\frac{9}{4}$

۵۴۳ـ انتگرال $\int_0^1 \int_0^1 f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sec\theta} r f(r) dr d\theta$
۲) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\text{cosec}\,\theta} r f(r) dr d\theta$
۳) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\theta} r f(r) dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\text{cosec}\,\theta} r f(r) dr d\theta$
۴) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\text{cosec}\,\theta} r f(r) dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sec\theta} r f(r) dr d\theta$

۵۴۴ـ امتداد نیمساز زاویه بین $\vec{u} = (1,2,-2)$ و $\vec{v} = (3,0,-4)$ با امتداد کدام بردار مشخص می‌شود؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{14}{15}i - \frac{2}{3}j - \frac{22}{15}k$
۲) $\frac{14}{15}i + \frac{2}{3}j - \frac{22}{15}k$
۳) $\frac{14}{15}i + \frac{2}{3}j + \frac{22}{15}k$
۴) $\frac{14}{15}i - \frac{2}{3}j + \frac{22}{15}k$

۵۴۵ـ اگر a یک عدد حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آنگاه ریشه‌های معادله $(\frac{1+iz}{1-iz})^n = \frac{1+ai}{1-ai}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) همگی حقیقی‌اند.
۲) همگی موهومی‌اند.
۳) بعضی حقیقی و بعضی موهومی‌اند.
۴) بستگی به a دارد.

۵۴۶ـ میدان‌های برداری $\vec{F}$ و $\vec{G}$ مفروض‌اند. $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G})$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) $\vec{G}.\text{Curl}\vec{F} + \vec{F}.\text{Curl}\vec{G}$
۲) $\vec{F}.\text{Curl}\vec{G} - \vec{G}.\text{Curl}\vec{F}$
۳) $\vec{G}.\text{Curl}\vec{F} - \vec{F}.\text{Curl}\vec{G}$
۴) $\vec{F}.\text{Curl}\vec{F} - \vec{G}.\text{Curl}\vec{G}$

۵۴۷ـ یک خط به معادله‌ی $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ صفحه‌ی $x + y + z = 15$ را در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) قطع کرده است. در این صورت y_0 برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۷

۵۴۸ـ اگر برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a$ ، $(a\neq 0)$ آنگاه شعاع همگرایی سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^{2n}$ کدام است؟
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\sqrt{a}}{a}$ ۲) $\sqrt{a}$ ۳) $a\sqrt{a}$ ۴) a^2

۵۴۹ـ رویه‌ی $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{c}$ مفروض است. مجموع طول و عرض و ارتفاع از مبدأ صفحه مماس بر رویه در هر نقطه آن برابر است با:
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۳)

۱) $3\sqrt{c}$ ۲) $\sqrt{c}$ ۳) $\frac{\sqrt{c}}{3}$ ۴) c

۵۵۰ـ مقدار $\iint_D xy(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy$ که در آن $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{1}{14}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۵۵۱ـ کدام گزینه یک تابع اولیه (ضد مشتق) برای $f(x)=\operatorname{sech}x$ است؟ (علوم کامپیوتر ـ گرایش نظریه و مهندسی دانش ـ سراسری ۹۴)

۱) $F(x)=2\operatorname{tg}^{-1}(e^x)$ ۲) $F(x)=2\operatorname{tgh}^{-1}(e^x)$

۳) $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|\operatorname{sech}x-\operatorname{tgh}x|$ ۴) $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|\operatorname{sech}x+\operatorname{tgh}x|$

۵۵۲ـ بردار مکان یک ذره متحرک در لحظه t برابر است با $\vec{r}(t)=3\cos(2t)\vec{i}+4\vec{j}+3\sin(2t)\vec{k}$. انحنای مسیر کدام است؟
(علوم کامپیوتر (علوم تصمیم و مهندسی دانش) ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 3

۵۵۳ـ حجم حاصل از دوران ناحیه بین منحنی $y=x^2$ و خط $y=1$ حول خط $y=2$ کدام است؟
(علوم کامپیوتر (علوم تصمیم و مهندسی دانش) ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{56\pi}{15}$ ۲) $\frac{65\pi}{15}$ ۳) $\frac{68\pi}{15}$ ۴) $\frac{86\pi}{15}$

۵۵۴ـ مقدار انتگرال $\iiint_R \sin(\pi y^3)dv$ که در آن R هرم به رئوس $(0,0,0)$، $(0,1,0)$، $(1,1,0)$، $(1,1,1)$ و $(0,1,1)$ است، کدام است؟
(علوم کامپیوتر و علوم کامپیوتر (علوم تصمیم و مهندسی دانش) ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{2}{3\pi}$ ۲) $\frac{4}{3\pi}$ ۳) $\frac{3}{4\pi}$ ۴) $\frac{3}{2\pi}$

۵۵۵ـ تحت چه شرایطی روی a و b دستگاه $\begin{pmatrix}1&1&1\\b&3&b\\2&2&a\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3\\2b\\7\end{pmatrix}$ بینهایت جواب دارد؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۵)

۱) $a\neq 2, b\neq 3$ ۲) $a=2, b\neq 3$ ۳) $a\neq 2, b=3$ ۴) $a=2, b=3$

۵۵۶ـ در امتداد منحنی $\vec{r}=\vec{r}(s)$، که در آن s پارامتر طول قوس است و $\vec{r}'=\frac{d\vec{r}}{ds}$، عبارت $\vec{r}'.(\vec{r}''\times\vec{r}''')$ برابر کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\kappa^2\tau$ ، κ انحنا و τ تاب منحنی است. ۲) $\rho^2\tau$ ، $\rho=\frac{1}{\kappa}$

۳) $\kappa\tau^2$ ۴) $\rho\tau^2$

۵۵۷ـ هرگاه منحنی قطبی $r=f(\theta)$ در مبدأ بر محور x ها مماس باشد، شعاع انحنا در مبدأ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{2}r(\frac{d\theta}{dr})$ ۲) $\frac{1}{2}(\frac{dr}{d\theta})$ ۳) $2(\frac{dr}{d\theta})$ ۴) $2r(\frac{dr}{d\theta})$

۵۵۸ـ فرض کنید منحنی C نمودار معادله $f(x,y)=0$ باشد به‌طوری‌که f_x و f_y موجود و پیوسته هستند و $f_x^2+f_y^2\neq 0$، در این صورت خط قائم بر C در نقطه $p_0=(x_0,y_0)$ برابر است با:
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۱)

۱) $f_y(x_0,y_0)(x-x_0)+f_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$ ۲) $f_y(x_0,y_0)(x-x_0)-f_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

۳) $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$ ۴) $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

۵۵۹ـ مشتق جهتی مرتبه دوم تابع $f(x,y,z)=xyz$ ، در نقطه (۱ و ۳ و ۲) در جهت $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{-2}{3}$ ۲) $\frac{-4}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۵۶۰ـ فرض کنید $f(\circ)=1$ ، $f'(x)=1+f^{10}(x)$. ضریب x^3 در بسط مک لورن تابع $f(x)$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{140}{3}$ ۲) $\frac{190}{3}$ ۳) ۲۸۰ ۴) ۳۸۰

۵۶۱ـ حد دنباله $1,-\frac{2}{2},\frac{3}{4},\frac{-4}{8},\frac{5}{16},\ldots$ در صورت وجود کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۵۶۲ـ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق می‌کند. (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

الف ـ روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر است. ب ـ $f(a)f(b)<\circ$ ج ـ $f'(x)>\circ$ (به ازای هر $x\in(a,b)$) دراین صورت:

۱) معادله $f(x)=\circ$ ممکن است بیش از یک جواب داشته باشد.
۲) همواره $f(x)\neq\circ$.
۳) معادله $f(x)=\circ$ دقیقاً یک جواب روی $[a,b]$ دارد.
۴) در مورد جواب معادله $f(x)=\circ$ روی $[a,b]$ هیچ قضاوتی نمی‌توان کرد.

۵۶۳ـ اگر برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ ، $f(a+b)=f(a)f(b)$, $f(\circ)\neq\circ$ و $f'(\circ)$ موجود باشد آنگاه: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $f'(\circ)=f(\circ)f'(x)$
۲) برای هر $x\neq\circ$ ، $f'(x)=f'(\circ)f(x)$
۳) تابع $f(x)$ فقط در $x=\circ$ مشتق دارد.
۴) چون از پیوستگی تابع $f(x)$ اطلاعی نداریم لذا در مورد مشتق آن قضاوتی نمی‌توان کرد.

۵۶۴ـ انتگرال $\int_2^4\int_x^{2x} f(x,y)dydx$ برابر است با: (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $\int_2^8\int_2^y f(x,y)dxdy$ ۲) $\int_2^8\int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y)dxdy$

۳) $\int_2^4\int_{\frac{y}{2}}^4 f(x,y)dxdy+\int_4^8\int_2^y f(x,y)dxdy$ ۴) $\int_2^4\int_2^y f(x,y)dxdy+\int_4^8\int_{\frac{y}{2}}^4 f(x,y)dxdy$

۵۶۵ـ مقدار سری $\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{2}{3})^{n-1}$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۹

۵۶۶ـ طول قوس منحنی C با معادله $(\circ\le\theta\le\frac{\pi}{2})$ $\begin{cases} x(t)=\int_\circ^{\sin^2 t}\sin\frac{\pi\theta^2}{2}d\theta \\ y(t)=\int_\circ^{\sin^2 t}\cos\frac{\pi\theta^2}{2}d\theta \end{cases}$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) ۱ ۳) π ۴) 2π

۵۶۷ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۵۶۸ـ سری $\sum_{n=\circ}^{\infty}(r^n+\frac{1}{r^n})$ به ازای چه مقادیری از r همگراست؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۲)

۱) $r>\circ$ ۲) $\circ<r<1$ ۳) $\circ<r<2$ ۴) هیچ مقداری

۵۶۹ـ مقدار $\lim_{h\to+\infty}\frac{1}{h}\int_\circ^h e^{x^2-h^2}(x^2+1)dx$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ∞

۵۷۰ـ بردارهای متعامد $\vec{M}$ و $\vec{N}$ با طول واحد در $\mathbb{R}^3$ مفروضند. اگر $\vec{A}$ در شرط $\vec{A}\times\vec{N}=\vec{M}-\vec{A}$ صدق کند، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $\vec{A}=\vec{M}-(\vec{M}\times\vec{N})$ ۲) $\vec{A}=\vec{M}+(\vec{M}\times\vec{N})$ ۳) $\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{M}+\frac{1}{2}(\vec{M}\times\vec{N})$ ۴) $\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{M}-\frac{1}{2}(\vec{M}\times\vec{N})$

۵۷۱ـ مقدار $\iint_S (3xy^2, xe^z, z^3)ds$ که در آن S رویه‌ی محصور به استوانه‌ی $y^2+z^2=1$ و صفحات $x=-1$ و $x=+2$ است برابر است با:
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{9\pi}{4}$
۲) $\frac{9\pi}{2}$
۳) $\frac{3\pi}{2}$
۴) 3π

۵۷۲ـ صفحه‌ی مماس افقی بر رویه‌ی $z=x^2-4xy-2y^2+12x-12y-1$ برابر است با:
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۳)

۱) $z=-36$
۲) $z=-31$
۳) $z=28$
۴) $z=29$

۵۷۳ـ بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x-1}{x})^n$ کدام است؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۴)

۱) $(\frac{1}{2},+\infty)$
۲) $[\frac{1}{2},+\infty)$
۳) $(0,+\infty)$
۴) $[1,+\infty)$

۵۷۴ـ مقدار سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n(n-1)}$ کدام است؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۴)

۱) ۱
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{3}$

۵۷۵ـ انتگرال $\int_1^4\int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)dy\,dx$ کدام است؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۴)

۱) $\int_0^1\int_0^{y^2} f(x,y)dx\,dy$
۲) $\int_1^2\int_{y^2}^4 f(x,y)dx\,dy$
۳) $\int_0^1\int_1^4 f(x,y)dx\,dy+\int_1^2\int_{y^2}^4 f(x,y)dx\,dy$
۴) $\int_1^2\int_1^{y^2} f(x,y)dx\,dy$

۵۷۶ـ اگر $f(x,y)=\frac{2x+y}{y-2x}$ و $x=2t-3s$ و $y=t+2s$ مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$ در $t=2$ و $s=1$ کدام است؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۴)

۱) ۱۱۲
۲) ۱۱۴
۳) ۱۱۶
۴) ۱۱۸

۵۷۷ـ کدام سری همگراست؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n})^n$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{n})^n$
۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$
۴) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n})^{n^2-n}$

۵۷۸ـ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{4^{n-2}}$ کدام است؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{32}{27}$
۲) $\frac{64}{27}$
۳) $\frac{128}{27}$
۴) $\frac{256}{27}$

۵۷۹ـ فرض کنید $f:[0,\frac{1}{2}]\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد که شیب خط قائم بر منحنی f در هر نقطه x برابر $\frac{e^{-x}}{x-1}$ باشد، اگر نمودار تابع f از نقطه (۰,۰) بگذرد، ضابطه f کدام است؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) $2e^{-x}-xe^x-2$
۲) $2e^x-xe^x-2$
۳) $xe^x-2e^{-x}+2$
۴) xe^x-2e^x+2

۵۸۰ـ انتگرال $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(Lnx)^m}$ همگراست اگر و تنها اگر .... .
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) $m\geq 1$
۲) $m\leq 1$
۳) $m<1$
۴) $m>1$

۵۸۱ـ حجم متوازی‌السطوح تولیدشده به وسیله قطرهای سه وجه مکعبی به ضلع a که در یک رأس مشترک هستند، کدام است؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) $2\sqrt{2}a^3$
۲) $3\sqrt{3}a^3$
۳) $2a^3$
۴) $3a^3$

۵۸۲ـ اگر مشتق جهتی تابع مشتق‌پذیر $f(x,y)$ در نقطه $p_0=(1,2)$ در جهت بردار $i+j$ برابر $2\sqrt{2}$ و در جهت بردار $-2j$ برابر -3 باشد، مشتق جهتی تابع f در نقطه p_0 و در جهت $-i-2j$ کدام است؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) $-\frac{5}{\sqrt{7}}$
۲) $-\frac{7}{\sqrt{5}}$
۳) $\frac{5}{\sqrt{7}}$
۴) $\frac{7}{\sqrt{5}}$

۵۸۳ـ کدام گزینه در مورد تابع $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$ درست است؟
(تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) (۰, ۰) ماکزیمم نسبی و (۱,۱) و (۱−,۱−) نقاط زینی هستند.
۲) (۰, ۰) نقطه زینی و (۱,۱) و (۱−,۱−) مینیمم نسبی هستند.
۳) (۰, ۰) مینیمم نسبی و (۱,۱) و (۱−,۱−) نقاط زینی هستند.
۴) (۰, ۰) نقطه زینی و (۱,۱) و (۱−,۱−) ماکزیمم نسبی هستند.

۵۸۴ـ مقدار انتگرال $\iint_{|x|+|y|\le a} e^{x+y}dA$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) $a\sinh a$ ۲) $2a\sinh a$ ۳) $a\cosh a$ ۴) $2a\cosh a$

۵۸۵ـ حجم جسم صلب داخل کره $x^2+y^2+z^2=16$ و خارج استوانه $x^2+y^2=4$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) 16π ۲) $16\sqrt{3}\pi$ ۳) $32\sqrt{3}\pi$ ۴) 32π

۵۸۶ـ اگر منحنی C نیم‌دایره به معادلات $y=\sin\theta (0\le\theta\le\pi)$ و $x=\cos\theta$ از نقطه $(1,0)$ به نقطه $(-1,0)$ باشد، مقدار $\int_C e^y dx + ex^y dy$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۵)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۵۸۷ـ مساحت ناحیه‌ی محصور به نمودار تابع $y=-x^2-2x+3$ و محور yها و مماس به نمودار تابع در نقطه‌ی $(2,-5)$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۶)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{6}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

۵۸۸ـ اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند که $\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{a})-\vec{b}$ و $|\vec{b}|=1$ و $|\vec{b}\times\vec{a}|=2$، آنگاه $|\vec{c}|$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۶)

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) $\sqrt{5}$

۵۸۹ـ مساحت نصف یک بال پروانه $r^2=4\cos 2\theta$ کدام است؟ (تاریخ و فلسفه علم ـ سراسری ۹۶)

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۵۹۰ـ حاصل انتگرال $\iiint_D e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}dx\,dy\,dz$ که در آن D ناحیه تعریف شده در $1\le x^2+y^2+z^2\le 4$ ، $z>0$ است، کدام می‌باشد؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{3}(e^6-e)$ ۲) $\frac{2\pi}{3}(e^6-e)$ ۳) $\frac{\pi}{3}(e^8-e)$ ۴) $\frac{2\pi}{3}(e^8-e)$

۵۹۱ـ شار برونسوی میدان نیروی $\vec{F}=(x+\sin y^2)\vec{i}+(y+\sin x^2)\vec{j}+z\vec{k}$ گذرنده از مرز ناحیه D که در آن D رویه توپُر $x^2+4y^2+4z^2\le 4$ می‌باشد، کدام است؟ (عمران، نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{4\pi}{3}$ ۲) 2π ۳) 4π ۴) 8π

۵۹۲ـ مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن $F(x,y,z)=(x^3,y^3,z^3)$ و S سطح کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ و n بردار قائم یکه‌ی رو به خارج S است؛ برابر کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{12}{5}\pi$ ۲) 4π ۳) $\frac{6}{5}\pi$ ۴) 3π

۵۹۳ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی $\begin{cases}x=\cos^2\theta\\ y=\sin^2\theta\end{cases}$ در نقطه $\theta=\frac{\pi}{4}$، کدام است؟ (عمران، نقشه برداری ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{x}{y}=1$ ۲) $x.y=1$ ۳) $x-y=1$ ۴) $x+y=1$

۵۹۴ـ طول قوس منحنی $y=\sqrt{x-x^2}+\sin^{-1}\sqrt{x}$ عبارتست از: (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

۵۹۵ـ به ازای کدام‌یک از مقادیر a انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sinh(ax)}{\sinh(\pi x)}dx$ واگرا است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۳)

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) $-\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۵۹۶ـ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\left((\frac{n^2-2}{n^2-1})^{n^2}(x-1)\right)^n$، کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) e ۳) $\frac{1}{e^2}$ ۴) e^2

۵۹۷ـ محل تلاقی خط $\begin{cases} x-3=y \\ z=1 \end{cases}$ با رویه‌ی $x^2+y^2-z^2=1$ چیست؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۳)

۱) یک نقطه ۲) سه نقطه ۳) خط بر رویه منطبق است. ۴) هیچکدام

۵۹۸ـ اگر $\vec{A}=(3x^2-6yz)\vec{i}+(2y+3xz)\vec{j}+(1-4xyz^2)\vec{k}$ باشد، مقدار انتگرال $\int_C \vec{A}.d\vec{r}$ روی مسیر C که خط واصل بین نقـاط $(0,0,0)$ و $(1,1,1)$ است، کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۳)

۱) $-\frac{6}{5}$ ۲) $-\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۵۹۹ـ اگر $b=\int_0^1 \frac{x^4dx}{1+tgh^4x}$ آنگاه کدام مورد در رابطه با b صحیح است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴)

۱) $b=\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{2}<b<1$ ۳) $\frac{1}{10}<b<\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{15}<b<\frac{1}{10}$

۶۰۰ـ اگر θ_1 و θ_2 و θ_3 زوایای یک مثلث باشند، حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴)

$$(\sin\theta_1-i\cos\theta_1)(\sin\theta_2-i\cos\theta_2)(\sin\theta_3-i\cos\theta_3)$$

۱) $-i$ ۲) -1 ۳) $+i$ ۴) 1

۶۰۱ـ حاصل انتگرال $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 (\frac{\cos(y^2)}{\sqrt{x}})dydx$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴)

۱) $\sin 1$ ۲) $\cos 1$ ۳) $tg 1$ ۴) $\cot 1$

۶۰۲ـ اگر R ناحیه محصور به صفحات $x=-1, y=\frac{\pi}{2}, z=0, z=y$ و $y-x=1$ باشد، حاصل $\iiint_R y\cos z dv$ ، کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۴)

۱) $\pi-2$ ۲) 2 ۳) π ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۶۰۳ـ اگر $f(t)=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=A$ باشد، حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\sin 2x dx$ ، کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{A}{2}$ ۲) A ۳) $\frac{2}{\pi}A$ ۴) $\sqrt{\pi}A$

۶۰۴ـ اگر $A=\int_5^\infty \frac{dx}{e^{3x}-12e^x}$ و $B=\int_1^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$ باشد، کدام عبارت صحیح است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۵)

۱) A واگرا و B واگراست. ۲) A واگرا و B همگراست. ۳) A همگرا و B همگراست. ۴) A همگرا و B واگراست.

۶۰۵ـ کدام مورد برای سری‌های $A=\sum_{n=2}^\infty \frac{\sqrt{n}}{3^n Lnn}$ و $B=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{Ln(3n)}$ درست است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۵)

۱) A واگرا و B همگرا ۲) A واگرا و B واگرا ۳) A همگرا و B همگرا ۴) A همگرا و B واگرا

۶۰۶ـ حاصل $\iint_A \frac{dA}{xy}$ که در آن A ناحیه محصور بین منحنی‌های $y=x^2, y=3x^2, x=y^2, x=2y^2$ می‌باشد، کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۵)

۱) $-Ln6$ ۲) $Ln(\frac{3}{2})$ ۳) $Ln6$ ۴) $(Ln3)(Ln2)$

۶۰۷ـ اگر $\vec{F}$ و C به صورت زیر باشند، حاصل $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟ (عمران ـ نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۵)

$$\vec{F}=(xe^x+y)\vec{i}-(y^2+z)\vec{j}+(ze^z+2x)\vec{k}$$

$$C:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

۱) $-\frac{\pi}{2}$

۲) $-\pi$

۳) -2π

۴) -4π

۶۰۸ـ اگر s رویـه $z=9-x^2-y^2$ بـرای $z>0$ و c منحنـی حاصـل از برخـورد s بـا صـفحه xy و $F(x,y,z)=(-y,x,\sin(x^7y^8z^9))$ باشـد، آنگـاه $\iint_s curl F.ds$ برابر است با: (نقشه‌برداری ـ سراسری ۹۶)

۱) 9π ۲) 18π ۳) 36π ۴) 72π

۶۰۹ـ فرض کنیم $\sinh c = \frac{3}{4}$ و $\mathrm{Ln}(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}) = c$. در این صورت مقدار x برحسب Ln۲ و Ln۳ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{2}(\mathrm{Ln}3 - \mathrm{Ln}2)$ ۲) $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}3 - \mathrm{Ln}2$ ۳) $\mathrm{Ln}3 - \mathrm{Ln}2$ ۴) $\mathrm{Ln}3 - 2\mathrm{Ln}2$

۶۱۰ـ در مورد معادله‌ی $xe^x - 2e^x + 1 = 0$ کدام گزاره صحیح است؟ (مواد ـ سراسری ۹۱)

۱) دقیقاً یک ریشه دارد. ۲) حداکثر دارای یک ریشه است. ۳) دقیقاً دو ریشه دارد. ۴) حداقل دارای سه ریشه است.

۶۱۱ـ اگر z عددی مختلط باشد، آنگاه جواب‌های معادله‌ی $z^{2n} + 1 = 0$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) $K = 0,1,2,3,\ldots,(n-1)$ ، $e^{\frac{\pi+2K\pi}{2n}i}$

۲) $K = 0,1,2,3,\ldots,(2n-1)$ ، $e^{\frac{\pi+2K\pi}{2n}i}$

۳) $K = 0,1,2,3,\ldots,(n-1)$ ، $e^{\frac{+\pi+2K\pi}{n}i}$

۴) جواب ندارد.

۶۱۲ـ مقدار $\int_0^\infty \int_0^x (1+x^2+y^2)^{-2} dydx$ در صورت وجود، کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi}{16}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) وجود ندارد. (واگراست)

۶۱۳ـ مقادیر ماکزیمم M و مینیمم m تابع $f(x,y) = xy$ در ناحیه‌ی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۲)

۱) $M = ab$ و $m = -ab$

۲) $M = \frac{ab}{2}$ و $m = \frac{-ab}{2}$

۳) $M = \frac{ab}{4}$ و $m = \frac{-ab}{4}$

۴) $M = (\max\{a,b\})$ و $m = -(\mathrm{Max}\{a,b\})^2$

۶۱۴ـ کدام مورد برای تابع $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$، <u>نادرست</u> است؟ (مواد ـ سراسری ۹۴)

۱) تابع f در $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ماکزیمم مطلق دارد.

۲) تابع f در $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ نقطه زینی دارد.

۳) تابع f در $(0,1)$ ماکزیمم مطلق دارد.

۴) تابع f در $(0,0)$ مینیمم مطلق دارد.

۶۱۵ـ انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$ برابر با کدام است؟ (مواد ـ سراسری ۹۴)

۱) $\int_0^1 \int_0^y f(x,y)dxdy$ ۲) $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy$ ۳) $\int_0^1 \int_0^x f(x,y)dydx$ ۴) $\int_0^1 \int_x^1 f(x,y)dydx$

۶۱۶ـ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد و $a_n \ge 0$، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ .... (معماری کشتی ـ سراسری ۹۲)

۱) همواره واگرا است. ۲) همواره همگرا است. ۳) همگرای مطلق است. ۴) در حالت کلی همگرا نیست.

۶۱۷ـ حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx$ برابر کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۲)

۱) $-\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{2}$ ۲) $-\mathrm{tg}^{-1}1$ ۳) $\mathrm{tg}^{-1}1$ ۴) $\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{2}$

۶۱۸ـ حد حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به نمودار تابع $f(x) = e^{-x}$ و محورهای مختصات و خط $x = b$ $(b > 0)$ حول محور xها، هرگاه b به سمت بی‌نهایت میل کند برابر کدام‌یک از موارد زیر است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) ∞

۶۱۹ـ انتگرال $\int_{-1}^{0} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{1}{2}\sin^{-1}x} e^{\cos 2y} dy dx$ کدام است؟ (معماری کشتی ـ سراسری ۹۵)

۱) $2(e-1)$ ۲) $\frac{1}{2}(1-e)$ ۳) $2(e^{-1}-e)$ ۴) $\frac{1}{2}(e-e^{-1})$

۶۲۰ـ منحنی $3y - x^3 = 0$ را در بازه‌ی $[0,1]$ حول محور xها دوران می‌دهیم. مساحت جانبی شکل حاصل برابر است با:
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$
۲) $\frac{\pi}{9}(\sqrt{2}-1)$
۳) $\frac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$
۴) $\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$

۶۲۱ـ اگر $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^4-5y^4}{x^3+y^3} & , \quad x\neq -y\\ 0 & , \quad x=-y\end{cases}$، در این صورت $f_1(0,0)$ و $f_2(0,0)$ به ترتیب .... و .... می‌باشند.
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) ۳ و ۵-
۲) ۳- و ۵
۳) ۱۲ و ۱۵-
۴) وجود ندارد و وجود ندارد

۶۲۲ـ انتگرال $\oint_C F.dr$ کدام است هرگاه $F=(-2y+e^{x^2}, 3x+\cos y^2, e^{z^2})$ و C منحنی فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحه $x+2y+z=7$ باشد و جهت این منحنی چنان باشد که تصویر آن روی صفحه xy جهتی خلاف عقربه‌های ساعت داشته باشد.
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) 3π
۲) 2π
۳) 4π
۴) 5π

۶۲۳ـ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}}{Ln(\frac{1}{n})+Ln(\frac{2}{n})+\cdots+Ln(\frac{n}{n})}$، برابر کدام است؟
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) $-\frac{1}{e}$
۲) $\frac{1}{e}$
۳) $e-1$
۴) $1-e$

۶۲۴ـ انحنای منحنی $x=a\cos^3 t$ و $y=a\sin^3 t$ در $0\le t\le 2\pi$، کدام است؟
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) $\left|\frac{2}{3a\sin 2t}\right|$
۲) $\left|\frac{2}{3a\cos 2t}\right|$
۳) $\left|\frac{3}{2a\cos 2t}\right|$
۴) $\left|\frac{3}{2a\sin 2t}\right|$

۶۲۵ـ اکسترمم‌های مطلق تابع $w=x+2y$ در ناحیه مشترک بین $y^2+z^2=1$ و $x+y+z=1$، کدام است؟
(صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) ماکزیمم صفر، می‌نیمم $-\sqrt{2}$
۲) ماکزیمم $\sqrt{2}$، می‌نیمم صفر
۳) ماکزیمم $2\sqrt{2}$، می‌نیمم $-2\sqrt{2}$
۴) ماکزیمم ۲، می‌نیمم صفر

۶۲۶ـ مقدار حد زیر، کدام است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{\cosh(1394+h)}{\cosh(1394)}\right)^{\frac{1}{h}}$$

۱) $e^{\cosh(1394)}$
۲) $e^{tgh(1394)}$
۳) $e^{\sinh(1394)}$
۴) $e^{\coth(1394)}$

۶۲۷ـ مقدار $I=\int_0^1 Ln(1+x^2)dx$، کدام است؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{4}+2+Ln2$
۲) $\frac{\pi}{2}+2+Ln2$
۳) $\frac{\pi}{2}-2+Ln2$
۴) $\frac{\pi}{4}+2-Ln2$

۶۲۸ـ خط مماس بر منحنی پارامتری $\begin{cases}x=e^{\sqrt{t}}\\ y=t-Lnt^2\end{cases}$، در نقطه‌ی $t=1$، واقع بر منحنی، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) -3
۲) $-\frac{3}{2}e$
۳) 3
۴) $\frac{3}{2}e$

۶۲۹ـ فرض کنید W ناحیه‌ی درون $(3x-2y+z)^2+(3x+2y)^2+z^2=9$ باشد. مقدار انتگرال سه‌گانه‌ی زیر کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

$$\iiint_W dxdydz$$

۱) 3π
۲) $\frac{7\pi}{2}$
۳) $\frac{5\pi}{2}$
۴) 4π

۶۳۰ـ اگر $A=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$ و $B=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$، در این صورت:
(مهندسی صنایع ـ سراسری ۹۵)

۱) A و B هر دو واگرا
۲) A و B هر دو همگرا
۳) A همگرا، B واگرا
۴) A واگرا، B همگرا

۶۳۱ـ فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار در فضا باشند، به‌طوری که $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{c}$ با هم‌موازی‌اند و $\vec{a}\times\vec{b}=(-2,0,1)$ و $\vec{a}\times\vec{c}=(0,-1,2)$ باشد، در این صورت $\vec{b}\times\vec{c}$ کدام است؟ (صنایع ـ سیستم ـ سراسری ۹۶)

۱) $(-2,1,-2)$ ۲) $(2,-1,2)$ ۳) $(2,1,-4)$ ۴) $(-2,-1,4)$

۶۳۲ـ اگر x عددی اصم (گنگ) باشد حاصل حد $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}(\cos n!\pi x)^m$ کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۱)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ∞

۶۳۳ـ اگر $\frac{d}{dx}f(x)=g(x)$، $\frac{d}{dx}g(x)=f(x^2)$، آنگاه $\frac{d^2}{dx^2}(f(x^3))$ برابر است با: (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۱)

۱) $f(x^6)$ ۲) $3x^2g(x^3)$ ۳) $f(x^6)+g(x^3)$ ۴) $9x^4f(x^6)+6xg(x^3)$

۶۳۴ـ مقدار سری $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ چقدر است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۱)

۱) $-\frac{\pi}{4}$ ۲) $-\text{Ln}2$ ۳) $\text{Ln}2$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۶۳۵ـ مقدار انتگرال $\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3\frac{e^{x^2-x}}{x+1}dxdy$ چقدر است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{1}{4}(e^3-e)$ ۲) $\frac{1}{2}(e^3-e)$ ۳) $\frac{1}{4}(e+e^3)$ ۴) $\frac{1}{2}(e^3+e)$

۶۳۶ـ هرگاه D ناحیه محدود به منحنی بسته و هموار C باشد و مقدار $\int_C\vec{F}.\vec{dR}$ مساحت ناحیه D باشد، $\vec{F}(x,y)$ کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۱)

۱) $y\vec{i}-2x\vec{j}$ ۲) $y\vec{i}-x\vec{j}$ ۳) $y\vec{i}+2x\vec{j}$ ۴) $y\vec{i}+x\vec{j}$

۶۳۷ـ زاویه بین استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ و کره $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ در نقطه $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ برابر کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۶۳۸ـ رابطه‌ی بین ثابت‌های b,a و c کدام است، به طوری که انتگرال $\int_A^B\vec{F}.\vec{dR}$ مستقل از مسیر باشد که در آن $\vec{F}(x,y,z)=(ay^2+2czx)\vec{i}+y(bx+cz)\vec{j}+(ay^2+cx^2)\vec{k}$. (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۲)

۱) $c=b=a$ ۲) $c=b=2a$ ۳) $c=2b=a$ ۴) $c=2b=2a$

۶۳۹ـ کم‌ترین مقدار تابع $f(x,y)=3x-2y+1$ تحت شرایط $9x^2+4y^2=18$ در کدام نقطه اتفاق می‌افتد؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۳)

۱) $(-2,3)$ ۲) $(1,-\frac{3}{2})$ ۳) $(2,-3)$ ۴) $(-1,\frac{3}{2})$

۶۴۰ـ فرض کنید S سطح ناحیه‌ی محصور بین صفحات $0\le x\le 5$، $0\le y\le 2$ و $0\le z\le 3$ باشد. اگر
$\vec{F}(x,y,z)=(x^2-yz)\vec{i}+(y^3-zx)\vec{j}+(z^2-xy)\vec{k}$
مقدار انتگرال روی سطح میدان برداری $\vec{F}$ بر سطح S (یعنی $\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma$)، کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۹۳)

۱) ۲۵۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۳۰۰

۶۴۱ـ اگر $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ که در آن a_n و b_n اعداد گویا هستند. مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۶۴۲ـ مقدار $\sup\{\sqrt[n]{n}\mid n=1,2,3,...\}$ کدام است؟ (آمار ـ سراسری ۹۱)

۱) $\sqrt[3]{3}$ ۲) $\sqrt[4]{4}$ ۳) ۲ ۴) e

۶۴۳ـ فرض کنید تابع دو متغیره حقیقی f تا مرتبه ۳ به طور پیوسته مشتق پذیر باشد، در این‌صورت $\vec{\nabla}\text{div}(\vec{\nabla}f)-(f_{xxx}\vec{i}+f_{yyy}\vec{j})$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(f_x\vec{i}+f_y\vec{j})$ ۲) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(f_y\vec{i}-f_x\vec{j})$ ۳) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(f_x\vec{i}-f_y\vec{j})$ ۴) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(f_y\vec{i}+f_x\vec{j})$

۶۴۴ـ بیشترین میزان تغییرات تابع $f(x,y,z)=zLn(x^2+y^2-1)$ در نقطه $p(1,1,1)$ برابر است با: (آمار ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

۶۴۵ـ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$ کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۱)

۱) e ۲) 2e ۳) $e-1$ ۴) $e+1$

۶۴۶ـ مقدار تقریبی عدد $\sqrt[7]{(6/98)^2+(3/07)^4-2}$ با کمک دیفرانسیل کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۱)

۱) ۲/۰۰۱۲۵ ۲) ۲/۰۰۱۷۵ ۳) ۲/۰۰۲۲۵ ۴) ۲/۰۰۲۷۵

۶۴۷ـ با استفاده از حروف کلمه‌ی «DELAVARAN» چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۲)

۱) ۸۷۶ ۲) ۹۱۶ ۳) ۹۴۵ ۴) ۱۰۴۴

۶۴۸ـ در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}2x^2-x\ ; x\le 2\\ 3x\ ; 2<x<3\\ x^3-6x\ ; x\ge 3\end{cases}$، مقدار $f'(\sqrt{1+\log_2 512})$ کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۲)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۲۴

۶۴۹ـ مقدار تقریبی عدد $Arctg(\sqrt[3]{-0/97})+\frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۲)

۱) $-0/003$ ۲) ۰/۰۰۳ ۳) ۰/۰۰۴ ۴) ۰/۰۰۵

۶۵۰ـ زاویه بین مماس‌ها، برد و منحنی به معادلات $y=Lnx$ و $y=x^2-x$ در نقطه مشترک کدام است؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۵)

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) فاقد نقطه مشترک

۶۵۱ـ صفحه‌ی قائم بر بیضی، فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=25$ با صفحه $2x-3y+z=0$ در نقطه $(4,3,1)$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (فلسفه ـ سراسری ۹۶)

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴- ۴) ۶-

۶۵۲ـ در بسط عبارت $(x^2-\frac{2}{x})^6$ جمله فاقد x کدام است؟ (جغرافی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۲۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۶۰

۶۵۳ـ تابع $f(x)=\frac{2+x}{2-x}$ را به صورت مجموع یک تابع فرد و یک تابع زوج نوشته‌ایم. مقدار تابع زوج به ازای $x=\sqrt{3}$ کدام است؟ (جغرافی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۶۵۴ـ دو خط به معادلات $3x+ay+2=0$ و $5x+2y+b=0$ منطبق برهم هستند. $\frac{a}{b}$ کدام است؟ (جغرافی ـ سراسری ۹۳)

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۲۴ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۴۵

۶۵۵ـ به ازای کدام مقدار a دستگاه معادلات زیر سازگار است؟ (جغرافی ـ سراسری ۹۳)

$$\begin{cases}2x+3y-4=0\\ x+ay+5=0\\ 3x+y+1=0\end{cases}$$

۱) ۳-
۲) ۲-
۳) ۲
۴) ۳

۶۵۶ـ مساحت ناحیه محدود به دو خط مجانب مایل منحنی به معادله $y=|x+\frac{1}{x}|$ و خط گذرا بر دو نقطه می‌نیمم این منحنی کدام است؟ (پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸

۶۵۷ـ با استفاده از حروف کلمه SHAHAMAT چند رمز عبور سه حرفی می‌توان نوشت؟ (پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۷۲ ۲) ۷۵ ۳) ۸۲ ۴) ۸۵

۶۵۸ـ فرض کنید $f(x,y,z)=\frac{x^2+y^2}{2}+xy+z+2y$ باشد. کمترین مقدار f بر فصل مشترک دو صفحهٔ $x+y-z=3$ و $2x+3y+z=12$، کدام است؟ (مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{25}{2}$ ۲) $\frac{29}{2}$ ۳) $\frac{27}{2}$ ۴) $\frac{23}{2}$

۶۵۹ـ فرض کنید $f(x)=\int_{0}^{x}\sqrt{\sin^{2}t^{2}+2\sin t^{2}}\,dt$ برای $0\le x\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ باشد. چنانچه این منحنی را حول محور y دوران دهیم، مساحت جانبی جسم حاصل کدام است؟
(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\pi(\frac{\pi}{2}+1)$ ۴) $\pi(\frac{\pi}{2}-1)$

۶۶۰ـ مقدار انتگرال $\int_{1}^{e}\frac{(xe^{x}+1)}{x(e^{x}+Lnx)}dx$، کدام است؟ (مهندسی نساجی، تکنولوژی نساجی و شیمی نساجی و علوم الیاف ـ سراسری ۹۵)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $Ln(e^{e-1}+e^{-1})$ ۴) $Ln(e^{e}+e)$

۶۶۱ـ معادله خط گذرنده از نقطه $(1,0,-1)$ و موازی با صفحات $x-y=3$ و $x+2y+z=1$، کدام است؟
(مهندسی نساجی، تکنولوژی نساجی و شیمی نساجی و علوم الیاف ـ سراسری ۹۵)

۱) $x=t-1, y=t, z=3t-1$ ۲) $x-1=y=\frac{z+1}{-3}$

۳) $\frac{x-1}{3}=y=z+1$ ۴) $x=t+1, y=3t, z=t-1$

۶۶۲ـ مقدار انتگرال $\int_{C}y^{2}dx+ydy$، که در آن C خم $\alpha(t)=(\int_{0}^{t}\sin(x^{2})dx,\sqrt{t})$، برای $0\le t\le\sqrt{\pi}$ می‌باشد، کدام است؟
(مهندسی نساجی، تکنولوژی نساجی و شیمی نساجی و علوم الیاف ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}-1$ ۲) $\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}+\sqrt{\pi}$ ۴) $1+\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

۶۶۳ـ مقدار $I=\iint_{R}(x-y)^{4}(1+\cos(x+y))dA$، که در آن R متوازی‌الاضلاعی به رئوس $(0,\pi)$، $(\pi,2\pi)$، $(2\pi,\pi)$ و $(\pi,0)$ می‌باشد، کدام است؟
(مهندسی نساجی، تکنولوژی نساجی و شیمی نساجی و علوم الیاف ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{2}{5}\pi^{5}$ ۲) $\frac{2}{5}\pi^{6}$ ۳) $\frac{1}{5}\pi^{6}$ ۴) $\frac{1}{5}\pi^{5}$

۶۶۴ـ در صفحه اعداد مختلط مکان هندسی z هایی که $Re(z+2i+1)\ge|z+1|^{2}$ باشد، کدام است؟ (مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۱)

۱) $z=a+bi$ که $(a+\frac{1}{2})^{2}+b^{2}\le\frac{1}{4}$ ۲) $z=a+bi$ که $(a+1)^{2}+b^{2}\le1$

۳) $z=a+bi$ که $(a+\frac{1}{2})^{2}+b^{2}\ge\frac{1}{4}$ ۴) $z=a+bi$ که $(a+1)^{2}+b^{2}\le1$

۶۶۵ـ اگر $A_{n}=\frac{1}{n}(3^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{2}{n}}+\dots+3^{\frac{n}{n}})$، مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}A_{n}$، کدام است؟ (مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۵)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{Ln3}$ ۳) $\frac{2}{Ln3}$ ۴) $2Ln3$

۶۶۶ـ کدام گزینه به‌ترتیب برای انتگرال‌های ناسره‌ی $I=\int_{0}^{1}\frac{x^{3}}{(1-x)^{6}}dx$ و $J=\int_{0}^{1}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[6]{x}}dx$، صحیح است؟ (مدیریت نساجی ـ سراسری ۹۵)

۱) همگرا ـ واگرا ۲) همگرا ـ همگرا ۳) واگرا ـ واگرا ۴) واگرا ـ همگرا

۶۶۷ـ مشتق مرتبه nام تابع $f(x)=\frac{2x}{1-x^{2}}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیطزیست دریا ـ سراسری ۹۱)

۱) $n!(\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}})$ ۲) $n!(\frac{(-1)^{n+1}}{(1-x)^{n+1}}+\frac{1}{(1+x)^{n+1}})$

۳) $n!(\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{1}{(1+x)^{n+1}})$ ۴) $n!(\frac{(-1)^{n+1}}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}})$

۶۶۸ـ حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}\sin x+\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}\cos x}dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیطزیست دریا ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) قابل محاسبه نیست.

۶۶۹- مشتق تابع $f(x)=x^{2}\lfloor\sin x\rfloor$ در $x=0$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۱)

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) موجود نیست.

۶۷۰- فرض کنیم $f(x)=\int_{1}^{e^x}\sqrt{1+\operatorname{Ln}t}\,dt$، مقدار $(f^{-1})'(0)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۱)

۱) 0
۲) $\frac{1}{e}$
۳) e
۴) 1

۶۷۱- اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\in\mathbb{Q}\\ x(1-x) & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ تعریف شود، آنگاه f: (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۱)

۱) در تمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است.
۲) در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.
۳) در صفر پیوسته است ولی در صفر مشتق ندارد.
۴) فقط در صفر پیوسته و در این نقطه مشتق دارد.

۶۷۲- با فرض آن‌که $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ مشتق‌پذیر باشند و $g(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}e^{xz^2}dz$ آنگاه $g'(x)+\frac{1}{2x}g(x)$ کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۱)

۱) $e^{x\beta^2}(\beta'+\frac{1}{2x}\beta)-e^{x\alpha^2}(\alpha'+\frac{1}{2x}\alpha)$
۲) $e^{x\beta^2}(\beta'+\frac{1}{2x}\beta)+e^{x\alpha^2}(\alpha'+\frac{1}{2x}\alpha)$
۳) $e^{x\beta^2}(\beta'-\frac{1}{2x}\beta)+e^{x\alpha^2}(\alpha'-\frac{1}{2x}\alpha)$
۴) $e^{x\beta^2}(\beta'-\frac{1}{2x}\beta)-e^{x\alpha^2}(\alpha'-\frac{1}{2x}\alpha)$

۶۷۳ـ فرض کنید $f(x)=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x & x\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & \frac{\pi}{2}\end{vmatrix}$ کدام گزینه در مورد تابع f صحیح نیست؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۲)

۱) f اکیداً صعودی است.
۲) f پیوسته است.
۳) f مشتق‌پذیر است.
۴) عدد c در بازه $[0,\frac{\pi}{2}]$ موجود است که $f'(c)=0$

۶۷۴ـ اگر خم به معادله‌ی $f(x)=\int_{0}^{x}\sqrt{e^{2t^2}+2e^{t^2}}\,dt$ را برای $0\le x\le 1$، حول محور y دوران دهیم، مساحت سطح دورانی حاصل کدام است؟
(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۲)

۱) π
۲) e
۳) πe
۴) $\pi+e$

۶۷۵ـ فرض کنید $f(x)=1+\int_{0}^{x^2}e^{t^3}dt$ و $g(x)=\dfrac{1}{\int_{0}^{x}te^{t^5}dt}$ در این صورت $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)^{g(x)}$ کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۲)

۱) 1
۲) e
۳) $2e$
۴) e^2

۶۷۶ـ اگر (a_n) دنباله‌ای از اعداد مثبت و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۳)

۱) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ همگراست.
۲) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ واگراست.
۳) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ همگراست.
۴) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ واگراست.

۶۷۷ـ اگر $f(x)=(x^2+4x+1)e^x$، مشتق دهم $f(x)$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۴)

۱) $e^x(11x+2)$
۲) $e^x(2x+11)$
۳) $e^x(x^2+24x+131)$
۴) $e^x(x^2+26x+128)$

۶۷۸ـ حجم حاصل از دوران $r=a(1-\cos\theta)$ حول محور x ها کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{4}{3}\pi a^3$
۲) $\frac{2}{3}\pi a^3$
۳) $\frac{1}{3}\pi a^3$
۴) $\frac{8}{3}\pi a^3$

۶۷۹ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{(b^x)}-a}{a^x-1}$ کدام است؟ ($b>0$ و $a>0$) (ژئوفیزیک و هواشناسی، محیط‌زیست دریا ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{1}{a}\operatorname{Ln}b$
۲) $a\operatorname{Ln}b$
۳) $\frac{1}{b}\operatorname{Ln}a$
۴) $b\operatorname{Ln}a$

۶۸۰ـ فرض کنید $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}(\frac{1}{n})$ و $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n\pi)}{\operatorname{Ln}(1+n)}$، کدام گزینه درست است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) سری A واگرا و سری B همگراست.
۲) سری A همگرا و سری B واگراست.
۳) هر دو سری A و B همگرا هستند.
۴) هر دو سری A و B واگرا هستند.

۶۸۱ـ مساحت ناحیه زیر منحنی $y=\frac{6}{(2x+1)(x+2)}$، بالای خط $y=0$ و سمت راست خط $x=1$ کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\ln 2$
۳) $2\ln 2$
۴) ∞

۶۸۲ـ مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $y=2\cosh(\frac{x}{2})$ بر بازه $[0,2]$ حول محور xها کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) $\pi\sinh 1$
۲) $\pi(1+\sinh 1)$
۳) $2\pi\sinh 1$
۴) $2\pi(2+\sinh 2)$

۶۸۳ـ فرض کنید C یک منحنی هموار و بسته باشد که تمام مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع دو متغیره f درون و روی خم C پیوسته بوده و $\nabla^2 f=0$. مقدار $\oint_C (f_y dx - f_x dy)$ کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی و محیط زیست دریا ـ سراسری ۹۵)

۱) -1
۲) 0
۳) 1
۴) 2π

۶۸۴ـ مقدار $(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2})^{24}$ کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۶)

۱) $(2+\sqrt{3})^{12}$
۲) $(2-\sqrt{3})^{12}i$
۳) $(2i-\sqrt{3})^{12}$
۴) $(2-\sqrt{3})^{12}$

۶۸۵ـ دو کشتی A و B به بندری نزدیک می‌شوند. کشتی A با سرعت $25\frac{km}{h}$ به غرب و کشتی B با سرعت $20\frac{km}{h}$ به جنوب روان است. در لحظه‌ای معین که A در فاصله ۳ کیلومتر و B در فاصله ۴ کیلومتر از بندر قرار دارند. سرعت کاهش فاصله بین دو کشتی چند کیلومتر بر ساعت است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۶)

۱) ۱۳
۲) ۲۱
۳) ۳۱
۴) $\sqrt{1025}$

۶۸۶ـ حاصل $\oint_C 2\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}dx+\ln(x^2+y^2)dy$ را که در آن خم C دایره به معادله $(x-2)^2+y^2=1$ در جهت پاد ساعت‌گرد است، کدام است؟

(ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۹۶)

۱) 0
۲) $\sqrt{2}$
۳) $-\sqrt{2}$
۴) π

۶۸۷ـ نمودار تابع با ضابطه $f(x)=(1-x)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$ نسبت به کدام متقارن است؟

(آمار ـ سراسری ۹۱)

۱) محور xها
۲) نیمساز ناحیه اول
۳) محور yها
۴) مبدأ مختصات

۶۸۸ـ اگر $f(x)=\begin{cases}3 & x>0\\ 0 & x=0\\ -3 & x<0\end{cases}$ و $g(x)=x-x^3$ باشد، تعداد نقاط ناپیوستگی تابع fog کدام است؟

(آمار ـ سراسری ۹۲)

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۶۸۹ـ مشتق مرتبه دهم تابع $f(x)=\frac{2}{\operatorname{tg}3x+\cot 3x}$ در نقطه $x=\frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(آمار ـ سراسری ۹۲)

۱) -12^{10}
۲) -6^{10}
۳) 6^{10}
۴) 12^{10}

۶۹۰ـ اگر $x=(\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}})^{\sqrt{5}-2}\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{5}+2}$ باشد، لگاریتم x^2 در پایه ۸ کدام است؟

(آمار ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{-4}{3}$
۲) $\frac{-2}{3}$
۳) $\frac{-1}{3}$
۴) $\frac{1}{3}$

۶۹۱ـ ریشه معادله $3\sin x-6x+2=0$ در کدام بازه واقع است؟

(آمار ـ سراسری ۹۳)

۱) $[\frac{-1}{6},0]$
۲) $[0,\frac{1}{6}]$
۳) $[\frac{2}{6},\frac{5}{6}]$
۴) $[\frac{1}{6},\frac{2}{6}]$

۶۹۲ـ مقدار تقریب عبارت $\sqrt{4x+1}\,e^{x^2-4}$ به ازای $x=2/006$ با کمک دیفرانسیل چقدر از عدد ۳ بیشتر است؟

(آمار ـ سراسری ۹۳)

۱) ۰/۰۷۶
۲) ۰/۰۱۴
۳) ۰/۰۲۱
۴) ۰/۰۲۸

۶۹۳ـ اگر $f(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{1+t^3}$ باشد، تقعّر نمودار تابع f در کدام بازه رو به پایین است؟

(آمار ـ سراسری ۹۳)

۱) $(-1,1)$
۲) $(0,+\infty)$
۳) $(-\infty,0)$
۴) $(-\infty,+\infty)$

۶۹۴ـ اگر $z^2+2z+4=0$ باشد، حاصل z^6 کدام است؟ (z عدد مختلط است.)

(آمار ـ سراسری ۹۴)

۱) ۳۲
۲) ۴۸
۳) ۶۴
۴) ۹۶

۶۹۵ـ اگر $f(x)=x^n$ باشد، حاصل $f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f''(1)}{2!}+\frac{f'''(1)}{3!}+\dots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$ برابر کدام است؟ (آماد ـ سراسری ۹۴)

۱) 2^{n-1} ۲) 2^n-1 ۳) 2^n ۴) 2^n+1

۶۹۶ـ به ازای کدام مقادیر a، دستگاه معادلات زیر جواب‌های غیر صفر دارد؟ (آماد ـ سراسری ۹۴)

$$\begin{cases}2x+y-z=0\\ ax-2y+z=0\\ 4x-5y+az=0\end{cases}$$

۱) $-3,2$
۲) $-2,3$
۳) $-2,1$
۴) $-1,3$

۶۹۷ـ مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x)=3|x|+4|x-1|+2x$، برابر کدام است؟ (آماد ـ سراسری ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

۶۹۸ـ مجموع سری $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\frac{1}{8\times10}+\cdots$، کدام است؟ (آماد ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۶۹۹ـ حاصل انتگرال $\int_2^3\frac{dx}{x+x^{-1}}$ کدام است؟ (آماد ـ سراسری ۹۶)

۱) $\text{Ln}\sqrt{2}$ ۲) $\text{Ln}2$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۷۰۰ـ اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{(\sin x)^2[2-\cos x]}{x} & ;\ x\neq0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$ کدام گزاره زیر صحیح است؟ (منظور از $[t]$ جزء صحیح t است.) (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۱)

۱) $f'(0)=1$ ۲) $f'(0)=2$ ۳) $f'(0)=3$ ۴) $f'(0)$ وجود ندارد.

۷۰۱ـ اگر c مرز ناحیه $|x|+|y|\le1$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد (با جهت مثبت) مقدار $I=\oint_C(5y+\sin x^2)dx+(2x+\cos y^3)dy$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۱)

۱) -3 ۲) -6 ۳) ۳ ۴) ۶

۷۰۲ـ مکان هندسی تمام اعداد مختلطی مانند z به طوری که $\text{Re}(\frac{5}{\text{Im}(z)}i-z^2)=(-iz)(i\bar{z})$، کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۲)

۱) تمام نقاط واقع بر محور y
۲) تمام نقاط واقع بر دایره‌ی واحد
۳) تمام نقاط واقع بر محور y صرف‌نظر از یک نقطه
۴) تمام نقاط واقع بر دایره‌ی واحد صرف‌نظر از یک نقطه

۷۰۳ـ حاصل $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}+\dots+\frac{1}{3n})$ برابر کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۲)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) $\text{Ln}2$ ۴) $\text{Ln}3$

۷۰۴ـ منحنی $r(t)=(t,2,\cosh t)$ را در نظر بگیرید. پارامتری شده بر حسب طول قوس این منحنی کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۲)

۱) $(\text{Ln}(-s+\sqrt{s^2+1}),2,\cosh(\text{Ln}(-s+\sqrt{s^2+1})))$
۲) $(\text{Ln}(s-\sqrt{s^2-1}),2,\cosh(\text{Ln}(s-\sqrt{s^2-1})))$
۳) $(\text{Ln}(s+\sqrt{s^2+1}),2,\cosh(\text{Ln}(s+\sqrt{s^2+1})))$
۴) $(\text{Ln}(s+\sqrt{s^2-1}),2,\cosh(\text{Ln}(s+\sqrt{s^2-1})))$

۷۰۵ـ فرض کنید $z=\cos\frac{\pi}{160}+i\sin\frac{\pi}{160}$ در این صورت مقدار $\frac{z^{40}}{1+z^{80}}$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۳)

۱) -1 ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) ۱

۷۰۶ـ مقدار $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1+\sin x)dx$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۳)

۱) $1+\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $1+\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}$ ۳) $1-\frac{\pi^2}{8}$ ۴) $1+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{2}$

۷۰۷ـ اگر D ناحیه‌ی محصور بین خطوط $x=0$، $y=\pi$ و $y=x$ باشد، مقدار $\iint_D\cos(x+y)dxdy$، کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -2

۷۰۸ـ کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}(x,y)=x^2\vec{i}-xy\vec{j}$ در جابه‌جایی یک ذره از نقطه‌ی $(1,0)$ روی ربع دایره‌ی $x^2+y^2=1$، کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۴)

۱) $-\frac{5}{3}$	۲) $\frac{1}{3}$	۳) $-\frac{2}{3}$	۴) $\frac{4}{3}$

۷۰۹ـ مکان هندسی تمام اعداد مختلطی مانند z که $\mathrm{Im}(\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}})=\mathrm{Im}(\frac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}})$، کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۵)

۱) یک دایره	۲) یک نقطه

۳) دو خط متقاطع	۴) هیچ Z ای در این شرط صدق نمی‌کند.

۷۱۰ـ مقدار انتگرال $\iint_T e^{-x^2}dxdy$ که در آن T ناحیه‌ای به‌صورت $x\geq 0$ و $-x\leq y\leq x$ است، در صورت وجود، برابر کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۹۵)

۱) 0	۲) 1	۳) 2	۴) $\frac{1}{2}$

۷۱۱ـ اگر ناحیه D نیمه بالایی درون دایره واحد به مرکز مبدأ باشد، حاصل انتگرال $\iint_D \frac{\mathrm{Ln}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۱)

۱) -2π	۲) $-\pi$	۳) π	۴) 2π

۷۱۲ـ سطح داخل مارپیچ $r=e^{\frac{\theta}{4\pi}}$ از $\theta=0$ تا $\theta=2\pi$ چقدر است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\pi(e-1)$	۲) $2\pi(\sqrt{e}-1)$	۳) $2\pi(e-1)$	۴) $4\pi(\sqrt{e}-1)$

۷۱۳ـ مقدار $\iint_R \frac{x^2}{y^2}dxdy$ که در آن R ناحیه محصور به منحنی‌های $x=2$، $y=x$، $xy=1$ می‌باشد، برابر کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{4}{9}$	۲) $\frac{2}{3}$	۳) $\frac{3}{2}$	۴) $\frac{9}{4}$

۷۱۴ـ حاصل $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+5e^x+6}$ کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۴)

۱) $\mathrm{Ln}(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+2})+c$	۲) $\mathrm{Ln}(\frac{e^{2x}+2}{e^{2x}+1})+c$	۳) $\mathrm{Ln}(\frac{e^x+3}{e^x+2})+c$	۴) $\mathrm{Ln}(\frac{e^x+2}{e^x+3})+c$

۷۱۵ـ اگر D ناحیه محدود به محورهای مختصات و خط $y-x=1$ باشد، حاصل $\iint_D ye^{x-y}\,dy\,dx$، کدام است؟ (مدیریت در سوانح طبیعی ـ سراسری ۹۵)

۱) $-1+\frac{3}{2e}$	۲) $1-\frac{5}{2e}$	۳) $-1+\frac{3}{2}e$	۴) $1-\frac{5}{2}e$

۷۱۶ـ اگر شعاع همگرایی سری $\sum_0^\infty a_n x^{2n}$ برابر ۴ (چهار) باشد، شعاع همگرایی سری $\sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ عبارتست از: (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۱)

۱) 1	۲) 2	۳) 4	۴) 16

۷۱۷ـ مساحت قسمتی از نیم‌کره $\begin{cases} r^2+z^2=2 \\ z\geq 0 \end{cases}$ که توسط استوانه $r=1$ جدا می‌شود عبارت است از: (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\pi(2-\sqrt{2})$	۲) $2\pi(2-\sqrt{2})$	۳) $\pi(2+\sqrt{2})$	۴) $2\pi(2+\sqrt{2})$

۷۱۸ـ تابع پتانسیل میدان برداری $\vec{F}=(e^x\mathrm{Ln}y)\vec{i}+(\frac{e^x}{y}+\sin z)\vec{j}+(y\cos z)\vec{k}$ کدام است؟ (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۲)

۱) $f(x,y,z)=e^x\mathrm{Ln}y-y\sin z$	۲) $f(x,y,z)=e^x\mathrm{Ln}y-y\cos z$

۳) $f(x,y,z)=e^x\mathrm{Ln}y+y\cos z$	۴) $f(x,y,z)=e^x\mathrm{Ln}y+y\sin z$

۷۱۹ـ اگر $r(\theta)=\theta^2+1$ یک منحنی قطبی باشد، زاویه بین خط مماس و شعاع حامل در نقطه $\theta=1$، کدام است؟ (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{\pi}{6}$	۲) $\frac{\pi}{4}$	۳) $\frac{\pi}{3}$	۴) $\frac{\pi}{2}$

۷۲۰ـ فرض کنیم $f(x,y,z)=xyz^2\tan\frac{xy}{z^2}+xzy^2\tan\frac{xz}{y^2}+yzx^2$ و مقادیر x و y و z طوری محدود شده باشند که f و مشتقات جزئی مورد نیاز تعریف شده باشند. درآن صورت مقدار $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}$ کدام است؟ (مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۴)

۱) $xyz^2+xzy^2+yzx^2$
۲) $xyz^2+xzy^2+yzx^6$
۳) $4f(x,y,z)$
۴) $4xyz^2f(x,y,z)$

۷۲۱ـ به ازای کدام مقدار از α؛ رابطه‌ی مقابل برقرار است؟ (مهندسی نفت و مهندسی ایمنی و بازرسی فنی ـ سراسری ۹۵)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-4x+2\alpha}{-4x-8}\right)^{\alpha x-6}=1\ ,\ (\alpha\neq 0)$$

۱) -4
۲) -2
۳) 2
۴) 4

۷۲۲ـ کدام دنباله واگراست؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\sqrt[n]{n!}$
۲) $\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n}$
۳) $\sqrt[n]{3^n+2^n}$
۴) $\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ برای $a>0$ و $b>0$

۷۲۳ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}e^{-nx}(1+\frac{x}{n})^{n^2}$ برای $x>0$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) 0
۲) موجود نیست.
۳) $e^{\frac{-x^2}{2}}$
۴) 1

۷۲۴ـ مختصات نقطه‌ای از رویهٔ $z=x^2+3y^2$ که در آن تابع $f(x,y,z)=x^2-2y+3z$ مقدار اکسترمم خود را اختیار می‌کند، کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۱)

۱) $(0,0,0)$
۲) $(-1,0,1)$
۳) $(-1,2,13)$
۴) $(0,\frac{1}{9},\frac{1}{27})$

۷۲۵ـ اگر $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\sin 2\pi xt}{t}dt$ مقدار $f'(\frac{1}{2})$ برابر است با: (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) $2\sqrt{2}-4$
۲) $3\sqrt{2}+4$
۳) $2\sqrt{2}+4$
۴) $3\sqrt{2}-4$

۷۲۶ـ طول منحنی $y=\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1}-Ln(x+\sqrt{x^2-1})]$ از $x=1$ تا $x=2$ برابر است با: (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $1+\sqrt{2}$
۴) 2

۷۲۷ـ حجم ناحیه‌ی محصور به سهمی‌گون بیضوی $z=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2$ و صفحات مختصات و صفحات $x=-2$ و $y=3$ برابر کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۳)

۱) 1
۲) 2
۳) 3
۴) 4

۷۲۸ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}}$ برابر است با: (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\sqrt{2}-1$
۲) $\sqrt{2}+1$
۳) $2\sqrt{2}-2$
۴) $2\sqrt{2}+2$

۷۲۹ـ حاصل جمع و حاصل ضرب همه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $(a_n\neq 0)$ $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0=0$ به ترتیب برابرند با: (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{(-1)^n a_n}{a_{n-1}},\frac{-a_1}{a_0}$
۲) $\frac{(-1)^n a_{n-1}}{a_n},\frac{-a_0}{a_n}$
۳) $\frac{(-1)^n a_0}{a_n},\frac{-a_{n-1}}{a_n}$
۴) $\frac{(-1)^n a_1}{a_n},\frac{(-1)^n a_{n-1}}{a_n}$

۷۳۰ـ سری تیلور تابع $f(x)=\frac{1}{5-x}$، حول نقطه $x=2$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۴)

۱) $f(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}(x-2)+\frac{1}{3^3}(x-2)^2+\cdots$
۲) $f(x)=\frac{1}{5}+(x-2)+(x-2)^2+\cdots$
۳) $f(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}(x-2)+\frac{1}{3^3}(x-2)^3-\cdots$
۴) $f(x)=\frac{1}{5}(1-(x-2)+(x-2)^2+(x-2)^3+\cdots)$

۷۳۱ـ کدام گزینه یک تابع اولیه (پاد مشتق) برای $f(x)=\operatorname{sech} x$ است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۴)

۱) $F(x)=2\operatorname{tg}^{-1}(e^x)$ ۲) $F(x)=2\operatorname{tgh}^{-1}(e^x)$

۳) $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|\operatorname{sech} x-\operatorname{tgh} x|$ ۴) $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|\operatorname{sech} x+\operatorname{tgh} x|$

۷۳۲ـ اگر $J=\int_0^1\sqrt{1-x^4}\,dx$ و $K=\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx$ و $L=\int_0^1\sqrt{1-x^8}\,dx$، آنگاه کدام گزینه درست است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۴)

۱) $J<L<K<1$ ۲) $L<J<K<1$ ۳) $J<L<1<K$ ۴) $L<J<1<K$

۷۳۳ـ اگر $f(x,y)=x^{(y-y^2)}$ آنگاه مقدار $f_x(2,2)+f_y(2,2)$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{-1+\operatorname{Ln}2}{4}$ ۲) $-\frac{1+3\operatorname{Ln}2}{4}$ ۳) $\frac{1-\operatorname{Ln}2}{4}$ ۴) $-\frac{5}{8}$

۷۳۴ـ مجموعه نقاط $\{z\in\mathbb{C}:|z-2i|-|z+2i|=2\}$ چه مکانی را در صفحه اعداد مختلط نشان می‌دهد؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) بیضی ۲) دایره ۳) محور موهومی ۴) هذلولی

۷۳۵ـ مقدار $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi^2}{2}$ ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) وجود ندارد.

۷۳۶ـ اگر سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد و برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a_n>0$ و $b_n=a_{2n}+a_{2n+1}+\cdots+a_{3n}$، آنگاه کدام گزینه در مورد دنباله $\{\frac{1}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ درست است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) نزولی است. ۲) صعودی است. ۳) بی‌کران است. ۴) کراندار است.

۷۳۷ـ اگر تابع f بر بازه (a,b)، دارای مشتق مرتبه nام پیوسته باشد و

$$f^{(n)}(x_0)\neq 0\,,\ f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0\ ,\ x_0\in(a,b)$$

کدام گزینه نتیجه می‌دهد f در x_0 دارای مینیمم موضعی است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) n فرد و $f^{(n)}(x_0)>0$ ۲) n زوج و $f^{(n)}(x_0)<0$ ۳) n فرد و $f^{(n)}(x_0)<0$ ۴) n زوج و $f^{(n)}(x_0)>0$

۷۳۸ـ حاصل $\int_0^2\frac{\operatorname{Ln}(2+x^2)^x}{2+x^2}dx$ کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\operatorname{Ln}\sqrt{3}\operatorname{Ln}(2\sqrt{3})$ ۲) $(\operatorname{Ln}\sqrt{3})^2$ ۳) $\operatorname{Ln}(2\sqrt{3})^2$ ۴) $(\operatorname{Ln}\sqrt{3})^3$

۷۳۹ـ اگر حجم یک گلوله برفی به شکل کره با شعاع R، با آهنگ $0/3\frac{mm^3}{S}$ کاهش یابد، مساحت سطح آن با چه آهنگی کاهش خواهد یافت؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) $0/6\frac{1}{R}\frac{mm^2}{S}$ ۲) $0/5\frac{1}{R}\frac{mm^2}{S}$ ۳) $0/3\frac{1}{R}\frac{mm^2}{S}$ ۴) $0/1\frac{1}{R}\frac{mm^2}{S}$

۷۴۰ـ اگر معادله $\operatorname{Ln}(x^2+2z)=\sin(y^2-z)$، z را به طور ضمنی برحسب x و y بیان کند، کدام تساوی درست است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) $xz_y+2yz_x=2xy$ ۲) $2xz_y+yz_x=2xy$ ۳) $xz_y-2yz_x=2xy$ ۴) $2xz_y-yz_x=2xy$

۷۴۱ـ حجم جسم صلبی که از دوران ناحیه محدود به سهمی‌های $y=x^2$ و $y=4x-x^2$ حول خط $y=6$ به دست می‌آید، کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{32}{3}\pi$ ۲) $\frac{64}{3}\pi$ ۳) $\frac{128}{5}\pi$ ۴) $\frac{192}{5}\pi$

۷۴۲ـ کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}(x,y)=(2x-4y)\vec{i}+(3y-5x)\vec{j}$ در جابه‌جایی ذره‌ای روی یک دور از منحنی $x^2+9y^2=9$ در جهت خلاف گردش عقربه ساعت، کدام است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) -9π ۲) -3π ۳) 6π ۴) 12π

۷۴۳ـ برای کدام مقدار b و a میدان برداری $F(x,y)=(ax^3y+by^2, x^4+xy)$ یک میدان گرادیان است؟ (اقیانوس‌شناسی فیزیکی ـ سراسری ۹۵)

۱) $a=-\frac{1}{2}$ و $b=-4$ ۲) $a=\frac{1}{2}$ و $b=4$ ۳) $a=-4$ و $b=-\frac{1}{2}$ ۴) $a=4$ و $b=\frac{1}{2}$

۷۴۴ـ تابع با ضابطه $f(x)=|x^2+2|+|2x-4|$ در کدام بازه صعودی است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۱)

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $(-1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1)$

۷۴۵ـ با حروف کلمه SISSTAN چند رمز عبور سه حرفی می‌توان ساخت؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۶۰ ۲) ۶۴ ۳) ۷۳ ۴) ۷۵

۷۴۶ـ در بسط عبارت $(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$، جمله فاقد x کدام است؟ (صنایع غذایی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۵ ۲) $\frac{25}{3}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) ۱۰

۷۴۷ـ با شرط $a>b>c>0$ ریشه‌های معادله $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ چگونه است؟

(صنایع غذایی و مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۹۳)

۱) فاقد ریشه ۲) دو ریشه منفی ۳) دو ریشه مثبت ۴) دو ریشه مختلف‌العلامه

۷۴۸ـ مجموع سری به صورت $S=0/297+0/000297+0/000000297+\cdots$ برابر کدام است؟ (علوم و مهندسی صنایع غذایی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{12}{37}$ ۲) $\frac{11}{37}$ ۳) $\frac{32}{111}$ ۴) $\frac{31}{111}$

۷۴۹ـ دو وجه یک مکعب بر روی دو صفحه به معادلات $2x-y+z=5$ و $2x-y+z=-1$ قرار دارند. حجم این مکعب کدام است؟

(علوم و مهندسی صنایع غذایی ـ سراسری ۹۵)

۱) $3\sqrt{3}$ ۲) $\frac{27}{8}$ ۳) $6\sqrt{6}$ ۴) ۸

۷۵۰ـ با حروف کلمه SHAHAMAT چند رمز عبور ۴ حرفی می‌توان ساخت؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) ۱۹۲ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۸۰ ۴) ۲۸۶

۷۵۱ـ در بسط عبارت $(a^2-\frac{b}{3}+2)^n$، یکی از جملات به صورت $\frac{560a^2b^2}{3}$ می‌باشد. n کدام است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۷۵۲ـ اگر $z+\frac{4}{z}=2$ باشد، آنگاه $(z)^5+(\bar{z})^5$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۹۱)

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۷۵۳ـ اگر $f(x)=2x^2-1$ باشد تابع با ضابطه $f(f(\cos x))$ با کدام طول محور xها را قطع می‌کند؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$

۷۵۴ـ برد تابع با ضابطه $f(x)=(\lfloor x+1\rfloor-x)^{-\frac{1}{2}}$ کدام است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است) (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۹۲)

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(1,+\infty)$

۷۵۵ـ مجموع ۶۰۰ جمله اول از دنباله $\left\{\cos\frac{n\pi}{3}\right\}$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۹۲)

۱) ۱- ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۷۵۶ـ مشتق مرتبه بیستم تابع $y=\frac{x}{2x-1}$ در مبدأ مختصات کدام است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۹۴)

۱) $-2^{19}(20!)$ ۲) $2^{19}(20!)$ ۳) $2^{20}(19!)$ ۴) $-2^{20}(19!)$

۷۵۷ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{\operatorname{Ln}\cos(x^2-x)}$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم و مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۶-

۷۵۸ـ اگر $f(x)=\frac{۱}{۱-x}$ باشد، مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $y=(f\circ f\circ f)(x)$ کدام است؟ (مکانیک بیوسیستم، آبیاری و زهکشی ـ سراسری ۹۴)

۱) $\{۰,۱,۲\}$ ۲) $\{۰,۱\}$ ۳) $\{۱\}$ ۴) $\{\ \}$

۷۵۹ـ اگر $f(x)=۲^x$ و $g(x)=\sqrt{\sin^{-۱}x}$ باشند، دامنه تابع $gof^{-۱}$ کدام بازه است؟
(مهندسی مکانیک بیوسیستم و مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۵)

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,\pi]$

۷۶۰ـ شیب خط قائم بر منحنی به معادله $\begin{cases}x=۱+\cos ۲t\ ;\ ۰\le t<\pi\\ y=\sin ۲t\end{cases}$، در مبدأ مختصات کدام است؟
(مهندسی مکانیک بیوسیستم و مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۵)

۱) ۱ ۲) ∞ ۳) -۱ ۴) صفر

۷۶۱ـ فاصله مبدأ مختصات از خط مجانب نمودار تابع $y=۲xe^{\frac{۱}{x}}$، کدام است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم و مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۷۶۲ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y=\frac{۱}{\sqrt{x+۱۶}-\sqrt{x}}$ و محور xها و دو خط به معادلات $x=۰$ و $x=۹$ کدام است؟
(مهندسی مکانیک بیوسیستم و مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱۳}{۳}$ ۴) $\frac{۱۴}{۳}$

۷۶۳ـ ضلع یک مکعب با خطای احتمالی ۰/۰۱ واحد برابر ۱۶ واحد اندازه‌گیری شده است. با استفاده از دیفرانسیل خطای تقریب در محاسبه حجم مکعب، کدام است؟
(مهندسی مکانیک بیوسیستم و مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۵)

۱) ۶/۲۴ ۲) ۶/۷۸ ۳) ۷/۱۲ ۴) ۷/۶۸

۷۶۴ـ معادله صفحه قائم بر منحنی (C) فصل مشترک کره $x^۲+y^۲+z^۲=۹$ و صفحه $x-۲y+z=۷$ در نقطه $(۱,-۲,۲)$ کدام است؟
(مهندسی مکانیک بیوسیستم و مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۵)

۱) $x+۲y=-۳$ ۲) $۲x+y-z=-۲$ ۳) $۲x+y=۰$ ۴) $۲x-y+z=۵$

۷۶۵ـ حجم محدود به دو رویه $z=x^۲+y^۲$ و $z=\frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲+۱)$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم و مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۵)

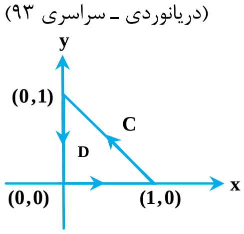
۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

۷۶۶ـ مشتق مرتبه‌ی چهارم تابع $y=e^{۲x}\sinh x$، به ازای $x=۰$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک بیوسیستم ـ سراسری ۹۶)

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

۷۶۷ـ انتگرال خطی $\int_C x^۴dx+xydy$ کدام است که در آن C مسیری در صفحه xoy است که نقطه‌های $(۰,۰)$، $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ را در جهت مثبت به هم وصل می‌کند؟
(دریانوردی ـ سراسری ۹۳)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$



۷۶۸ـ مقدار انتگرال دوگانه $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_y^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{x}dxdy$ کدام است؟ (دریانوردی ـ سراسری ۹۳)

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۱

۷۶۹ـ حاصل انتگرال $\int_۰^۱\frac{(x^۲+۱)dx}{(x^۲+۳)(۳x^۲+۱)}$، کدام است؟ (ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۲}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱}{۶}(\pi-۱)$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}(\pi+۱)$

۷۷۰ـ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+2}$، نسبت به کدام خط متقارن است؟ (ایمنی صنعتی و دریانوردی ـ سراسری ۹۴)

۱) $x=-2$ ۲) $x=-1$ ۳) $x=1$ ۴) $y=x$

۷۷۱ـ جسم نازک همگن محدود به منحنی $y=x^3$ و محور yها و خط $y=8$ مفروض است. فاصله مرکز ثقل این جسم از محور yها، کدام است؟ (ایمنی صنعتی و دریانوردی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۰/۷۲ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹

۷۷۲ـ با حروف کلمه‌ی "INFERENCE" چند رمز عبور سه حرفی می‌توان ساخت؟ (دریانوردی، ایمنی صنعتی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۲۱۸ ۲) ۲۲۹ ۳) ۲۳۴ ۴) ۲۴۱

۷۷۳ـ کدام تساوی در مورد جزء صحیح اعداد نادرست است؟ ($\lfloor\ \rfloor$ نماد جزء صحیح است.) (مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۱)

۱) $\lfloor(2/05)^4\rfloor=17$ ۲) $\lfloor(-0/95)^9\rfloor=-1$ ۳) $\lfloor\sqrt{10}-\pi\rfloor=0$ ۴) $\lfloor|x|\rfloor=|\lfloor x\rfloor|$

۷۷۴ـ نمودار تابع $f(x)=x^2-2x$، با یک انتقال به نمودار تابع $g(x)=x^2+4x$ منطبق می‌شود. در این انتقال نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر نمودار تابع f به نقطه‌ای با کدام مختصات قرار می‌گیرد؟ (مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۱)

۱) $(0,0)$ ۲) $(-3,3)$ ۳) $(1,5)$ ۴) $(-1,5)$

۷۷۵ـ مقدار تقریبی عدد $\operatorname{Arctg}\sqrt{1/02}-\frac{\pi}{4}$ با کمک دیفرانسیل کدام است؟ (مهندسی کشاورزی آب ـ سراسری ۹۱)

۱) ۰/۰۰۲ ۲) ۰/۰۰۳ ۳) ۰/۰۰۴ ۴) ۰/۰۰۵

۷۷۶ـ محور تقارن منحنی به معادله $y=\frac{2x^2+4x+5}{3-x^2-2x}$ خود منحنی را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۷۷۷ـ حاصل $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+x^3+\cdots+x^{16}-16}{x-1}$ کدام است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۱)

۱) ۱۱۲ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۳۶ ۴) ۱۵۳

۷۷۸ـ حاصل $\int_{-1}^{1}\operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})dx$ کدام است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۱)

۱) صفر ۲) $1-\operatorname{Ln}2$ ۳) $2-\operatorname{Ln}2$ ۴) $\operatorname{Ln}\sqrt{2}$

۷۷۹ـ معادله قطبی $r=\frac{2}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$ در تبدیل به مختصات قائم چگونه است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۳)

۱) خطی به شیب ۱− ۲) خطی به شیب ۱ ۳) دایره ۴) بیضی

۷۸۰ـ دیفرانسیل کامل تابع $z=\sqrt[3]{2x^2+y^2+5y}$ در نقطه $(5,2)$ به‌ازای $\Delta x=0/15$ و $\Delta y=-0/2$ کدام است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۳)

۱) ۰/۰۱۵ ۲) ۰/۰۰۱۵ ۳) ۰/۰۲۵ ۴) ۰/۰۰۲۵

۷۸۱ـ شیب خط مماس بر منحنی $y=\operatorname{Arcsin}(\frac{2x}{1+x^2})$ در نقطه $x=\frac{3}{4}$ کدام است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{8}{5}$ ۳) $\frac{16}{25}$ ۴) $\frac{32}{25}$

۷۸۲ـ اگر $\vec{r}=xi+yj+zk$ باشد، $\operatorname{grad}(\frac{1}{|r|})$ چند برابر $\vec{r}$ است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۴)

۱) $\frac{1}{|r|^3}$ ۲) $-\frac{1}{|r|^3}$ ۳) $\frac{2}{|r|^2}$ ۴) $\frac{-2}{|r|^2}$

۷۸۳ـ ضابطه معکوس تابع $y=\cosh^{-1}(\frac{x-2}{2})$، به کدام صورت است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{(e^x-2)^2}{e^x}$ ۲) $\frac{(e^x-1)^2}{e^x}$ ۳) $\frac{(1+e^x)^2}{e^x}$ ۴) $\frac{(e^x+2)^2}{e^x}$

۷۸۴ـ مقدار تابع $f(x)=x^{۴}+x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۴}}$ در نقطه‌ای که $x+\frac{۱}{x}=۳$ باشد، چقدر است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۴۹ ۲) ۵۰ ۳) ۵۲ ۴) ۵۴

۷۸۵ـ در تابع پارامتری $(x=\sin^{-۱}t, y=\sqrt{۱-t^{۲}})$ مقدار $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ به ازای $t=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ کدام است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۵)

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۱

۷۸۶ـ مساحت ناحیه محدود به منحنی $y=\frac{۲x-۱}{x^{۲}-۲x+۵}$ و محور xها و دو خط به معادلات $x=۱$ و $x=۳$، کدام است؟

(مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{۴}-Ln۲$ ۲) $\frac{\pi}{۸}+Ln۲$ ۳) $\frac{\pi}{۸}+Ln۴$ ۴) $\frac{\pi}{۴}+Ln۲$

۷۸۷ـ سطح محدود به منحنی پارامتری $(x=t^{۲}+t, y=t^{۲}-t)$ و محور xها از $t=۰$ تا $t=۱$ را حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم حاصل کدام است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۵)

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۰}$ ۳) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۵}$

۷۸۸ـ اگر $f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$ باشد، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟ (مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۱ ۲) e ۳) ۲e ۴) Ln۲

۷۸۹ـ حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۴]{x^{۴}+۱}-\sqrt{x^{۲}+۱}}{x^{۲}}$ کدام است؟ (هواشناسی کشاورزی و مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۷۹۰ـ مجانب‌های منحنی به معادله $y=Ln(۸x-x^{۲})$ خط $y=۲x-۵$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. فاصله این دو نقطه کدام است؟

(هواشناسی کشاورزی و مهندسی مکانیزاسیون کشاورزی ـ سراسری ۹۲)

۱) $۴\sqrt{۱۰}$ ۲) $۸\sqrt{۲}$ ۳) $۶\sqrt{۱۰}$ ۴) $۸\sqrt{۵}$

۷۹۱ـ به ازای کدام مقدار a دستگاه معادلات $\begin{cases}۲x-y+۳=۰\\ x+۲y+۴=۰\\ ax+y-۲=۰\end{cases}$ سازگار است؟ (هواشناسی کشاورزی ـ سراسری ۹۲)

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۷۹۲ـ یک ورقه محدود به محورهای مختصات و دایره $x^{۲}+y^{۲}=۱$ واقع در ربع اول با تابع چگالی $\rho=x^{۲}y$ مفروض است. فاصله مرکز ثقل این قطاع مستدیر از محور yها کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۷۹۳ـ سطح محدود به منحنی $x=\sqrt{۱+۲y}$ و محور yها و خط به معادله $y=\frac{۳}{۲}$ را حول محور yها دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل کدام است؟

(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ـ سراسری ۹۲)

۱) ۴π ۲) ۲π ۳) ۳π ۴) $\frac{۷\pi}{۲}$

۷۹۴ـ اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، خلاصه شده $(A\cup B')'\cup(A-B)\cup(A\cap B)$ برابر کدام است؟ (پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۴)

۱) A ۲) B ۳) $A\cup B$ ۴) $A\cap B$

۷۹۵ـ حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n+۲)!}$، کدام است؟ (پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۴)

۱) $e-\frac{۵}{۲}$ ۲) $e-\frac{۳}{۲}$ ۳) $e-۱$ ۴) $e-۲$

۷۹۶ـ مقدار تقریبی عدد $\sqrt{۳}\,\text{Arctg}\sqrt{۲x-۱}$، در نقطه‌ای به طول $x=۲/۰۳$ چقدر از $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۳}$ بیشتر است؟ (پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۰/۰۰۵ ۲) ۰/۰۱ ۳) ۰/۰۱۵ ۴) ۰/۰۰۷۵

۷۹۷ـ به ازای کدام مقدار a دستگاه معادلات زیر سازگار است؟ (پژوهش علوم اجتماعی ـ سراسری ۹۵)

$$\begin{cases} ax+۳y=۷ \\ x-ay=۱ \\ ۳x+y=۸ \end{cases}$$

۱) $\frac{۱}{۲},-۲$ ۲) $-۱,۲$ ۳) $۳,-۲$ ۴) $\frac{۱}{۲},۲$

۷۹۸ـ بازه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(e^x-۱)^{n^۲-n}}{\sqrt{n}+\text{Ln}\,n}$ کدام است؟ (درس آنالیز ریاضی، ریاضی ـ سراسری ۹۲)

۱) $(-\text{Ln}۲,\text{Ln}۲)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-\infty,\text{Ln}۲)$ ۴) $\mathbb{R}$

۷۹۹ـ مرتبه (RANK) ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۶ & ۹ & ۰ \end{bmatrix}$ کدام است؟ (سنجش از دور و سیستم اطلاعات جغرافیایی ـ سراسری ۹۵)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

۸۰۰ـ به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی عدد $\text{Ln}\sqrt{(۳/۰۲)^۲+(۰/۹۷)^۲}-\text{Ln}\sqrt{۱۰}$ کدام است؟ (مدیریت اطلاعاتی ـ سراسری ۹۶)

۱) ۰/۰۰۴ ۲) ۰/۰۰۳ ۳) ۰/۰۰۲ ۴) ۰/۰۰۵

۸۰۱ـ درمورد معادله $۲xe^x=x+۱$ چه می‌توان گفت؟ (مهندسی عمران، کلیه گرایش‌ها ـ آزاد ۹۱)

۱) در بازه $[۰,۱]$ حداقل یک ریشه دارد.
۲) در بازه $[۰,۱]$ دقیقاً یک ریشه دارد.
۳) در بازه $[-۱,۱]$ دقیقاً یک ریشه دارد.
۴) در بازه $[-۱,۱]$ حداکثر یک ریشه دارد.

۸۰۲ـ تابع $f(x)=\left[x-[x]\right]$ .... (مهندسی صنایع (سیستم و بهره‌وری و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۹۱)

۱) هم فرد است و هم زوج ۲) فرد است. ۳) زوج است. ۴) نه فرد است و نه زوج

۸۰۳ـ برد تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ عبارت است از: (مهندسی صنایع (سیستم و بهره‌وری و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۹۱)

۱) $[-\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $[-\frac{۱}{۴},+\infty)$ ۴) $[-\frac{\sqrt{۳}}{۲},+\infty)$

۸۰۴ـ اگر A یک ماتریس با چندجمله‌ای ویژه $f(x)=x^۵+x^۳-x+۸$ باشد، آنگاه $\det(A)-tr(A)$ برابر است با: (ریاضی (کلیهٔ گرایش‌ها) ـ آزاد ۹۱)

۱) −۹ ۲) −۸ ۳) −۷ ۴) صفر

۸۰۵ـ اگر $x=\sec t$ و $y=tgt$ آنگاه $\frac{d^۳y}{dx^۳}$ در $t=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟ (مهندسی صنایع (سیستم و بهره‌وری و سیستم‌های اقتصادی و اجتماعی) ـ آزاد ۹۲)

۱) ۲۷ ۲) ۹ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) −۹

۸۰۶ـ مساحت دایره محاطی در یک مثلث متساوی‌الاضلاع چه کسری از مساحت مثلث است؟ (مهندسی برق (کلیه گرایش‌ها) ـ آزاد ۹۲)

۱) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۸}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۹}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۸۰۷ـ فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{۱}{y}+y\sin\frac{۱}{x} & x\neq ۰, y\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \text{ یا } y=۰ \end{cases}$ در این صورت $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)$ کدام است؟ (آمار ـ آزاد ۹۲)

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $۰\times\infty$

۸۰۸ـ مقدار میانگین تابع $y=(۹-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$ در فاصله $x\in[۰,\frac{۳}{۲}]$ کدام است؟ (کشاورزی، مکانیزاسیون کشاورزی ـ آزاد ۹۲)

۱) $\frac{\pi}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹\pi}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲\pi}$

۸۰۹ـ منحنی که با رابطه $z(t)=\sin^۲t+i\cos^۲t$ تعریف شود، چه شکلی را تداعی می‌کند؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۹۳)

۱) پاره خطی به طول $\sqrt{۲}$ است. ۲) دایره‌ای با محیط π است. ۳) پاره خطی به طول ۱ است. ۴) دایره‌ای با محیط ۲π است.

۸۱۰ـ اگر $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2+yx^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ کدام گزاره در نقطه $(0,0)$ درست است؟ (مدیریت اجرایی ـ آزاد ۹۳)

۱) f پیوسته و f_x موجود و ناپیوسته است.
۲) f ناپیوسته و f_x موجود و پیوسته است.
۳) f ناپیوسته و f_x موجود و ناپیوسته است.
۴) f پیوسته و f_x موجود و پیوسته است.

۸۱۱ـ A و B دو ماتریس دلخواه $n\times n$ هستند. کدام رابطه نادرست است؟ (علوم و فناوری نانو (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۳)

۱) $tr(ABA^{-1})=trB$
۲) $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
۳) $\det(A+B)=\det A+\det B$
۴) $\det(AB)^*=(\det A^*)(\det B^*)$

۸۱۲ـ اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای ثابتی باشند، کدام رابطه نادرست است؟ (علوم و فناوری نانو (کلیهٔ گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۳)

۱) $\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{r})=2\vec{a}$
۲) $\vec{\nabla}.((\vec{a}.\vec{r})\vec{b})=\vec{a}.\vec{b}$
۳) $\vec{\nabla}\times((\vec{a}.\vec{r})\vec{b})=\vec{b}.\vec{a}$
۴) $\vec{\nabla}.((\vec{a}.\vec{r})\vec{r})=2\vec{a}.\vec{r}$

۸۱۳ـ سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\sin n}{2n^2+\cos n+1}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\sin n)^2+n}{n}$ به ترتیب .... می‌باشند.
(مهندسی پزشکی (کلیه گرایش‌ها)، علوم و فناوری نانو (کلیه گرایش‌ها)، محیط زیست (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۴)

۱) همگرا و همگرا
۲) همگرا و واگرا
۳) واگرا و واگرا
۴) واگرا و همگرا

۸۱۴ـ اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -3\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 6\end{bmatrix}$ و X یک ماتریس ستونی و λ عدد حقیقی باشد به طوری که $AX=\lambda X$ آنگاه مقادیر λ از کدام معادله حاصل می شود؟
(سازه‌های آبی، آبیاری و زهکشی، مکانیک بیوسیستم، هواشناسی کشاورزی، مکانیزاسیون کشاورزی ـ دکتری ۹۴)

۱) $\lambda^3-8\lambda^2+15\lambda-8=0$
۲) $\lambda^3-3\lambda^2+12\lambda-10=0$
۳) $\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0$
۴) $\lambda^3+2\lambda^2-6\lambda+3=0$

۸۱۵ـ فرض کنید $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ مشتق‌پذیر باشد. مقدار $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\dfrac{f(x+\delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ کدام است؟ (آمار ـ دکتری ۹۴)

۱) ۱
۲) ۰
۳) $\exp(xf'(x))$
۴) $\exp\left(\dfrac{xf'(x)}{f(x)}\right)$

۸۱۶ـ فرض کنید a و b اعداد مثبتی باشند. مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ کدام گزینه است؟ (ریاضی کاربردی ـ دکتری ۹۴)

۱) $\max\{a,b\}$
۲) ۱
۳) $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$
۴) $\sqrt{ab}$

۸۱۷ـ تحت چه شرایطی بردار $(-1,2,0,5)$ در فضای تولید شده توسط بردارهای $(2,-3,1,1)$ و $(-1,0,1,1)$ و $(1,-1,b,-1)$ قرار دارد؟
(علوم کامپیوتر، درس مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی ـ دکتری ۹۵)

۱) $b\neq 1$
۲) $b\neq 3$
۳) $b=2$
۴) به ازای هیچ مقدار b

۸۱۸ـ فرض کنید A ماتریسی است که $A^3=2I$، در این صورت کدام‌یک از ماتریس‌های زیر ممکن است وارون‌پذیر نباشند؟
(علوم کامپیوتر، درس مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی ـ دکتری ۹۵)

۱) $A-I$
۲) $A+2I$
۳) $A^2-2A+2I$
۴) $A^2-\sqrt[3]{2}A$

۸۱۹ـ اگر در ماتریس $A_{n\times n}$، معادله مفسر، $f(\lambda)=0$ باشد و λ ها (مقادیر ویژه) ریشه‌های آن باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح نیست؟
(علوم اقتصادی ـ دکتری ۹۶)

۱) $f(A)=0$
۲) $f(A)\neq 0$
۳) $|A|=\lambda_1\times\lambda_2\times\cdots\times\lambda_n$
۴) $Tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

۸۲۰ـ شعاع همگرایی سری $\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{x^m}{a^m+b^m}$ $(b>0,a>0)$ کدام است؟ (هواشناسی ـ دکتری ۹۶)

۱) $\max\{a,b\}$
۲) $\dfrac{a+b}{2}$
۳) $\min\{a,b\}$
۴) $\dfrac{2}{a+b}$

۸۲۱ـ کدام گزینه درباره نقاط اکسترمم تابع $f(x,y)=2xy-3x^2+5y^2-2y+4$ درست است؟ (هواشناسی ـ دکتری ۹۶)

۱) در نقطه $(-\frac{1}{16},-\frac{3}{16})$ مینیمم نسبی دارد.
۲) در نقطه $(\frac{1}{16},\frac{3}{16})$ مینیمم نسبی دارد.
۳) نقطه $(\frac{1}{16},\frac{3}{16})$ نقطه زینی است.
۴) نقطه $(-\frac{1}{16},-\frac{3}{16})$ نقطه زینی است.

۸۲۲ـ مساحت درون بیضی $4x^2+9y^2=36$ و بالای خط $2x+3y=6$ کدام است؟ (آمار ـ دکتری ۹۶)

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}-2$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}-3$

۸۲۳ـ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\times4\times7\cdots(3n+1)}{1\times5\times9\cdots(4n+1)}x^{2n}$ کدام است؟ (علوم و فناوری نانو، نانوشیمی ـ دکتری ۹۶)

۱) ∞ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۸۲۴ـ کدام گزینه درباره مماس‌های یک‌طرفه وارد بر نمودار تابع $f(x)=e^{|x|}$ در نقطه $(0,1)$ درست است؟ (علوم شناختی ـ دکتری ۹۶)

۱) بر هم منطبق هستند. ۲) بر هم عمود هستند. ۳) با هم زاویه ۴۵ درجه می‌سازند. ۴) وجود ندارند.

۸۲۵ـ خط راست $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$، صفحه $x+y+z=15$ را در نقطه (x_0,y_0,z_0) قطع کرده است. x_0 کدام است؟

(مهندسی محیط‌زیست (کلیه گرایش‌ها) و فناوری نانو (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۶)

۱) -3 ۲) 3 ۳) -2 ۴) 2

۸۲۶ـ اگر منحنی C به‌صورت $x=\sin(\frac{t^2\pi}{2})$ و $y=1+t^4$ باشد که $0\le t\le 1$، آنگاه مقدار $\int_C x^3y^4dx+x^4y^3dy$ کدام است؟

(مهندسی پزشکی (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۶)

۱) 0 ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{17}{4}$ ۴) 4

۸۲۷ـ فرض کنید W ناحیه $1\le x^2+y^2+z^2\le 4$ و $z\ge 0$ باشد. مقدار $\iiint\limits_W (x^2+y^2)dxdydz$ کدام است؟

(مهندسی پزشکی (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۶)

۱) $\frac{121\pi}{15}$ ۲) $\frac{123\pi}{15}$ ۳) $\frac{124\pi}{15}$ ۴) $\frac{122\pi}{15}$

۸۲۸ـ حاصل $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$، برابر کدام است؟ (مکانیزاسیون کشاورزی ـ دکتری ۹۶)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) 2 ۳) 1 ۴) $\frac{\pi}{4}$

۸۲۹ـ امتداد ویژه نظیر بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\8&1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$، کدام است؟ (مکانیزاسیون کشاورزی ـ دکتری ۹۶)

۱) $\begin{bmatrix}a\\2a\\a\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}a\\0\\-a\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}a\\2a\\-a\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}a\\-2a\\a\end{bmatrix}$

۸۳۰ـ حاصل $\iint\limits_D\frac{x^2}{y^2}dxdy$، میدان D محدود به منحنی $xy=1$ و خطوط $y=x$ و $x=2$ کدام است؟ (مکانیزاسیون کشاورزی ـ دکتری ۹۶)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۸۳۱ـ برای مقادیر $0<x<2$ در بسط تیلور تابع $f(x)=Lnx$ برحسب توان‌های صعودی $(x-1)$، ضریب $(x-1)^5$، کدام است؟

(علوم و مهندسی آب (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۶)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

۸۳۲ـ اگر نقطه $A(4,3,5)$ رأس یک مکعبی باشد که یک وجه آن بر صفحه به معادله $3x-2y+6z=1$ منطبق است، آنگاه حجم این مکعب کدام است؟ (علوم و مهندسی آب (کلیه گرایش‌ها) ـ دکتری ۹۶)

۱) ۲۷ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۵ ۴) ۱۴۴

پاسخنامه منتخب سؤالات ریاضی عمومی (۱ و ۲) ارشد و دکتری ۹۱ ـ ۹۶

۱ـ گزینه «۲» گزینه‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم. همه‌ی گزینه‌ها در ∞ دارای ناسرگی هستند.

بررسی گزینه (۱): شرط همگرایی انتگرال $\int_{۲}^{\infty}\frac{dx}{x^pLn^qx}$ آن است که $p>۱$ باشد یا $p=۱$ و $q>۲$ بشد. در این انتگرال داریم $p=۰$ و $q=۱$ پس این انتگرال واگراست.

در ضمن با استفاده از تغییر متغیر $x=e^t$ هم می‌توانید انتگرال را به صورت $\int_{Ln۲}^{\infty}\frac{e^t}{t}dt$ درآورید که به وضوح واگراست چون سرعت رشد صورت بیشتر از مخرج است.

بررسی گزینه (۲): با استفاده از کران داری $\sin x$ می‌توان این انتگرال را با انتگرال $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x^۲+۳}$ مقایسه‌ی حدی کرد.

درجه‌ی مخرج از درجه‌ی صورت، ۲ درجه بیشتر است. پس انتگرال همگراست.

بررسی گزینه (۳): به‌وضوح این انتگرال واگراست زیرا شرط لازم برای همگرایی را ندارد. در واقع $\lim\limits_{x\to\infty}\cos(x)$ وجود ندارد پس واگرا بودن انتگرال واضح است. [شرط لازم برای همگرایی انتگرال $\int_a^{\infty}f(x)dx$ آن است که $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=۰$ شود]

بررسی گزینه (۴): شرط لازم برای همگرایی برقرار نیست زیرا $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+۱}=۱\neq ۰$. در ضمن با توجه به درجه‌ی صورت و مخرج هم می‌توان واگرا بودن را تشخیص داد.

۲ـ گزینه «۲» با تقسیم صورت و مخرج بر $\cos^۲ x$ داریم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}\frac{dx}{۳\sin^۲x+\cos^۲x}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}\frac{\frac{dx}{\cos^۲x}}{\frac{۳\sin^۲x}{\cos^۲x}+۱}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}\frac{۱}{۳tg^۲x+۱}(\frac{dx}{\cos^۲x})=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}}\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}+tg^۲x}(\frac{dx}{\cos^۲x})$$

با انتخاب $u=tgx$ داریم: $du=\frac{dx}{\cos^۲x}$ پس فرم انتگرال به صورت $\int\frac{۱}{a^۲+u^۲}du$ می‌باشد و می‌دانیم حاصل آن برابر $\frac{۱}{a}Arctg\frac{u}{a}$ می‌شود، پس داریم:

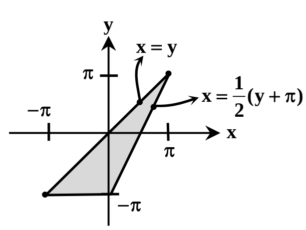
$$\text{حاصل انتگرال}=\frac{۱}{۳}[\frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}]Arctg(\frac{tgx}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}Arctg(\sqrt{۳}tgx)$$

با توجه به حدود بالا و پایین انتگرال داریم:

$$I=\frac{\sqrt{۳}}{۳}Arctg[\sqrt{۳}\times tg(\frac{\pi}{۶})]-۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times Arctg(\sqrt{۳}\times\frac{۱}{\sqrt{۳}})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}Arctg۱=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۲}$$

۳ـ گزینه «۴» با رسم شکل و توصیف ناحیه می‌توانیم انتگرال را بیابیم. معادله‌ی خطی که از نقاط $(۰,-\pi)$ و (π,π) می‌گذرد، $y=۲x-\pi$ است یعنی $x=\frac{۱}{۲}(y+\pi)$ و معادله‌ی خطی که از (π,π) و $(-\pi,-\pi)$ می‌گذرد، $x=y$ است.

این ناحیه در راستای محور yها منظم نیست. اما وقتی درراستای محور xها از چپ به راست برویم $x=y$ مرز ورودی و $x=\frac{۱}{۲}(y+\pi)$ مرز خروجی است.



$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{y}^{\frac{۱}{۲}(y+\pi)}\cos(x-y)dxdy=\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(x-y)]_{y}^{\frac{y}{۲}+\frac{\pi}{۲}}dy$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{y}{۲})dy=\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{y}{۲}dy=[۲\sin\frac{y}{۲}]_{-\pi}^{\pi}=۲(۱+۱)=۴$$

۴ـ گزینه «۳» مرز γ بسته است. پس بهتر است از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم. اما F_1 و F_2 در $(0,0)$ تعریف شده نیستند پس ناپیوستگی دارند. با این حال می‌توانیم قسمت‌های پیوسته آن‌ها را جدا کرده و برای آن قسمت‌ها از گرین استفاده کنیم:

$$I=\int_\gamma\left(-\frac{y}{x^2+y^2}-2y+e^{x^2}\right)dx+\left(\frac{x}{x^2+y^2}+x+\operatorname{tg}y^2\right)dy=\underbrace{\int_\gamma-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy}_{I_1}+\underbrace{\int_\gamma(-2y+e^{x^2})dx+(x+\operatorname{tg}y^2)dy}_{I_2}$$

برای I_2 از قضیه‌ی گرین استفاده می‌کنیم:
$$I_2=\iint_D(Q_x-P_y)\,dy\,dx=\iint_D(1+2)\,dy\,dx=3\times(\text{مساحت }D)=\mathbf{3\pi R^2}$$

برای I_1، طبق متن درس می‌دانیم که با یک بار گردش حول مبدأ، حاصل این انتگرال می‌شود 2π. پس: $I_1=2\pi$.

$$\Rightarrow\ I=I_1+I_2=2\pi+3\pi R^2=\pi(3R^2+2)$$

توضیح: اگر متن درس را در مورد I_1 به‌خاطر نداشته باشید می‌توانید با پارامتری کردن دایره، حاصل آن را حساب کنید:

$$x=R\cos t\ ,\quad y=R\sin t\ ,\quad dx=-R\sin t\,dt\ ,\quad dy=R\cos t\,dt$$

$$\Rightarrow\ I_1=\int_\gamma\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\ \Rightarrow\ I_1=\int_0^{2\pi}\frac{R^2\sin^2t+R^2\cos^2t}{R^2}dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵ـ گزینه «۱» سطح S بسته نیست چون فقط شامل سطح نیم‌کره‌ی بالایی است. از برخورد این نیم‌کره با صفحه‌ی $z=0$ به دایره‌ی $x^2+y^2=4$، $z=0$ می‌رسیم. فرض کنیم S' ناحیه‌ی درون این دایره باشد. S و S' لبه مشترکی دارند پس می‌توانیم به جای انتگرال‌گیری روی S، انتگرال روی سطح S' را حساب کنیم. بردار قائم یکه و برون سو برای این سطح که در صفحه‌ی xoy قرار دارد، $\vec N=-\vec k$ است. پس $\operatorname{curl}\vec F.\vec N$ برابر است با $-\operatorname{curl}\vec F.\vec k$ که می‌شود قرینه‌ی مؤلفه‌ی سومِ بردار $\operatorname{curl}\vec F$ که برابر است با: $-(P_y-Q_x)=-(1-3)=+2$

پس خواهیم داشت:
$$\iint_{S'}\operatorname{curl}\vec F.\vec N\,ds=\iint_{S'}2\,ds=2\times(\text{مساحت }S')=2\times4\pi=8\pi$$

حالا داریم:
$$\iint_S\operatorname{curl}\vec F.\vec N\,ds=\iint_{S'}\operatorname{curl}\vec F.\vec N\,ds=8\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶ـ گزینه «۲» برای بررسی همگرایی سری کافی است حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+\frac1n)^{2n+1}}{[(1+\frac1n)^n+(1+\frac1n)^{n+1}]}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+\frac1n)^{2n+1}}{2(1+\frac1n)^n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac1n)^{n+1}=1^\infty$$

برای حل حالت مبهم 1^∞ داریم:
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac1n-1)(n+1)=e^{\lim_{n\to\infty}(1+\frac1n-1)^{n+1}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}=e$$

بنابراین دنباله همگرا به e می‌باشد. برای بررسی صعودی یا نزولی بودن نیز a_{n+1} را بدست آورده و با a_n مقایسه می‌کنیم.

$$a_{n+1}=\frac{2(1+\frac{1}{n+1})^{2n+2}}{[(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}+(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}]}=\frac{2(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{[1+1+\frac{1}{n+1}]}=\frac{2(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(2+\frac{1}{n+1})}$$

$$a_n=\frac{2(1+\frac1n)^{2n+1}}{[(1+\frac1n)^n+(1+\frac1n)^{n+1}]}=\frac{2(1+\frac1n)^{n+1}}{(1+1+\frac1n)}=\frac{2(1+\frac1n)^{n+1}}{(2+\frac1n)}$$

با مقایسه‌ی دو عبارت فوق با توجه به اینکه $a_{n+1}>a_n$ می‌باشد در نتیجه دنباله‌ی a_n صعودی می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۷ـ گزینه «۱» ابتدا پایستاری تابع $\vec F(x,y,z)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\operatorname{curl}\vec F=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}&\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}&\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{vmatrix}=0$$

بنابراین میدان F پایستار است و اگر $\varphi(x,y,z)$ تابع پتانسیل آن باشد انتگرال برابر است با:

$$I=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\varphi(x_2,y_2,z_2)-\varphi(x_1,y_1,z_1)$$

طبق متن درس برای محاسبه‌ی تابع پتانسیل $\vec{F}$ به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\varphi(x,y,z)=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx+\int\cancel{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}dy+\int\cancel{\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}dz=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

بنابراین حاصل انتگرال برابر است با:

$$I=\varphi(x_2,y_2,z_2)-\varphi(x_1,y_1,z_1)=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=b-a$$

۸ـ گزینه «۲» ابتدا معادله‌ی صفحه مماس را بدست می‌آوریم که دارای بردار نرمال مقابل است:

$$\vec{n}=\vec{\nabla}f\ ,\ \vec{\nabla}f=(2x,2y,-2z)$$

برای نقطه‌ی $(1,1,1)$ داریم:

$$\vec{n}=(2,2,-2)$$

بنابراین معادله‌ی صفحه مماس بر رویه در نقطه‌ی $(1,1,1)$ برابر است با:

$$2(x-1)+2(y-1)-2(z-1)=0\Rightarrow x+y-z=1\Rightarrow z=x+y-1$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در معادله‌ی رویه داده شده داریم:

$$x^2+y^2-z^2=1\xrightarrow{z=x+y-1}x^2+y^2-(x+y-1)^2=1$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-(x+y)^2+2(x+y)-1=1\Rightarrow x^2+y^2-x^2-y^2-2xy+2x+2y=2\Rightarrow x+y-xy=1\Rightarrow x(1-y)=1-y$$

$$\Rightarrow(x-1)(1-y)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$$

بنابراین صفحه مماس بر رویه در دو خط راست با رویه اشتراک دارد. اگر بخواهیم معادله‌ی این دو خط را بنویسیم داریم:

$$x=1,z=x+y-1\ \Rightarrow L_1:x=1,z=y$$
$$y=1,z=x+y-1\Rightarrow L_2:y=1,z=x$$

۹ـ گزینه «۲»

$$f:R^3\to R$$
$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xyz$$

ابتدا مشتق‌های جزئی را برابر با صفر قرار می‌دهیم تا محل نقاط بحرانی معلوم شود:

$$\begin{cases}f_x=2x-yz=0\Rightarrow 2x=yz\\f_y=2y-xz=0\Rightarrow 2y=xz\\f_z=2z-xy=0\Rightarrow 2z=xy\end{cases}$$

با ضرب‌کردن طرفین تساوی‌ها داریم $8xyz=(xyz)^2$ پس $xyz=0$ یا $xyz=8$. اگر $xyz=0$ باشد آنگاه یکی از متغیرهای x، y یا z صفر می‌شود که در این صورت با توجه به تساوی‌های قبلی دو متغیر دیگر هم صفر می‌شوند. پس $(x,y,z)=(0,0,0)$ یک نقطه‌ی بحرانی است. در حالت $xyz=8$ نیز با توجه به تساوی‌های قبلی نقاط $(2,2,2)$ و $(2,-2,-2)$ و $(-2,2,-2)$ و ... به دست می‌آیند که در این نقاط یا هر ۳ متغیر مثبت هستند یا فقط یکی از آن‌ها مثبت است.

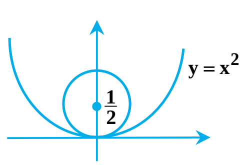
در مجموع با در نظر گرفتن نقطه‌ی $(0,0,0)$ به ۵ نقطه‌ی بحرانی می‌رسیم. بنابراین از همین‌جا معلوم است که گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نادرست هستند. نیازی به بررسی نوع نقاط نداریم.

۱۰ـ گزینه «۱» ابتدا انحنای منحنی $y=x^2$ را در نقطه $(0,0)$ به‌دست آوریم.

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^3}=\frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{1}=2$$

شعاع دایره انحنا که به آن شعاع انحنا نیز می‌گویند برابر است با $\rho=\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$.

از طرفی از آن‌جا که تقعر منحنی به سمت بالا است مرکز دایره انحنا روی محور y های مثبت قرار می‌گیرد. پس واضح است که مرکز دایره انحنا نقطه $(0,\frac{1}{2})$ خواهد بود. معادله این دایره چنین است:



$$x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

۱۱ــ گزینه «۲» این رابطه‌ی بازگشتی را با استفاده از معادله‌ی مشخصه حل می‌کنیم:

$$x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}:n\ge 3$$

معادله‌ی مشخصه: $\Rightarrow 2x_n-x_{n-1}-x_{n-2}=0\Rightarrow 2\lambda^2-\lambda-1=0$

$$\Rightarrow \lambda=1,-\frac{1}{2}\Rightarrow x_n=c_1 1^n+c_2(\frac{-1}{2})^n=c_1+c_2(\frac{-1}{2})^n\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}x_n=c_1$$

پس کافی است c_1 را بیابیم، برای این کار از شرایط اولیه‌ی $x_1=a$ و $x_2=b$ استفاده می‌کنیم، پس:

$$\begin{cases}\xrightarrow{n=1} x_1=c_1-\frac{1}{2}c_2=a\\ \xrightarrow{n=2} x_2=c_1+\frac{1}{4}c_2=b\xrightarrow{\times 2}\end{cases}\quad \begin{cases}c_1-\frac{1}{2}\cancel{c_2}=a\\ 2c_1+\frac{1}{2}\cancel{c_2}=2b\end{cases}+$$

$$3c_1=a+2b\Rightarrow c_1=\frac{1}{3}(a+2b)$$

۱۲ــ گزینه «۴» برای یافتن برد تابع، رفتار آن را در دامنه‌اش بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}}:D_f=(0,+\infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{x}}=(0^+)^{+\infty}=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\infty^0_{\text{مبهم}}\Rightarrow y=x^{\frac{1}{x}}\ ,\ Lny=\frac{1}{x}Lnx\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}Lny=\lim_{x\to+\infty}\frac{Lnx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0\Rightarrow$$

$$y=e^0=1$$

$$y=x^{\frac{1}{x}}\Rightarrow Lny=\frac{1}{x}Lnx\to\frac{y'}{y}=\frac{-1}{x^2}Lnx+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(-Lnx+1)\Rightarrow y'=x^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x^2})(1-Lnx)$$

	0	e	$+\infty$
y'	+	0	−
	↗	max	↘

$$\xrightarrow{y'=0}1-Lnx=0\Rightarrow Lnx=1\Rightarrow x=e\ ,\ f(e)=e^{\frac{1}{e}}=e^{e^{-1}}$$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده، یعنی ۰، ۱ و $e^{e^{-1}}$، بُرد تابع f عبارت است از: $(0,e^{e^{-1}}]$

۱۳ــ گزینه «۱» سطح حاصل از دوران حول محور x ها، از رابطه‌ی $S=\int_a^b 2\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$ قابل محاسبه است.

$$\begin{cases}x(t)=\frac{1}{8}(t-\sin t)\\ y(t)=\frac{1}{8}(1-\cos t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=\frac{1}{8}(1-\cos t)\\ y'(t)=\frac{1}{8}\sin t\end{cases}$$

$$S=\int_0^{2\pi}2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=2\pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}(1-\cos t)\sqrt{\frac{1}{64}(1-\cos t)^2+\frac{1}{64}\sin^2 t}\,dt$$

$$=\frac{\pi}{32}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{1-2\cos t+\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{1}}\,dt=\frac{\pi}{32}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{32}(\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}}dt+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}}dt)$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{32}(\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos t)\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}dt-\int_{\pi}^{2\pi}\frac{(1-\cos t)\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}dt)$$

انتگرال $\int\frac{(1-\cos t)\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}dt$ با تغییر متغیر $1+\cos t=u$، $-\sin tdt=du$ به این صورت حل می‌شود:

$$\int\frac{(1-\cos t)\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}dt=\int\frac{(2-u)(-du)}{\sqrt{u}}=\int\frac{u-2}{\sqrt{u}}du=\int(u^{\frac{1}{2}}-2u^{-\frac{1}{2}})du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-4u^{\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{3}(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}-4(1+\cos t)^{\frac{1}{2}}+c$$

بنابراین با جایگذاری حدود انتگرال‌ها داریم:

$$S=\frac{\pi\sqrt{2}}{32}([\frac{2}{3}(1+\cos t)\sqrt{1+\cos t}-4\sqrt{1+\cos t}]_0^{\pi}-[\frac{2}{3}(1+\cos t)\sqrt{1+\cos t}-4\sqrt{1+\cos t}]_{\pi}^{2\pi})$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{32}(\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{-8\sqrt{2}}{3})=\frac{\pi\sqrt{2}}{32}\frac{16\sqrt{2}}{3}=\frac{\pi}{3}$$

۱۴ــ گزینه «۴» با استفاده از قضیه‌ی استوکس داریم:

$$\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{N}ds = \int_c \vec{F}.d\vec{r} = \int_c Pdx+Qdy+Rdz = \int_c -y\sqrt{x^2+y^2}\,dx + x\sqrt{x^2+y^2}\,dy$$

که در آن c دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ در صفحه‌ی xoy می‌باشد، یعنی $x^2+y^2=4$، پس:

$$= \int_c -y\sqrt{4}\,dx + x\sqrt{4}\,dy$$

$$= 2\int_c -ydx+xdy = 4(\frac{1}{2}\int_c -ydx+xdy) = 4\,(\text{مساحت دایره‌ی با مرز } c) = 4(\pi\times 4) = 16\pi$$

یادآوری می‌کنیم که اگر C منحنی بسته‌ای در صفحه‌ی xoy باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{1}{2}\int_c -ydx+xdy = (\text{مساحت درون } c)$$

توجه: روش مستقیم یعنی محاسبه‌ی $\operatorname{curl}\vec{F}.\vec{K}$ منجر به حل انتگرال دوگانه می‌شود که محاسبه‌ی آن کمی سخت‌تر از حالت فوق می‌شود؛ درواقع پس از محاسبه داریم:

$$I = \iint_b 3\sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (3r)rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^2 3r^2dr = 2\pi\left[r^3\right]_0^2 = 16\pi$$

۱۵ــ گزینه «۱» با توجه به این‌که رابطه‌ای برای محاسبه معکوس ماتریس جمع دو ماتریس نداریم، برای از بین بردن آن، دو طرف تساوی را از چپ در $(I+2A)$ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$(I+2A)(I+2A)^{-1} = (I+2A)(I+\alpha A+\beta A^2) \Rightarrow I = I+\alpha A+\beta A^2+2A+2\alpha A^2+2\beta A^3 \Rightarrow (\alpha+2)A+(2\alpha+\beta)A^2 = O \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=-2 \\ 2\alpha+\beta=0 \Rightarrow \beta=-2\alpha=4 \end{cases}$$

شاید این سؤال برای شما پیش بیاید که چرا تنها راه، صفر بودن ضرایب است! برای اثبات این موضوع، کافی است دو طرف تساوی (*) را در ماتریس غیر صفر A ضرب کنید. در این صورت داریم:

$$(\alpha+2)A^2+(2\alpha+\beta)A^3 = OA \Rightarrow (\alpha+2)A^2 = O$$

با توجه به فرض سؤال، ماتریس A^2 مخالف صفر است، پس باید ضریب آن صفر باشد. سپس با جایگذاری $\alpha=-2$ در تساوی (*)، به نتیجه مشابهی در مورد ضریب ماتریس A^2 در آن می‌رسید که نتیجه می‌دهد $\beta=-2\alpha=4$.

۱۶ــ گزینه «۲» طبق فرض داریم $z^5=1$ بنابراین در محاسبه این عبارت هر جا توان‌های بزرگ‌تر از ۵ به وجود آمدند از این موارد استفاده می‌کنیم:

$$z^6 = z^5\times z = 1\times z = z$$

$$z^7 = z^5\times z^2 = 1\times z^2 = z^2$$

$$z^8 = z^5\times z^3 = 1\times z^3 = z^3$$

اکنون با مخرج مشترک گرفتن داریم:

$$\frac{z}{1+z^2}+\frac{z^2}{1+z^4}+\frac{z^3}{1+z}+\frac{z^4}{1+z^3} = \frac{z+z^5+z^2+z^6}{(1+z^2)(1+z^4)}+\frac{z^3+z+z^4+z^5}{(1+z)(1+z^3)} = \frac{z+1+z^2+z^4}{1+z^2+z^4+z}+\frac{z^3+z+z^4+1}{1+z+z^3+z^4} = 1+1 = 2$$

۱۷ــ گزینه «۱» از صورت سؤال معلوم است که f تابعی پیوسته و ۲ بار مشتق‌پذیر است. تابع ثابت $f(x)=0$ در تساوی داده شده صدق می‌کند. نشان می‌دهیم که به جز تابع ثابت صفر، هیچ تابع دیگری در این شرط صدق نمی‌کند.

از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $f(x)$ تابع ثابت صفر نباشد. در این صورت نقطه‌ای مانند c در بازه $[0,1]$ وجود دارد که اکسترموم مطلق $f(x)$ است. دو حالت داریم:

اگر این نقطه ماکزیمم مطلق $f(x)$ باشد، داریم:

$$f(c)>0 \quad , \quad f'(c)=0 \quad , \quad f''(c)<0$$

اما این تناقض است؛ زیرا در $x=c$ داریم:

$$f''(c)+f'(c)g(c) = f(c) \Rightarrow f''(c) = f(c)$$

به همین ترتیب اگر این نقطه مینیمم مطلق $f(x)$ باشد، داریم:

$$f(c)<0 \quad , \quad f'(c)=0 \quad , \quad f''(c)>0$$

که باز هم به تناقض قبلی خواهیم رسید.

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که $f(x)$ باید تابع ثابت صفر باشد.

۱۸ـ گزینه «۳» صورت و مخرج را در $\sqrt{1-\cos x}$ ضرب می‌کنیم تا در صورت کسر، زیر رادیکال $1-\cos^2 x=\sin^2 x$ به وجود بیاید:

$$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{(1-\cos x)^{\frac{7}{2}}}\times\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{(1-\cos x)^{\frac{7}{2}}(1-\cos x)^{\frac{1}{2}}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{(1-\cos x)^4}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{-4}\sin x\,dx$$

توجه کنید که در بازه‌ی $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ علامت $\sin x$ مثبت است، پس $\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|=\sin x$ است.

حالا با فرض $u=1-\cos x$ داریم: $du=\sin x\,dx$. در ضمن به‌ازای $x=\frac{\pi}{3}$ داریم: $u=\frac{1}{2}$ و به‌ازای $x=\frac{\pi}{2}$ داریم: $u=1$. با این تغییر متغیر انتگرال به سادگی حل می‌شود:

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^{-4}du=\frac{u^{-3}}{-3}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{u^3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=-\frac{1}{3}[1-8]=\frac{7}{3}$$

۱۹ـ گزینه «۴» از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. با توجه به شعاع کره داریم $0\le\rho\le 2$ و از آنجا که هیچ شرطی روی علامت x و y نداریم، تصویر این ناحیه بر صفحه xy یک دایره کامل است پس $0\le\theta\le 2\pi$. برای تعیین حدود ϕ اگر در معادلات $x=0$ قرار دهیم، دایره‌ی $y^2+z^2=4$ و خطوط $z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}y$ به دست می‌آیند. با در نظر گرفتن مقادیر مثبت y و z داریم:

$$\phi=tg^{-1}\left(\frac{y}{z}\right)=tg^{-1}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$$

ورودی محور zهای مثبت هم $\phi=0$ است پس $0\le\phi\le\frac{\pi}{3}$ خواهد بود.

$$V=\iiint_D dzdydx=\iiint_D\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta=V\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^2\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta\Rightarrow V=\left[\int_0^{2\pi}d\theta\right]\times\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\phi\right]\times\left[\int_0^2\rho^2 d\rho\right]$$

$$=(2\pi)[-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{3}}\times\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2\Rightarrow V=(2\pi)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{8\pi}{3}$$

۲۰ـ گزینه «۳» ابتدا از هم‌ارزی $Lnn\simeq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ استفاده می‌کنیم تا سری داده شده به شکل ساده‌تر $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLnn}x^n$ نوشته شود.

توجه: دلیل این‌که از $n=2$ آغاز کردیم این است که به‌ازای $n=1$ مخرج کسر صفر می‌شود. می‌دانیم که این کار هیچ تأثیری روی شعاع و ناحیه همگرایی ندارد.

سری توانی مورد نظر حول $c=0$ نوشته شده است. شعاع همگرایی را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{nLnn}}=\frac{1}{1\times 1}=1\Rightarrow R=1$$

پس این سری در بازه‌ی $(c-R,c+R)=(-1,1)$ همگراست و مرزهای این بازه باید به‌صورت جداگانه بررسی شوند. با جایگذاری $x=1$ به سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLnn}$ می‌رسیم. این سری واگراست.

یادآوری: سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(Lnn)^q}$ به شرطی همگراست که $p>1$ باشد یا آنکه $p=1$ و $q>1$ باشد.

با جایگذاری $x=-1$ به سری متناوب $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLnn}(-1)^n$ می‌رسیم که همگراست، زیرا دنباله‌ی $\frac{1}{nLnn}$ نزولی و همگرا به صفر است.

به این ترتیب بازه‌ی همگرایی سری به صورت $[-1,1)$ است.

۲۱ـ گزینه «۲» واضح است که در حالت $a=b=0$، ماتریس همان ماتریس صفر است که رتبه‌ی آن صفر است. در حالتی که $ab=0\,,\,a\ne b$ است، ماتریس به یکی از صورت‌های زیر درمی‌آید:

$$b\ne a=0\Rightarrow\begin{vmatrix}0&0&0\\b&0&0\\b&b&b\end{vmatrix}\quad;\quad a\ne b=0\Rightarrow\begin{vmatrix}0&a&a\\0&0&a\\0&0&0\end{vmatrix}$$

که واضح است رتبه هر دو ماتریس ۲ است. تنها حالت باقی‌مانده وقتی است که a و b هر دو مخالف صفر باشند. در این حالت داریم:

$$\begin{vmatrix}0&a&a\\b&0&a\\b&b&b\end{vmatrix}=0-a(b^2-ab)+a(b^2-0)=a^2b\ne 0$$

پس رتبه ماتریس در این حالت ۳ است (زیرا دترمینان آن غیرصفر است). در نتیجه همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در هیچ حالتی، رتبه‌ی ماتریس ۱ نخواهد شد.

۲۲- گزینه «۱» حد داده شده را به صورت $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}$ می‌توان نوشت. عبارت داخل سری در واقع قسمت حقیقی $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ است، پس کافیست ابتدا حاصل حد $\sum\limits_{k=1}^{n-1}e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ را به دست آورده و قسمت حقیقی آن را جایگزین سری اولیه در عبارت حد کنیم تا به یک حد ساده برسیم. از طرفی سری $\sum\limits_{k=1}^{n-1}e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ در واقع یک سری هندسی با جمله اول $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ و قدر نسبت $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ است. در نتیجه داریم:

$$\sum_{k=1}^{n-1}e^{i\frac{2k\pi}{n}}=\frac{e^{i\frac{2\pi}{n}}(e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}-1)}{e^{i\frac{2\pi}{n}}-1}=\frac{e^{i2\pi}-e^{i\frac{2\pi}{n}}}{e^{i\frac{2\pi}{n}}-1}=\frac{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}{e^{i\frac{2\pi}{n}}-1}=-1\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}=\mathrm{Re}\{-1\}=-1\Rightarrow L=-1$$

۲۳- گزینه «۳» با توجه به شکل مخرج تابع، از بسط مک‌لورن $\frac{1}{1+4x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x^2)^n$ کمک می‌گیریم. با مشتق‌گیری از طرفین این تساوی، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1+4x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n}\xrightarrow{\frac{d}{dx}}\frac{-8x}{(1+4x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}2n(-1)^n4^nx^{2n-1}$$

$$\xrightarrow{\times x^2}\frac{x^3}{(1+4x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{-8}n(-1)^n4^nx^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n-1}4^{n-1}x^{2n+1}$$

توجه داشته باشید که سری به دست آمده همان سری مطرح شده در گزینه (۳) است؛ زیرا به ازای اندیس صفر، جمله سری صفر است، پس تغییر اندیس از ۱ به ۰ تاثیری در مقدار سری ندارد.

۲۴- گزینه «۳»

روش اول: برای حل این انتگرال از بسط مک‌لورن تابع e^{-x} کمک می‌گیریم:

$$\int\frac{e^{-x}}{x}dx=\int\frac{(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots)}{x}dx=\int(\frac{1}{x}-1+\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{3!}+\cdots)dx=\mathrm{Ln}x-x+\frac{x^2}{2(2!)}-\frac{x^3}{3(3!)}+\cdots$$

$$\Rightarrow\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{e^{-x}}{x}dx=\mathrm{Ln}x-x+\frac{x^2}{2(2!)}-\frac{x^3}{3(3!)}+\cdots\Big|_{\alpha}^{2\alpha}=(\mathrm{Ln}2\alpha-2\alpha+\frac{(2\alpha)^2}{2(2!)}-\frac{(2\alpha)^3}{3(3!)}+\cdots)-(\mathrm{Ln}\alpha-\alpha+\frac{\alpha^2}{2(2!)}-\frac{\alpha^3}{3(3!)}+\cdots)$$

توجه داشته باشید وقتی $\alpha\to 0$ تمامی چندجمله‌ای‌های این عبارت نیز به سمت صفر میل می‌کنند و فقط دو عبارت شامل Ln را باید در نظر گرفت.

در نتیجه داریم:
$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{e^{-x}}{x}dx=\lim_{\alpha\to 0}(\mathrm{Ln}2\alpha-\mathrm{Ln}\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}(\mathrm{Ln}\frac{2\alpha}{\alpha})=\mathrm{Ln}2$$

روش دوم: با استفاده از قضیه فشردگی به این سؤال پاسخ می‌دهیم.

با توجه به این که برای $\alpha>0$ همیشه $\alpha\le x\le 2\alpha$ می‌باشد، داریم:
$$-2\alpha\le -x\le-\alpha\Rightarrow e^{-2\alpha}\le e^{-x}\le e^{-\alpha}\Rightarrow\frac{e^{-2\alpha}}{x}\le\frac{e^{-x}}{x}\le\frac{e^{-\alpha}}{x}$$

اگر از طرفین این نامساوی با توجه به صورت سؤال انتگرال برحسب x بگیریم و بازه‌ی انتگرال‌گیری نیز از α تا 2α باشد، داریم:

$$\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{e^{-2\alpha}}{x}dx\le\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{e^{-x}}{x}dx\le\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{e^{-\alpha}}{x}dx$$

با توجه به این که:
$$\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{dx}{x}=\mathrm{Ln}x\Big|_{\alpha}^{2\alpha}=\mathrm{Ln}2\alpha-\mathrm{Ln}\alpha=\mathrm{Ln}\frac{2\alpha}{\alpha}=\mathrm{Ln}2$$

پس داریم:
$$e^{-2\alpha}\mathrm{Ln}2\le\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{e^{-x}}{x}dx\le e^{-\alpha}\mathrm{Ln}2$$

حال اگر $\alpha\to 0^+$ دو طرف نامساوی به عدد Ln۲ میل می‌کنند و طبق قضیه فشردگی عامل وسط که همان انتگرال خواسته شده در صورت سؤال می‌باشد نیز به عدد Ln۲ میل می‌کند. توجه داشته باشید که برای $\alpha\to 0^-$ نیز با همین استدلال حاصل حدچپ Ln۲ می‌باشد.

۲۵- گزینه «۳» با توجه به این‌که x به صورت تابعی از y تعریف شده، برای راحتی کار، از رابطه $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ در استفاده از رابطه مشتق زنجیره‌ای کمک می‌گیریم:

$$\frac{dx}{dy}=2\times\frac{1}{\sqrt{1+5(2y)^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+20y^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{1+20y^2}}}\right)=\frac{\frac{d}{dy}\left(\frac{\sqrt{1+20y^2}}{2}\right)}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\frac{40y}{2\times2\sqrt{1+20y^2}}}{\frac{2}{\sqrt{1+20y^2}}}=5y\ \Rightarrow\ \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{y}=5$$

۲۶ــ گزینه «۱» با یک سؤال از تبدیل انتگرال به فرم استاندارد تابع گاما روبرو هستیم. در نتیجه کافیست از تغییر متغیر $\alpha x^2=t$ کمک بگیریم:

$$\alpha x^2=t\ \Rightarrow 2\alpha xdx=dt\ \Rightarrow dx=\frac{dt}{2\alpha\sqrt{\frac{t}{\alpha}}}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}t^{-\frac{1}{2}}dt\quad,\quad\begin{cases}x=0\ \Rightarrow t=0\\ x\to\infty\xrightarrow{\alpha>0}t\to\infty\end{cases}$$

$$I=\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^\infty\frac{t}{\alpha}e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt$$

از مقایسه انتگرال به دست آمده با فرم استاندارد تابع گاما که به صورت $\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt=\Gamma(\alpha)$ تعریف می‌شود و همچنین استفاده از رابطه $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\times\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{4\alpha\sqrt{\alpha}}\times\sqrt{\pi}=\frac{1}{4\alpha}\times\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

۲۷- گزینه «۴» انتگرال داده شده در صفر و بی‌نهایت ناسره است. ابتدا انتگرال را به دو قسمت می‌شکنیم تا در هر بازه فقط در یک نقطه ناسره باشد:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^p+x^q}=\underbrace{\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}}_{I_1}+\underbrace{\int_1^\infty\frac{dx}{x^p+x^q}}_{I_2}$$

انتگرال I_1 فقط در مبدأ و انتگرال I_2 فقط در بی‌نهایت ناسره است. در نتیجه با استفاده از هم‌ارزی چندجمله‌ای‌ها در این نقاط، داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}I_1=\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}\overset{p\le q}{\sim}\int_0^1\frac{dx}{x^p}\quad\Rightarrow\ p<1\\ I_2=\int_1^\infty\frac{dx}{x^p+x^q}\overset{p\le q}{\sim}\int_1^\infty\frac{dx}{x^q}\ \Rightarrow\ q>1\end{array}\right.\Rightarrow\ p<1<q$$

۲۸- گزینه «۲» با توجه به فرمول مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $r=f(\theta)$ حول محور xها داریم:

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta f(\theta)\sin\theta\sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)}d\theta$$

از طرفی معادله داده شده یک لیماسیون افقی را نشان می‌دهد که نسبت به محور xها متقارن است، پس کافیست فقط مساحت سطح حاصل از دوران نیمه بالایی را که به ازای $0\le\theta\le\pi$ به دست می‌آید محاسبه کنیم:

$$S=2\pi\int_0^\pi(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}d\theta=2\pi\int_0^\pi(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_0^\pi(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\sin\theta d\theta=2\sqrt{2}\pi\times\frac{-2}{5}(1+\cos\theta)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^\pi=\frac{-4\sqrt{2}\pi}{5}(0-4\sqrt{2})=\frac{32\pi}{5}$$

۲۹- گزینه «۲» با توجه به حضور عامل‌های x^2+y^2 و z از مختصات استوانه‌ای کمک می‌گیریم. ابتدا با تقاطع دو سطح، تصویر ناحیه بر روی صفحه xoy را به دست می‌آوریم:

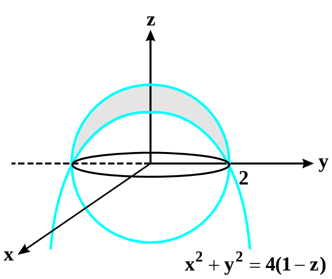
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=4(1-z) \end{cases} \Rightarrow 4(1-z)+z^2=4 \Rightarrow z^2-4z=0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 \Rightarrow x^2+y^2=4 \quad (\text{ق ق}) \\ z=4 \Rightarrow x^2+y^2=-12 \ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

برای تعیین حدود z نیز با توجه به معادله دو سطح داریم:

$$x^2+y^2=4(1-z) \Rightarrow z=1-\frac{x^2+y^2}{4}=1-\frac{r^2}{4}$$
$$x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow z=\pm\sqrt{4-x^2-y^2}=\pm\sqrt{4-r^2}$$

ناحیه‌ی موردنظر سؤال ناحیه‌ی هاشورخورده در شکل می‌باشد و برای آن که طبق فرض سؤال ناحیه مورد نظر شامل مبدأ نباشد، باید نیم‌کره بالایی را به عنوان حد بالایی z در نظر بگیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$0\le r\le 2\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi\ ,\ 1-\frac{r^2}{4}\le z\le\sqrt{4-r^2}$$



$$V=\iiint_V dv=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{1-\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r[\sqrt{4-r^2}-(1-\frac{r^2}{4})]drd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(\frac{r^3}{4}-r+r\sqrt{4-r^2})dr \qquad (*)$$

$$\int_0^2(\frac{r^3}{4}-r+r\sqrt{4-r^2})dr=\frac{r^4}{16}-\frac{r^2}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$

$$=[\frac{16}{16}-\frac{4}{2}-\frac{1}{3}(4-4)^{\frac{3}{2}}]-[0-0-\frac{1}{3}(4-0)^{\frac{3}{2}}]=-1-(-\frac{8}{3})=\frac{5}{3}$$

$$\xrightarrow{(*)} V=2\pi\times\frac{5}{3}=\frac{10\pi}{3}$$

۳۰- گزینه «۱»

روش اول: با توجه به این که سطح S یک سطح بسته نمی‌باشد، انتگرال شار را با استفاده از تعریف مستقیم شار یعنی $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ به دست می‌آوریم.

با توجه به این که تصویر ناحیه‌ی S بر روی صفحه‌ی xy یک مستطیل با حدود $0\le x\le 3$ و $-2\le y\le 2$ می‌باشد، داریم:

$\vec{P}$ عمود بر صفحه xy یعنی $\vec{P}=\vec{k}$، پس $\vec{\nabla}g.\vec{P}=1$ می‌باشد و $g: y^2+z-4=0 \Rightarrow \vec{\nabla}g=(0,2y,1)$ معادله سطح S است،

$$\vec{n}ds=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{P}|}dA \Rightarrow \vec{n}ds=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{1}dA=\pm(0,2y,1)dA$$

با توجه به صورت سؤال که $\vec{n}$ باید در جهت مثبت محور zها باشد، پس مؤلفه‌ی سوم آن باید مثبت باشد، پس داریم: $\vec{n}ds=(0,2y,1)dA$

و داریم: $\vec{F}.\vec{n}ds=(z^2-x,xy,3z).(0,2y,1)dA=(2xy^2+3z)dA$

اکنون به جای z قرار می‌دهیم $z=4-y^2$ و داریم: $\vec{F}.\vec{n}ds=(2xy^2+12-3y^2)dA$

اکنون شار را به دست می‌آوریم:

$$\text{شار}=\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds=\iint_D(2xy^2+12-3y^2)dA=\int_{-2}^{2}\int_0^3(2xy^2+12-3y^2)dxdy=\int_{-2}^{2}(x^2y^2+12x-3xy^2)_0^3dy=\int_{-2}^{2}(9y^2+36-9y^2)dy$$

$$=\int_{-2}^{2}36dy=36y)_{-2}^{2}=36(4)=144$$

توجه داشته باشید که با توجه به باز بودن ناحیه‌ی S اگر بخواهیم سطح S را ببندیم و از قضیه دیورژانس استفاده کنیم باید سه صفحه‌ی $z=0$ و $x=0$ و $x=3$ را اضافه کنیم و شار را بر روی هر یک از این سه صفحه به دست آوریم و سپس از شار کل که از قضیه دیورژانس به دست آورده‌ایم کم کنیم، که این کار زمان زیادی می‌برد. دلیل دیگری که از روش تعریف مستقیم شار حاصل را به دست آوردیم، کم متغیر بودن مؤلفه‌های میدان برداری می‌باشد که کار انتگرال‌گیری را آسان می‌کند. با این حل روش دوم هم ارائه می‌شود.

روش دوم: همان‌طور که گفتیم سطح S بسته نیست، چون سؤال گفته قسمتی از رویه که بین صفحات $x=0$ و $x=3$ قرار دارد و لذا نمی‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم؛ اما اگر صفحات $z=0$، $x=0$ و $x=3$ را به آن اضافه کنیم، سطح بسته می‌شود و می‌توان از قضیه دیورژانس استفاده نمود.

اگر سطح جدید را S' بنامیم، خواهیم داشت: $I'=\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_V(\operatorname{div}\vec{F})dv=\iiint_V(-1+x+3)dv=\iiint_V(x+2)dv$

برای محاسبه این انتگرال از مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. برای تعیین حدود متغیرها، داریم:

$$0\le x\le 3\ ,\ z=4-y^2\ge 0\Rightarrow -2\le y\le 2\ ,\ 0\le z\le 4-y^2$$

$$I'=\int_0^3\int_{-2}^2\int_0^{4-y^2}(x+2)dzdydx=\int_0^3\int_{-2}^2(x+2)(4-y^2)dydx$$

$$=\int_0^3(x+2)dx\int_{-2}^2(4-y^2)dx=2\int_0^3(x+2)dx\int_0^2(4-y^2)dx=2\times\frac{1}{2}(x+2)^2\Big|_0^3\times(4y-\frac{y^3}{3})\Big|_0^2=(25-4)(8-\frac{8}{3})=112$$

حال باید شار گذرنده از صفحات $z=0$، $x=0$ و $x=3$ را محاسبه و از مقدار به دست آمده بالا کم کنیم. در روی صفحه $z=0$، بردار قائم برون‌سو $(-\vec{k})$ است و $\vec{F}.\vec{n}=-3z=0$ به دست می‌آید. در روی صفحه $x=0$، بردار قائم $(-\vec{i})$ و $\vec{F}.\vec{n}=x-z^2=-z^2$ به دست می‌آید. از طرفی در این صفحه باید حدود y و z را تشخیص دهیم. با توجه به محاسباتی که برای انتگرال اولیه انجام دادیم، $-2\le y\le 2$ و $0\le z\le 4-y^2$ خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$I_1=\iint_{x=0}\vec{F}.\vec{n}ds=\int_{-2}^2\int_0^{4-y^2}(-z^2)dzdy$$

قبل از این که به محاسبه این انتگرال بپردازیم، اجازه دهید ابتدا شار گذرنده از صفحه $x=3$ را محاسبه کنیم. در روی این صفحه بردار قائم برون‌سو $\vec{i}$ و $\vec{F}.\vec{n}=z^2-x=z^2-3$ خواهد بود. حدود y و z نیز همانند قسمت قبل است. یعنی داریم: $I_2=\iint_{x=3}\vec{F}.\vec{n}ds=\int_{-2}^2\int_0^{4-y^2}(z^2-3)dzdy$

حال مجموع دو انتگرال I_1 و I_2 را به دست آورده و از مقدار I کم می‌کنیم.

$$I_1+I_2=\int_{-2}^2\int_0^{4-y^2}(-z^2)dzdy+\int_{-2}^2\int_0^{4-y^2}(z^2-3)dzdy=\int_{-2}^2\int_0^{4-y^2}(-3)dzdy=-3\int_{-2}^2(4-y^2)dy$$

$$=-3\times 2\int_0^2(4-y^2)dy=-6(4y-\frac{y^3}{3})\Big|_0^2=-6[(8-\frac{8}{3})-0]=-32\Rightarrow I=I'-(I_1+I_2)=112-(-32)=144$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۱ــ گزینه «۳» روش اول: با حل کردن این رابطه‌ی بازگشتی، جمله‌ی عمومی دنباله را پیدا می‌کنیم. ابتدا جواب رابطه‌ی بازگشتی همگن $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$ را پیدا می‌کنیم.

$$r^n=2r^{n-1}-r^{n-2}\Rightarrow r^2=2r-1\Rightarrow r^2-2r+1=0\Rightarrow r_1=1\ ,\ r_2=1\Rightarrow a_n=c_1(1)^n+c_2n(1)^n\Rightarrow a_n=c_1+c_2n$$

حالا در رابطه‌ی بازگشتی ناهمگن، به علت وجود عدد ثابت $+2$ در بخش ناهمگن معادله، جواب ویژه‌ی $a_{n_p}=A(1)$ را هم باید در نظر بگیریم. اما، با توجه به وجود جمله ثابت (1) و جمله‌ی (n) در جواب قسمت همگن باید a_{n_p} را در n^2 ضرب کنیم: $a_{n_p}=An^2$

با جایگذاری این جواب در معادله‌ی ناهمگن داریم:

$$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+2\Rightarrow An^2=2A(n-1)^2-A(n-2)^2+2\Rightarrow 0=2A-4A+2\Rightarrow A=1\Rightarrow a_{n_p}=n^2$$

پس جمله‌ی عمومی a_n چنین است: $a_n=c_1+c_2n+n^2$

به علت وجود جمله‌ی n^2 در ضابطه‌ی a_n، تنها گزینه‌ای که می‌تواند درست باشد، گزینه (۳) است. زیرا $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$. اما اگر بخواهیم حل را کامل کنیم

از شرایط $a_1=1$ و $a_2=4$ داریم: $\begin{cases}c_1+c_2+1=1\\c_1+2c_2+4=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1+c_2=0\\c_1+2c_2=0\end{cases}\Rightarrow c_1=c_2=0\Rightarrow a_n=n^2$

روش دوم: می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی داده شده چند جمله از این دنباله را حساب کنیم تا نحوه‌ی رفتار آن را تشخیص دهیم:

$$a_1=1\ ,\ a_2=4\ ,\ a_3=2(4)-1+2=9\ ,\ a_4=2(9)-4+2=16$$

با توجه به چند جمله‌ی به دست آمده معلوم است که a_n صعودی و واگراست. در ضمن $a_n=n^2$ را هم می‌توان حدس زد.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۲ـ گزینه «۳» ابتدا نقاط بحرانی $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۱\times\sqrt[۳]{\sin x}-۰=۰ \Rightarrow \sin x=۰ \Rightarrow x=۰,\pi,۲\pi$$

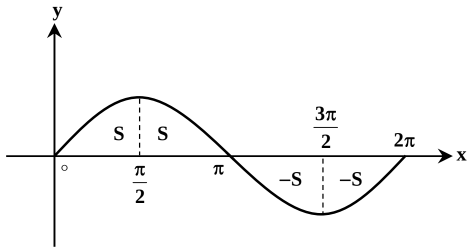
حالا مقدار $f(x)$ را در نقاط بحرانی و در دو سر بازه حساب می‌کنیم:

$$f(۰)=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰}\sqrt[۳]{\sin t}\,dt=-\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt[۳]{\sin t}\,dt<۰$$

$$f(\pi)=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\sqrt[۳]{\sin t}\,dt>۰ \qquad \text{و} \qquad f(۲\pi)=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۲\pi}\sqrt[۳]{\sin t}\,dt<۰$$

بنابراین بیشترین مقدار $f(x)$ را در نقطه‌ی $x=\pi$ به دست می‌آید.

توضیح: تابع $y=\sqrt[۳]{\sin t}$ از نظر علامت مانند $\sin t$ است، به نمودار آن توجه کنید:



اگر مساحت زیر منحنی در فاصله‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ را مثلاً با S نشان دهیم، با توجه به حدود انتگرال‌ها داریم: $f(۰)=-S$ و $f(\pi)=S$ و $f(۲\pi)=-S$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۳ـ گزینه «۱» از آنجا که $\vec{\nabla}$ یک عملگر برداری است، این موارد با معنی هستند؛ (تابع حقیقی) $\vec{\nabla}$، (تابع برداری) $\vec{\nabla}.$، (تابع برداری) $\vec{\nabla}\times$
اما نمادی مانند $\vec{\nabla}\vec{F}$ که در گزینه‌ی (۱) به کار رفته است، بی‌معنی است. زیرا بین این دو بردار نه علامت ضرب داخلی نوشته شده و نه ضرب خارجی.
در سایر گزینه‌ها، عبارات و حاصل‌ضرب‌های نوشته شده، بامعنی هستند.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۴ـ گزینه «۳» uv تابعی حقیقی است که حاصل‌ضرب u و v است.

$$\vec{\nabla}(uv)=(uv)_x\vec{i}+(uv)_y\vec{j}+(uv)_z\vec{k} \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{\nabla}(uv)=(uv)_{xx}+(uv)_{yy}+(uv)_{zz}$$

(به طور کلی برای هر تابع حقیقی مانند f می‌دانیم که: $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}f=\nabla^۲f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$) در این مثال $f=uv$ است.

حالا با محاسبه‌ی مشتق دوم حاصل‌ضرب نسبت به x داریم: $(uv)_{xx}=u_{xx}v+۲u_xv_x+uv_{xx}$

به همین ترتیب برای سایر متغیرها، مشتق مرتبه دوم را حساب می‌کنیم. با جمع‌کردن عبارات داریم:

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(uv)=(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})v+۲(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)+(v_{xx}+v_{yy}+v_{zz})u=(\nabla^۲u)v+۲(\vec{\nabla}u).(\vec{\nabla}v)+(\nabla^۲v)u$$

◆ ◆ ◆ ◆

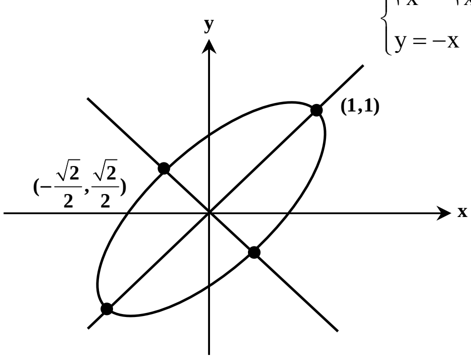
۳۵ـ گزینه «۲» منحنی $ax^۲+bxy+ay^۲=c$ یک بیضی است که قطرهای آن روی خطوط $y=x$ و $y=-x$ قرار دارند. با برخورد دادن این منحنی و خطوط $y=\pm x$ می‌توانیم اندازه‌ی شعاع‌ها را به دست آوریم:

$$\begin{cases}۳x^۲-۲xy+۳y^۲=۴\\ y=x\end{cases} \Rightarrow ۴x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm ۱$$

پس نقاط $(۱,۱)$ و $(-۱,-۱)$ دو سر قطر هستند.

$$\begin{cases}۳x^۲-۲xy+۳y^۲=۴\\ y=-x\end{cases} \Rightarrow ۸x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس نقاط $(\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ و $(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ دو سر قطر هستند.



$$\text{شعاع بزرگتر}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

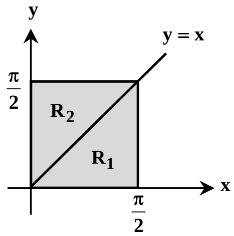
$$\text{شعاع کوچکتر}=\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=۱$$

$$\text{مساحت}=\pi\times\sqrt{۲}\times ۱=\sqrt{۲}\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۶ـ گزینه «۴» ابتدا یادآوری می‌کنیم که انتگرال $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ به روش جزء به جزء حل می‌شود اما، به علت وقت‌گیر بودن آن بهتر است مطابق متن کتاب، فرمول زیر را به خاطر داشته باشید:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}(a\sin bx-b\cos bx) \qquad \text{و} \qquad \int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}(a\cos bx+b\sin bx)$$



اکنون به حل انتگرال دوگانه می‌پردازیم.
در تابع زیر انتگرال تبدیل x به y و y به x تغییری ایجاد نمی‌کند. در ضمن ناحیه‌ی انتگرال‌گیری نسبت به خط $y=x$ تقارن دارد، پس می‌توانیم مقدار انتگرال روی نیمه‌ی پایینی را که زیر خط $y=x$ قرار دارد، حساب کرده و ۲ برابر کنیم.

$$\iint_R f(x,y)\,dy\,dx = ۲\iint_{R_۱} f(x,y)\,dy\,dx$$

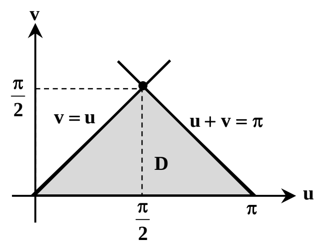
برای ساده‌تر شدن این تابع فرض می‌کنیم $u=x+y$ و $v=x-y$. عبارت زیر انتگرال به صورت $e^u\cos v$ نوشته می‌شود. ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xy}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}=-۲ \Rightarrow |J_{uv}|=\frac{۱}{|J_{xy}|}=\frac{۱}{۲}$$

حالا معادله‌ی مرزها را در دستگاه uov پیدا می‌کنیم.

مرزهای قدیمی	مرزهای جدید
$y=x$	$\Rightarrow \quad v=۰$
$y=۰$	$\Rightarrow \quad (u=x, v=x) \Rightarrow v=u$
$x=\frac{\pi}{۲}$	$\Rightarrow \quad u=\frac{\pi}{۲}+y\ ,\ v=\frac{\pi}{۲}-y) \Rightarrow v+u=\pi$

پس در صفحه‌ی uov شکل مقابل به دست می‌آید:



$$I=۲\iint_D e^u\cos v(\tfrac{۱}{۲}dv\,du)=۲\left(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{u} e^u\cos v(\tfrac{۱}{۲}dvdu)+\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}\int_۰^{\pi-u} e^u\cos v(\tfrac{۱}{۲}dvdu)\right)$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} e^u\sin u\,du+\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} e^u\underbrace{\sin(\pi-u)}_{\sin u}du=\int_۰^{\pi} e^u\sin u\,du=\frac{e^u}{۲}(\sin u-\cos u)\Big|_۰^{\pi}=\frac{e^{\pi}+۱}{۲}$$

توضیح: توجه داشته باشید که نوشتن حدود انتگرال روی D با ترتیب $I=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_v^{\pi-v} e^u\cos v\,dudv$ ایرادی ندارد، اما کمک زیادی به ساده‌تر شدن مسأله نمی‌کند.

۳۷ــ گزینه «۳» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم. در روش اول طبق معمول همیشه مقادیر y' و y'' را در مبدأ حساب می‌کنیم.

روش اول:

$$x^۴-y^۴+x^۳-y^۳+x^۲-y^۲+y=۰$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$۴x^۳-۴y^۳y'+۳x^۲-۳y^۲y'+۲x-۲yy'+y'=۰$$

با مشتق‌گیری دوباره خواهیم داشت:

$$۱۲x^۲-۱۲y^۲y'y'-۴y^۳y''+۶x-۶yy'y'-۳y^۲y''+۲-۲y'y'-۲yy''+y''=۰$$

با جایگذاری $y=۰$، $x=۰$ دو معادله‌ی قبل داریم:

$$\begin{cases} ۰+y'=۰ & \Rightarrow y'=۰ \\ ۰+۲-۰+y''=۰ & \Rightarrow y''=-۲ \end{cases}$$

حالا از فرمول انحناء استفاده می‌کنیم:

$$\kappa=\frac{|y''|}{[۱+(y')^۲]^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{|-۲|}{(۱+۰)^{\frac{۳}{۲}}}=۲$$

پس شعاع انحناء، $\rho=\frac{۱}{\kappa}=\frac{۱}{۲}$ است.

روش دوم: شرایط استفاده از فرمول نیوتن را بررسی می‌کنیم. این منحنی از مبدأ می‌گذرد و با استفاده از قاعده‌ی کمترین درجه؛ در نزدیک مبدأ داریم $y=۰$ که نشان می‌دهد محور xها بر این منحنی مماس است. پس می‌توانیم از فرمول نیوتن استفاده کنیم:

$$\rho=\lim_{x\to۰}\frac{x^۲}{۲y} \Rightarrow ۲\rho=\lim_{x\to۰}\frac{x^۲}{y}$$

(البته اگر مقدار حد منفی شد، قدرمطلق آن را در نظر می‌گیریم.) با تقسیم طرفین معادله‌ی منحنی بر y، مقدار این حد را تعیین می‌کنیم:

$$(\frac{x^۲}{y})x^۲-y^۳+(\frac{x^۲}{y})x-y^۲+(\frac{x^۲}{y})-y+۱=۰$$

وقتی $x\to۰$ میل می‌کند داریم $y\to۰$ و $\frac{x^۲}{y}\to۲\rho$ در نتیجه:

$$(۲\rho)\times۰-۰+(۲\rho)\times۰-۰+(۲\rho)-۰+۱=۰ \Rightarrow ۲\rho+۱=۰ \Rightarrow \rho=-\frac{۱}{۲}$$

البته با محاسبه‌ی قدرمطلق این عدد، شعاع انحنا برابر با $\rho=\frac{۱}{۲}$ خواهد بود.

۳۸ـ گزینه «۳» مطابق متن درس، مقدار انتگرال این میدان برداری روی هر مسیر بسته هموار که شامل مبدأ باشد، 2π خواهد بود. اما حل کامل‌تر آن چنین است:

میدان $\vec{F}=\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i}$ پایستار است.

پس می‌توانیم به جای منحنی C هر مسیر بسته و هموار که شامل مبدأ باشد در نظر بگیریم. روی دایره‌ی واحد داریم: $0\le\theta\le 2\pi$، $x=\cos\theta$ ، $y=\sin\theta$. با جایگذاری این عبارات و محاسبه‌ی dx و dy داریم:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\cos\theta-\sin\theta(-\sin\theta)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

◆◆◆◆

۳۹ـ گزینه «۱» با جایگذاری $z=x+iy$ داریم $\bar{z}=x-iy$ در نتیجه:

$$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{x-iy}=\frac{(x+iy)}{(x-iy)(x+iy)}=\frac{x+iy}{x^2+y^2}\Rightarrow \mathrm{Re}(\frac{1}{\bar{z}})=\frac{x}{x^2+y^2}\Rightarrow \mathrm{Re}(\frac{1}{\bar{z}}+1)=\frac{x}{x^2+y^2}+1$$

با جایگذاری در نامساوی داده شده داریم:

$$\frac{x}{x^2+y^2}+1\le 2\Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}\le 1\Rightarrow x\le x^2+y^2$$

منحنی $x^2+y^2=x$ دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و قطر ۱ یعنی شعاع $\frac{1}{2}$ است. نامعادله‌ی $x\le x^2+y^2$ خارج از این دایره را نشان می‌دهد. برای اطمینان بیشتر می‌توانیم فرم استاندارد معادله‌ی دایره را ایجاد کنیم:

$$x^2+y^2-x\ge 0\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+y^2\ge\frac{1}{4}$$

◆◆◆◆

۴۰ـ گزینه «۲» از صورت سؤال معلوم است که مجانب مایل را می‌خواهیم (البته با توجه به آن‌که ضریب y^3 و ضریب x^3 ثابت هستند و صفر نمی‌شوند متوجه می‌شویم این منحنی مجانب افقی و قائم ندارد).

فرض کنیم مجانب مایل خط $y=ax+b$ باشد. پس داریم:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}\ ,\ b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)$$

با تقسیم جملات بر x^3 سعی می‌کنیم مقدار حد $\frac{y}{x}$ را به دست آوریم:

$$x^3+y^3=6xy\Rightarrow 1+(\frac{y}{x})^3=\frac{6y}{x^2}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}[1+(\frac{y}{x})^3]=\lim_{x\to\infty}6(\frac{y}{x})\frac{1}{x^2}\Rightarrow 1+a^3=\frac{6a}{\infty}\Rightarrow 1+a^3=0\Rightarrow a=-1$$

حالا عرض از مبدأ را حساب می‌کنیم. فرض کنیم $y=-x+b$ معادله‌ی مجانب مایل باشد.

در این صورت باید وقتی $x\to\infty$ میل می‌کند داشته باشیم $y\sim -x+b$ با جایگذاری در معادله داریم:

$$x^3+(-x+b)^3\simeq 6x(-x+b)\Rightarrow 3bx^2-3b^2x+b^3\simeq -6x^2+6bx\ ,\ (x\to\infty)$$

وقتی $x\to\infty$ میل می‌کند، از هر چند جمله‌ای، بزرگترین درجه‌اش باقی می‌ماند؛ پس داریم: $3bx^2=-6x^2$ در نتیجه $3b=-6$ پس $b=-2$.

◆◆◆◆

۴۱ـ گزینه «۱» از تغییر متغیر $x=\mathrm{tg}\theta$ استفاده می‌کنیم.

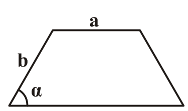
$$dx=(1+\mathrm{tg}^2\theta)d\theta\ \ ,\ \ x=0\Rightarrow\theta=0\ \ ,\ \ x=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\mathrm{tg}^2\theta)}{(1+\mathrm{tg}^2\theta)^2}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})=\frac{\pi+2}{8}$$

◆◆◆◆

۴۲ـ گزینه «۲» ذوزنقه داده شده را به این صورت در نظر می‌گیریم. طول قاعده‌ی بزرگتر برابر است با $a+2b\cos\alpha$ و ارتفاع آن $b\sin\alpha$ است. در نتیجه:



مساحت ذوزنقه $S=\frac{1}{2}(a+a+2b\cos\alpha)\times b\sin\alpha=K$ (*)

محیط ذوزنقه $P=a+2b+a+2b\cos\alpha=2a+2b\cos\alpha+2b$ (**)

از رابطه (*) داریم:

$$2a+2b\cos\alpha=\frac{2K}{b\sin\alpha}$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (**) داریم:

$$P=\frac{2K}{b\sin\alpha}+2b$$

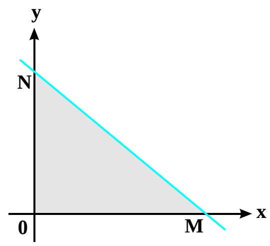
توجه کنید که k و α ثابت هستند. برای داشتن ذوزنقه با محیط کمینه از رابطه فوق نسبت به b مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{dP}{db}=0\Rightarrow -\frac{2K}{b^2\sin\alpha}+2=0\Rightarrow b^2\sin\alpha=K\Rightarrow b=\sqrt{\frac{K}{\sin\alpha}}$$

◆◆◆◆

۴۳ـ گزینه «۱» منحنی‌هایی که در یک صفحه قرار داشته باشند، دارای تابی برابر با صفر هستند. در این سؤال هم با توجه به اینکه متحرک بر روی صفحه ثابت حرکت می‌کند بنابراین هیچ‌گونه تابی نخواهد داشت و گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۴۴ـ گزینه «۴»



روش اول: دقت کنید می‌خواهیم $S=\frac{1}{2}MN$ مینیمم باشد، یعنی MN مینیمم باشد. با توجه به داده‌های صورت سؤال معادله‌ی خط که دو نقطه M و N را به هم وصل می‌کند، می‌خواهیم ابتدا شیب خط را حساب می‌کنیم:

$$\text{شیب خط}=\frac{N-0}{0-M}=-\frac{N}{M}$$

بنابراین داریم:

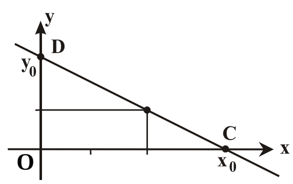
$$y-0=-\frac{N}{M}(x-M)\Rightarrow y=-\frac{N}{M}x+N\xrightarrow{\text{طرفین را بر N تقسیم می‌کنیم}}\frac{y}{N}+\frac{x}{M}=1$$

چون خط از نقطه‌ی (۲,۱) عبور می‌کند، لذا داریم:

$$\frac{2}{M}+\frac{1}{N}=1$$

چون مجموع دو عدد $\frac{1}{N}$ و $\frac{2}{M}$ ماکزیمم است، پس حاصل ضرب آن‌ها یعنی $\frac{2}{MN}$ وقتی ماکزیمم است که دو عدد با هم برابر شود.

$$\frac{2}{M}=\frac{1}{N}\xrightarrow{\text{در معادله قرار می‌دهیم}}\frac{1}{N}+\frac{1}{N}=1\Rightarrow N=2\ ,\ M=4$$



روش دوم: نمودار خط موردنظر به صورت زیر است:

$$OCD\ \text{مساحت}:\ \frac{x_0\times y_0}{2}\qquad (*)$$

$$CD\ \text{معادله خط}:\ y-1=m(x-2),m=\frac{1-0}{2-x_0}=\frac{1}{2-x_0}$$

$$y-1=\frac{1}{2-x_0}(x-2)\Rightarrow x=0\Rightarrow y_0-1=\frac{1}{2-x_0}(0-2)\Rightarrow y_0=\frac{2}{x_0-2}+1$$

$$y_0=\frac{2+x_0-2}{x_0-2}=\frac{x_0}{x_0-2}\qquad (**)$$

با جایگذاری رابطه (**) در (*) مساحت مستطیل به این صورت به دست می‌آید:

$$S=\frac{x_0^2}{2x_0-4}$$

برای داشتن مساحت مینیمم باید:

$$S'=0\Rightarrow\frac{2x_0(2x_0-4)-2x_0^2}{(2x_0-4)^2}=0\Rightarrow 4x_0^2-8x_0-2x_0^2=0\Rightarrow 2x_0^2-8x_0=0\Rightarrow 2x_0(x-4)=0$$

$$\Rightarrow x_0=4\Rightarrow m=\frac{1}{2-4}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین معادله خط موردنظر برابر است با:

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+2\Rightarrow\frac{y}{2}+\frac{x}{4}=1$$

روش سوم: گزینه‌ها به‌طور ناشیانه طرح شده‌اند! مختصات نقطه‌ی (۲,۱) فقط در گزینه (۴) صدق می‌کند!!

۴۵ـ گزینه «۴» دو خط داده شده متنافر هستند، بنابراین بردار نرمال صفحه موردنظر برابر است با حاصلضرب خارجی بردارهای هادی دو خط، لذا:

$$L_1:\begin{cases}x=1\\y=t+1\\z=-t-1\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_1=(0,1,-1)$$

$$L_2:\begin{cases}x+2z=2\\y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2z+2\\y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{-2}=\frac{z-1}{1}\\y=2\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_2=(-2,0,1)$$

بنابراین بردار نرمال صفحه برابر است با:

$$\vec{n}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&-1\\-2&0&1\end{vmatrix}=(1,2,2)$$

بنابراین معادله صفحه برابر است با:

$$x+2y+2z=d$$

خط L_1 از نقطه‌ی $p_1(1,1,-1)$ و خط L_2 از نقطه‌ی $p_2(0,2,1)$ عبور می‌کند. برای اینکه صفحه فوق دارای فاصله مساوی از دو خط باشد باید فاصله آن از دو نقطه p_1 و p_2 روی دو خط یکسان باشد، با یادآوری فرمول فاصله یک صفحه از نقطه‌ی p_0 داریم: لذا:

$$p_\circ \text{ فاصله صفحه از نقطه } = \frac{|ax_\circ + by_\circ + cz_\circ - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \vec{u} = (a,b,c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 \text{ فاصه صفحه از نقطه } = \dfrac{|(1\times 1)|+(2\times 1)+(2\times -1)-d|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{|1-d|}{3} \\ p_2 \text{ فاصله صفحه از نقطه } = \dfrac{|(1\times 0)+(2\times 2)+(2\times 1)-d|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{|6-d|}{3} \end{cases}$$

از تساوی دو عبارت فوق داریم:

$$\frac{|1-d|}{3} = \frac{|6-d|}{3} \Rightarrow 1-d = \pm(6-d) \Rightarrow \begin{cases} 1-d = 6-d \quad \text{غ.ق.} \\ 1-d = -(6-d) \Rightarrow 1-d = -6+d \Rightarrow d = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

بنابراین معادله صفحه برابر است با:

$$x+2y+2z = \frac{7}{2} = \frac{63}{18}$$

۴۶ـ گزینه «۲»

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \sinh \mathrm{Ln}3 = \frac{e^{\mathrm{Ln}3} - e^{-\mathrm{Ln}3}}{2} = \frac{3-\frac{1}{3}}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

با جایگذاری این مقدار در رابطه داده شده داریم:

$$\cos(\pi \sinh \mathrm{Ln}3) = \cos(\pi \times \frac{4}{3}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

۴۷ـ گزینه «۴» ابتدا معادله فصل مشترک دو صفحه را بدست می‌آوریم. بردار هادی فصل مشترک از حاصلضرب خارجی بردار نرمال‌های دو صفحه بدست می‌آید:

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-5,-10,-5) \Rightarrow \vec{u} = -5(1,2,1)$$

برای بدست آوردن یک نقطه از خط کافیست $z=0$ قرار داده و از روابط مربوط به دو صفحه دو مختصه دیگر x و y را بدست آوریم:

$$\begin{cases} 2x+y=16 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Rightarrow p_\circ = (6,4,0)$$

بنابراین معادله‌ی خطی که فصل مشترک دو صفحه است، چنین خواهد بود:

$$\frac{x-6}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-0}{1}$$

فاصله نقطه (۲- و ۱و ۴) از این خط برابر است با:

$$d = \frac{|\overrightarrow{p_1p_\circ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

$$\overrightarrow{p_1p_\circ} = (6-4, 4-1, 0+2) = (2,3,2), \vec{u} = (1,2,1) \Rightarrow d = \frac{|(2,3,2)\times(1,2,1)|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|(-1,0,-1)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۴۸ـ گزینه «۴» با مرتب‌کردن جملات و استفاده از ویژگی‌های لگاریتم؛ خواهیم دید که این سری یک سری تلسکوپی است:

$$\mathrm{Ln}(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}) = \mathrm{Ln}(n) + \mathrm{Ln}(n+2) - 2\mathrm{Ln}(n+1) = \mathrm{Ln}(n) - \mathrm{Ln}(n+1) + \mathrm{Ln}(n+2) - \mathrm{Ln}(n+1) = \underbrace{\mathrm{Ln}(\frac{n}{n+1})}_{A_n} - \underbrace{\mathrm{Ln}(\frac{n+1}{n+2})}_{A_{n+1}}$$

حالا از فرمول محاسبه‌ی مقدار سری تلسکوپی استفاده می‌کنیم:

$$\text{حاصل سری} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n - A_{n+1} = A_1 - \lim_{n\to\infty} A_{n+1} = \mathrm{Ln}(\frac{1}{2}) - \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ln}(\frac{n+1}{n+2}) = \mathrm{Ln}(\frac{1}{2}) - \mathrm{Ln}(1) = \mathrm{Ln}(\frac{1}{2})$$

۴۹ـ گزینه «۱»

روش اول: چند جمله‌ای $p(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$ دارای درجه فرد است. به همین دلیل $\lim_{x\to\infty} p(x)$ و $\lim_{x\to -\infty} p(x)$ مختلف‌العلامه هستند. بنابراین $p(x)$ حداقل یک ریشه حقیقی دارد. به بیان دقیق‌تر می‌توانیم دو عدد پیدا کنیم که $p(x)$ در آن‌ها تغییر علامت داده باشد. مثلاً $p(1) = 3 > 0$ و $p(0) = -5 < 0$ از طرفی $p'(x) = 13x^{12} + 21x^2$ پس برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $p'(x) \geq 0$ و با دقت بیش‌تر متوجه می‌شویم که $p'(x)$ فقط در $x=0$ مقدار صفر دارد و برای هر $x \neq 0$ داریم $p'(x) > 0$. بنابراین $p(x)$ تابعی اکیداً صعودی است. هر تابع اکیداً صعودی حداکثر یک ریشه دارد. می‌توان نتیجه گرفت که $p(x)$ یک و فقط یک ریشه حقیقی دارد. در پایان با مقایسه علامت‌های $p(\infty)$ و $p(0)$ و $p(-\infty)$ متوجه می‌شویم که $p(0) < 0$ و $p(\infty) > 0$ بنابراین تنها ریشه‌ی $p(x)$ در ناحیه‌ی $0 < x < \infty$ قرار دارد.

روش دوم: اگر تعداد تغییر علامت‌ها در ضرایب $p(x)$ وقتی در فرم استاندارد مرتب شده باشد را k بنامیم تعداد ریشه‌های مثبت k یا $k-2$ یا $k-4$ ... است. در این مثال داریم $p(x)=x^{13}+7x^{3}-5$ پس ضرایب عبارتند از $(+1, 0, +7, 0, -5)$ فقط یک‌بار تغییر علامت داریم: $k=1$ است پس تعداد ریشه‌های مثبت برابر است با یک ریشه.

همین استدلال را برای $p(-x)$ به‌کار می‌گیریم تعداد ریشه‌های منفی معلوم می‌شود. $p(-x)=-x^{13}-7x^{3}-5$ دنباله ضرایب $(-1, 0, -7, 0, -5)$ است. تغییر علامت نداریم پس ریشه منفی وجود ندارد.

۵۰ـ گزینه «۱» فرض کنیم $\vec{A}=(1,1,\cdots,1)$ و $\vec{B}=(1,2,\cdots,n)$ و θ زاویه بین این بردارها باشد. داریم:

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{1^2+1^2+\cdots+1^2}\sqrt{1^2+2^2+\cdots+n^2}}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}$$

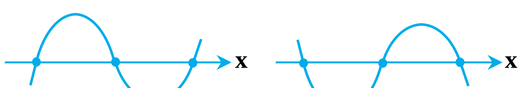
هرگاه $n\to\infty$، با استفاده از قانون بزرگ‌ترین درجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\theta)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n)}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{n(n)(2n)}{6}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^2}{\sqrt{\frac{2}{6}n^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}\theta=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$$

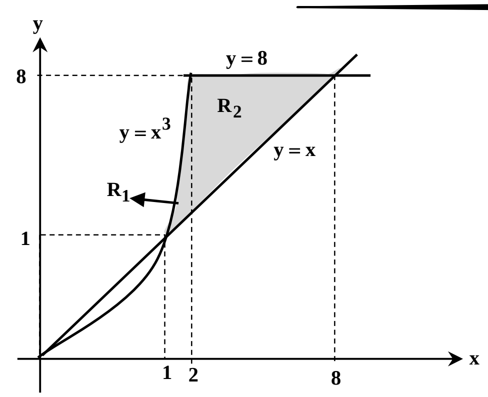
۵۱ـ گزینه «۳» برای آن‌که یک تابع درجه ۳ بتواند سه ریشه متمایز داشته باشد لازم است مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی f مختلف‌العلامه باشند.



ابتدا محل اکسترمم‌های نسبی f را بیابیم: $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$

پس $x=0$ و $x=2$ طول نقاط بحرانی f هستند. $f(0)=k$ و $f(2)=k-4$ باید داشته باشیم $f(0)f(2)<0$ پس $k(k-4)<0$.
اگر $k>4$ باشد هر دوی آن‌ها مثبت می‌شوند. اگر $k<0$ باشد هر دوی آن‌ها منفی می‌شوند. اما برای $0<k<4$ مقادیر $f(0)$ و $f(2)$ مختلف‌العلامه خواهند بود.

۵۲ـ گزینه «۳» با توجه به حدود انتگرال‌های داده شده، خط $y=x$، منحنی $y=x^3$ را رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو نمودار در $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ قرار دارند. در اولین انتگرال داریم $0\le x\le 1$ و حدود y از پایین به بالا به صورت $y=x^3$ و $y=x$ داده شده‌اند. این ناحیه را R_1 می‌نامیم. در انتگرال دوم داریم $2\le x\le 8$ و حدود y به صورت $y=x$ و $y=8$ نوشته شده‌اند که ما این ناحیه را R_2 می‌نامیم.



حالا فرض می‌کنیم $R=R_1\cup R_2$ باشد. با ترتیب $dxdy$ حدود انتگرال را می‌نویسیم. کمترین و بیشترین مقدار به صورت $y=1$ و $y=8$ به دست می‌آیند. با حرکت از چپ به راست؛ می‌بینیم که $x=\sqrt[3]{y}$ (یعنی همان $y=x^3$) مرز ورودی و $x=y$ مرز خروجی است.

$$I=\int_1^8\int_{\sqrt[3]{y}}^{y}f(x,y)\,dx\,dy$$

۵۳ـ گزینه «۱» بردار نرمال صفحه مماس بر هر رویه، در هر نقطه از آن، برابر است با گرادیان آن رویه. رویه‌های داده شده را با f و g نشان می‌دهیم:

$$f=x^2+(y-1)^2+z^2-1=0\Rightarrow\vec{\nabla}f=(2x,2(y-1),2z)$$

$$g=(x-c)^2+y^2+z^2-3=0\Rightarrow\vec{\nabla}g=(2(x-C),2y,2z)$$

برای آن‌که صفحات مماس بر دو رویه، بر هم عمود باشند، شرط لازم و کافی آن است که بردارهای گرادیان بر هم عمود باشند یعنی:

$$\vec{\nabla}f.\vec{\nabla}g=0\Rightarrow 4x(x-C)+4y(y-1)+4z^2=0\Rightarrow 4[x^2+y^2+z^2-Cx-y]=0\Rightarrow x^2+y^2+z^2=y+Cx\qquad(1)$$

اکنون به این مطلب دقت می‌کنیم که نقطه‌ی (x,y,z) محل تلاقی رویه‌ای f و g است. از معادلات f و g داریم:

$$\begin{cases}f:x^2+y^2+z^2=2y\\ y:x^2+y^2+z^2=-2Cx-C^2+3\end{cases}$$

و از معادله‌ی (۱) داریم:

$$x^2+y^2+z^2=y+Cx$$

بنابراین به تساوی‌های روبه‌رو می‌رسیم:

$$2y=2Cx-C^2+3=y+Cx$$

از این تساوی‌ها داریم $(2y=y+Cx\Rightarrow y=Cx)$ در نتیجه:

$$2Cx-C^2+3=2Cx\Rightarrow C^2=3\Rightarrow C=\pm\sqrt{3}$$

۵۴ـ گزینه «۳» برداری که در امتداد زاویه‌ی $\theta=\frac{2\pi}{3}$ قرار دارد و یکه هم هست به این صورت نوشته می‌شود:

$$\vec{A}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j} \Rightarrow \vec{A}=\cos(\frac{2\pi}{3})\vec{i}+\sin(\frac{2\pi}{3})\vec{j}=-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

بردار گرادیان f را هم در نقطه‌ی $(1,-1)$ تعیین می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}f=(-ye^{-xy},-xe^{-xy})=(e,-e) \Rightarrow \vec{\nabla}f=e\vec{i}-e\vec{j}$$

بنابراین مشتق سوئی در این جهت برابر است با:

$$D_{\vec{A}}f=\frac{\vec{\nabla}f.\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{-\frac{1}{2}e-\frac{\sqrt{3}}{2}e}{1}=-\frac{1}{2}e(1+\sqrt{3})$$

۵۵ـ گزینه «۴» از معادله‌ی $(z+1)^5+z^5=0$ معلوم است که $(z+1)^5=-z^5$. پس: $|z+1|^5=|-z|^5$.

با فرض $z=x+iy$ خواهیم داشت:

$$|z+1|=|z| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow (x+1)^2+y^2=x^2+y^2 \Rightarrow (x+1)^2=x^2$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=x^2 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

پس همه‌ی جواب‌های این معادله روی خط $x=-\frac{1}{2}$ قرار دارند.

۵۶ـ گزینه «۳» از آنجا که صفحه‌ی مماس بر خط داده شده عمود است، پس بردار نرمال صفحه‌ی مماس با بردار هادی خط داده شده موازی است:

بردار نرمال صفحه‌ی مماس: $z=x^3y^2 \Rightarrow f(x,y,z)=x^3y^2-z \Rightarrow \vec{n}=(f_x,f_y,f_z)=(3x^2y^2,2x^3y,-1)$

بردار هادی خط: $\vec{a}=(-3,4,1)$

چون $\vec{a}$ با $\vec{n}$ موازی است، پس داریم:

$$\frac{3x^2y^2}{-3}=\frac{2x^3y}{4}=\frac{-1}{1}$$

$$\Rightarrow -x^2y^2=-1\ ,\ \frac{1}{2}x^3y=-1 \Rightarrow x^2y^2=1\ ,\ x^3y=-2 \Rightarrow y=\frac{-2}{x^3}\ ,\ x^2y^2=1$$

$$\Rightarrow x^2(\frac{-2}{x^3})^2=1 \Rightarrow \frac{4}{x^4}=1 \Rightarrow x^4=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{4}=\pm\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \text{if}\ \ x=\sqrt{2} \Rightarrow y=\frac{-2}{(\sqrt{2})^3}=\frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \text{if}\ \ x=-\sqrt{2} \Rightarrow y=\frac{-2}{(-\sqrt{2})^3}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2},\frac{-\sqrt{2}}{2})\ ,\ (-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$$

۵۷ـ گزینه «۱» با توجه به خاصیت خطی بودن انتگرال داریم:

$$\int_0^1(f'(x)-xf''(x))dx=\int_0^1 f'(x)dx-\int_0^1 xf''(x)dx=f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf''(x)dx=f(1)-f(0)-\int_0^1 xf''(x)dx$$

برای محاسبه‌ی $\int_0^1 xf''(x)dx$ از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=u \Rightarrow du=dx \\ f''(x)dx=dv \Rightarrow v=f'(x) \end{cases} \Rightarrow \int xf''(x)dx=xf'(x)-\int f'(x)dx=xf'(x)-f(x)$$

$$\int_0^1 xf''(x)dx=xf'(x)-f(x)\Big|_0^1=f'(1)-f(1)-(0-f(0))=f'(1)-(f(1)-f(0))$$

$$\Rightarrow 1=\int_0^1(f'(x)-xf''(x))dx=f(1)-f(0)-f'(1)+(f(1)-f(0)) \Rightarrow 2(f(1)-f(0))-1=1 \Rightarrow f(1)-f(0)=1$$

۵۸ـ گزینه «۳» تابع زیر انتگرال را به این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}=\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\times\frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{1}{\cos^2 x}=tg^3x\ \sec^2x\ \sec^2x$$

حالا از این مطلب استفاده می‌کنیم که $\sec^2x$ مشتق tgx است. همچنین $\sec^2x=1+tg^2x$:

$$(u=tgx, du=\sec^2 x\,dx) \Rightarrow \int tg^3x(1+tg^2x)\sec^2 x\,dx=\int(tg^3x+tg^5x)\sec^2 x\,dx=\int(u^3+u^5)du$$

$$=\frac{u^4}{4}+\frac{u^6}{6}+c=\frac{1}{4}tg^4x+\frac{1}{6}tg^6x+c$$

با جایگذاری حدود انتگرال معین داریم:

$$I=[\frac{1}{4}tg^4x+\frac{1}{6}tg^6x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

۵۹ـ گزینه «۲» می‌دانیم که $1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$، از طرفی $z=e^{\frac{2\pi i}{5}} \Rightarrow z^5=e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$، در نتیجه با بازنویسی عبارت داده شده به صورت مقابل داریم:

$$(1+z+z^2+z^3+z^4)+4z^4(1+z+z^2+z^3+z^4)+5z^9=\frac{1-z^5}{1-z}+4z^4\left(\frac{1-z^5}{1-z}\right)+5z^9$$

$$=\frac{1-1}{1-z}+4z^4\left(\frac{1-1}{1-z}\right)+5z^5z^4=5(1)z^4=5z^4=5e^{\frac{8\pi i}{5}}=5e^{(\pi+\frac{3\pi}{5})i}=-5e^{\frac{3\pi i}{5}}$$

توجه کنید که $e^{i\pi}=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1$ است.

۶۰ـ گزینه «۱» مطابق با صورت سؤال S تمام سطح اطراف یک ناحیه است. بنابراین S یک سطح بسته است. با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس داریم:

$$\vec{F}=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}+F_3\vec{k}$$

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iiint_T \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint_T\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dv=\iiint_T(2x+2+8z)\,dv$$

انتگرال را در دستگاه استوانه‌ای حل می‌کنیم:

$$I=\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^2(2r\cos\theta+2+8z)r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$=\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{16}{3}\cos\theta+4+16z\right)d\theta\,dz=2\pi\int_0^2(4+16z)\,dz=2\pi(4z+8z^2)\Big|_0^2=2\pi(8+32)-0=80\pi$$

۶۱ـ گزینه «۱» ابتدا سعی می‌کنیم حد داده شده را به فرم‌های مبهم آشنا تبدیل کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+2)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n n^{\frac{1}{n}}$$

حد فوق از دو صورت مبهم 1^∞ و ∞^0 تشکیل شده است. برای محاسبه هر یک از این حدود داریم:

$$\left.\begin{array}{l}L_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{n}{n+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{-2}{n+2}\right)}=e^{-2}\\ L_2=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\Rightarrow \operatorname{Ln}L_2=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Ln}n^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Ln}n}{n}=0\Rightarrow L_2=1\end{array}\right\}\Rightarrow L=L_1\times L_2=e^{-2}$$

۶۲ـ گزینه «۴» ابتدا مجموع مورد نظر را به صورت سیگما بازنویسی می‌کنیم. سپس داریم:

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، حد فوق یک مجموع ریمان است که با تعریف $f(\frac{k}{n})=\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ خواهیم داشت:

$$S=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\operatorname{Ln}(1+x)\Big|_0^1=\operatorname{Ln}2$$

۶۳ـ گزینه «۲» با توجه به این که مخرج x^3 است، در هنگام استفاده از هم‌ارزی در صورت، فقط جملات دارای توان x حداکثر ۳ را می‌نویسیم:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x+ax+bx^3}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{(3x-\frac{(3x)^3}{3!})+ax+bx^3}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{(b-\frac{9}{2})x^3+(a+3)x}{x^3}$$

برای آن‌که حد فوق موجود باشد، باید ضریب x در صورت صفر باشد، یعنی: $a+3=0 \Rightarrow a=-3$

در این حالت حد داده شده برابر است با $(b-\frac{9}{2})$ که طبق گفته سؤال برابر صفر است. پس: $b=\frac{9}{2}$

۶۴ـ گزینه «۴» بردار نرمال صفحه بوسان، همان بردار $\vec{B}$ (بردار دوم) است که این بردار موازی $\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)$ است. در نتیجه داریم:

$$\vec{R}(t)=(e^t,e^{-t},t)\xrightarrow{(1,1,0)}t=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{R}'(t)=(e^t,-e^{-t},1)\xrightarrow{t=0}\vec{R}'(0)=(1,-1,1)\\ \vec{R}''(t)=(e^t,e^{-t},0)\xrightarrow{t=0}\vec{R}''(0)=(1,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{R}'(0)\times\vec{R}''(0)=(-1,1,2)$$

در بین گزینه‌ها فقط گزینه (۴) دارای بردار نرمال موازی این بردار است.

۶۵- گزینه «۱» با توجه به این‌که در معادله بازگشتی داده شده همه ضرایب عدد ثابت است، بهتر است از تشکیل معادله مشخصه استفاده کنیم:

$$x_{n+2}-x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \lambda_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \lambda_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_n=c_1(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^n+c_2(\frac{1-\sqrt{3}}{2})^n$$

$$x_0=c_1+c_2>0 \quad , \quad x_1=c_1(\frac{1+\sqrt{3}}{2})+c_2(\frac{1-\sqrt{3}}{2})>0$$

با توجه به ریشه‌های معادله، چون $\lambda_1>1$ است، در صورتی که $c_1\neq 0$ دنباله واگرا خواهد بود. حال اگر فرض کنیم این ضریب صفر باشد، خواهیم داشت:

$$x_0=c_2>0 \Rightarrow x_1=c_2(\frac{1-\sqrt{3}}{2})<0$$

که این نتیجه با فرض سؤال مغایر است. پس $c_1\neq 0$ و دنباله واگراست، زیرا:

$$x_n=c_1(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^n+c_2(\frac{1-\sqrt{3}}{2})^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}c_1(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^n$$

این حد بی‌نهایت است ولی در مورد علامت آن باید علامت c_1 را بررسی کنیم. این ضریب بزرگتر از صفر است زیرا با فرض $c_1<0$ خواهیم داشت:

$$x_0=c_1+c_2>0 \xrightarrow{c_1<0} c_2>|c_1|>0 \Rightarrow x_1=c_1(\frac{1+\sqrt{3}}{2})+c_2(\frac{1-\sqrt{3}}{2})<0$$

پس داریم:

$$L=\lim_{n\to\infty}c_1(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^n \overset{c_1>0}{=\!=} +\infty$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۶- گزینه «۳» با توجه به این‌که جملات هر دو سری همواره مثبت هستند، برای بررسی همگرایی آنها از آزمون خارج قسمت استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-\ln 2}{n^2}\sqrt[n]{2}}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}(\ln 2\sqrt[n]{2})=\ln 2>0$$

با توجه به نتیجه این حد، سری A از نظر همگرایی مانند سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ است، یعنی واگراست.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\frac{0}{0}\approx\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{6\sqrt{n^3}})}{n^{-\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{-\frac{3}{2}}}{6}}{n^{-\frac{3}{2}}}=\frac{1}{6}>0$$

با توجه به نتیجه این حد، سری B از نظر همگرایی مانند سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ است، یعنی همگراست.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۷- گزینه «۲» برای حل این حد از تغییر متغیر $\frac{1}{x}=n$ استفاده می‌کنیم:

$$x\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x}\to\infty \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right]\approx\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^2(1+2+3+\cdots+\left[\frac{1}{x}\right])\approx\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۸- گزینه «۴»

$$x^3-x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-1)(x^2-4)=(x-1)(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=-1, x=1, x=2$$

طول‌های به دست آمده کاندیدای مجانب قائم هستند. ولی صورت در همسایگی $x=1$ تعریف نشده است، پس از آنجایی که مقدار صورت تابع در دو نقطه دیگر تعریف شده و مخالف صفر است، با اطمینان می‌توان گفت که تابع، ۲ مجانب قائم دارد. از طرفی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^6-3x+1}}{x^3-x^2-4x+4}\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^6}}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x^3|}{x^3}\Rightarrow\begin{cases}x\to\infty\Rightarrow y\to 1\\ x\to-\infty\Rightarrow y\to -1\end{cases}$$

بنابراین دو مجانب افقی هم داریم.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۹- گزینه «۱»

روش اول: با یک سؤال بسیار جالب از کاربرد قضیه رول روبرو هستیم. ابتدا از تابع داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}$$

حالا ادعا می‌کنیم که این تابع مشتق، حداکثر یک ریشه دارد. زیرا:

$$f''(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}>0$$

حتماً می‌پرسید این تساوی را چطور ثابت کنیم. خب داریم:

$$f'''(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$$

دوباره ادعا می‌کنیم که این تابع حداکثر یک ریشه دارد. زیرا: $f^{(4)}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}>0$

نامساوی اخیر بدیهی است، زیرا $\Delta<0$ و ضریب x^2 بزرگتر از صفر است. حالا گام به گام به عقب برمی‌گردیم:

با توجه به این که مشتق مرتبه ۴ همواره بزرگتر از صفر است، مشتق سوم (چون از درجه فرد است) دقیقاً یک ریشه دارد. این ریشه را x_0 می‌نامیم. برای مشتق دوم تابع، ادعا کردیم که حداکثر یک ریشه دارد، زیرا تا به حال اثبات کردیم مشتق سوم تنها در یک نقطه صفر است. با توجه به این‌که مشتق چهارم (که معادل مشتق دوم تابع $f''(x)$ است) همواره بزرگتر از صفر است، این نقطه حتماً مینیمم نسبی است. حالا ثابت می‌کنیم که مقدار $f''(x)$ در این نقطه نیز بالای $y=0$ قرار دارد.

$$f''(x_0)=\underbrace{1+x_0+\frac{x_0^2}{2!}+\frac{x_0^3}{3!}}_{f'''(x_0)}+\frac{x_0^4}{4!}=0+\frac{x_0^4}{4!}\xrightarrow{x_0\neq 0}f''(x_0)>0\xrightarrow{f''(x_0)=\min f''(x)}f''(x)>0$$

پس تا الان ثابت کردیم که مشتق دوم همواره بزرگتر از صفر است. حالا می‌توان ادعا کرد که مشتق اول که از درجه فرد است، فقط یک ریشه دارد. حالا به تابع اولیه می‌رسیم. مشتق اول فقط یک ریشه دارد و با فرض این که این ریشه x_1 باشد، چون مشتق دوم همواره بزرگتر از صفر است، این نقطه حتماً مینیمم نسبی است. حالا ثابت می‌کنیم که مقدار تابع در این نقطه بالای محور $y=0$ قرار دارد.

$$f(x_1)=\underbrace{1+x_1+\frac{x_1^2}{2!}+\frac{x_1^3}{3!}+\frac{x_1^4}{4!}+\frac{x_1^5}{5!}}_{f'(x_1)}+\frac{x_1^6}{6!}=0+\frac{x_1^6}{6!}\xrightarrow{x_1\neq 0}f(x_1)>0\xrightarrow{f(x_1)=\min f(x)}f(x)>0$$

پس تابع y همواره از صفر بزرگتر است، یعنی ریشه‌ای ندارد.

روش دوم: برای به دست آوردن تعداد ریشه‌های معادله از نتیجه قضیه رول استفاده می‌کنیم و با استفاده از مشتق تابع، یکنوا یا غیریکنوا بودن $f(x)$ را بررسی کنیم.

$$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^5}{5!}\Rightarrow f(x)=f'(x)+\frac{x^6}{6!}$$

با توجه به این که $f'(x)$ یک چند جمله‌ای درجه‌ی ۵ می‌باشد، پس حداکثر می‌تواند دارای ۵ ریشه باشد.

اگر ریشه‌های $f'(x)$ را α_i در نظر بگیریم، پس $f'(\alpha_i)=0$ می‌باشد. اگر دو ریشه‌ی متوالی $f'(x)$ را α_1 و α_2 در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{cases}f(\alpha_1)=f'(\alpha_1)+\dfrac{\alpha_1^6}{6!}=0+\dfrac{\alpha_1^6}{6!}>0\\[2mm] f(\alpha_2)=f'(\alpha_2)+\dfrac{\alpha_2^6}{6!}=0+\dfrac{\alpha_2^6}{6!}>0\end{cases}\Rightarrow f(\alpha_1)f(\alpha_2)>0$$

پس تابع $f(x)$ بین دو ریشه‌ی α_1 و α_2 ریشه ندارد و با توجه به این که $f(+\infty)=+\infty$ و $f(-\infty)=+\infty$ و $f(x)$ به ازای هر ریشه‌ی α_i مثبت می‌باشد. تابع $f(x)$ اکیداً یکنواست و در نتیجه $f(x)$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۷۰- گزینه «۳» ابتدا توجه داشته باشید که داده سؤال به معنی این است که: $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

حالا با استفاده از آزمون ریشه برای سری جدید خواهیم داشت: $\frac{1}{R'}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}a_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^n}}\sqrt[n]{a_n^2}\approx\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{e}}{n}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)^2=\frac{1}{eR^2}\Rightarrow R'=eR^2$

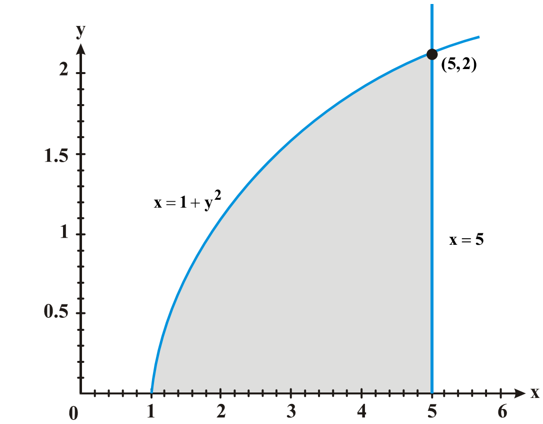
۷۱- گزینه «۲» کافیست تابع حجم و مساحت یک استوانه به شعاع r و ارتفاع h را نوشته، و مطابق داده مسأله پیش برویم:

$$V=\pi r^2h\quad,\quad S=2\pi rh+2\pi r^2=A$$

در واقع الان با یک مسأله بهینه سازی مشروط روبرو هستیم که به راحتی با استفاده از روش ساده شده لاگرانژ داریم:

$$\frac{V_r}{S_r}=\frac{V_h}{S_h}\Rightarrow\frac{2\pi rh}{2\pi h+4\pi r}=\frac{\pi r^2}{2\pi r}\Rightarrow 4\pi^2r^2h=2\pi^2r^2h+4\pi^2r^3\Rightarrow 2\pi^2r^2h=4\pi^2r^3\xrightarrow{\div 2\pi^2r^2}h=2r\Rightarrow\frac{r}{h}=\frac{1}{2}$$

۷۲- گزینه «۱» با توجه به این‌که انتگرال داده شده به این حالت حل نمی‌شود، باید از تغییر ترتیب انتگرال‌گیری کمک بگیریم. در این حالت بهتر است ناحیه انتگرال‌گیری را رسم کنیم:



$$\left.\begin{matrix}1+y^2\le x\le 5\\ 0\le y\le 2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}0\le y\le\sqrt{x-1}\\ 1\le x\le 5\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow I=\int_0^2\int_{1+y^2}^{5} ye^{(x-1)^2}\,dxdy=\int_1^5\int_0^{\sqrt{x-1}} ye^{(x-1)^2}\,dydx$$

$$=\int_1^5 e^{(x-1)^2}\,\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\sqrt{x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^5 e^{(x-1)^2}(x-1)\,dx=\frac{1}{4}e^{(x-1)^2}\Big|_1^5=\frac{1}{4}(e^{16}-1)$$

۷۳ـ گزینه «۲»

روش اول:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(\sinh^{-1}x-\mathrm{Ln}x-\mathrm{Ln}2)\ \Rightarrow\ \text{می‌دانیم}\ \ \mathrm{Arcsinh}\,x=\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})-\mathrm{Ln}x-\mathrm{Ln}2)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{Ln}(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})-\mathrm{Ln}2}{\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{hop}\frac{\dfrac{\dfrac{\frac{2x\times x}{2\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}}{1+(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})}}{-2x^{-3}}=\frac{\dfrac{\dfrac{(\frac{x^2-x^2-1}{\sqrt{x^2+1}})}{(\frac{x^2}{1})}}{(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})}}{-2x^{-3}}$$

$$=\frac{\dfrac{-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})}}{\dfrac{1}{\frac{-2}{x^3}}}=\frac{\dfrac{\frac{-x^3}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})}}{-2}=\frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{-2(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x})}\xrightarrow{\text{همارزی}}\frac{-\frac{x}{x}}{-2(1+\frac{x}{x})}=\frac{-1}{-2(1+1)}=\frac{+1}{4}$$

روش‌دوم: در این روش، عبارت جلوی Ln را به صورت $\mathrm{Ln}(1+u)$ می‌نویسیم، سپس از همارزی $\mathrm{Ln}(1+u)\simeq u$ استفاده می‌کنیم.

$$\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})-\mathrm{Ln}x-\mathrm{Ln}2=\mathrm{Ln}(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x})=\mathrm{Ln}(\frac{2x+\sqrt{x^2+1}-x}{2x})=\mathrm{Ln}(1+\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{2x})\simeq\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{2x}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{2x}\times\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{(x^2+1)-x^2}{2x(\sqrt{x^2+1}+x)}\simeq\frac{1}{2x(x+x)}=\frac{1}{4x^2}$$

در محاسبات پایانی توجه کنیدکه از همارزی $\sqrt{x^2+1}\simeq x$ استفاده کرده‌ایم که وقتی $x\to+\infty$ میل می‌کند، معتبر است.

حالا به سادگی مقدار حد به دست می‌آید:

$$\text{جواب حد}=\lim_{x\to\infty}x^2(\frac{1}{4x^2})=\frac{1}{4}$$

۷۴ـ گزینه «۲»

روش اول: مسأله را با این فرض که ضابطه‌ی معکوس $\sinh x$ را نمی‌دانیم حل خواهیم کرد.

طبق فرمول مشتق تابع معکوس داریم:

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}\quad,\quad \sinh x=\sqrt{3}\to e^x-e^{-x}=2\sqrt{3}\to e^{2x}-2\sqrt{3}e^x-1=0$$

$$\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12+4}}{2}=e^x\ \Rightarrow e^x=\frac{2\sqrt{3}\pm 4}{2}=\sqrt{3}\pm 2\ \Rightarrow x=\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+2)$$

$$f(x)=\sinh x\to f'(x)=\cosh x\ \Rightarrow f'(a)=\cosh(\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+2))$$

$$f'(a)=\frac{e^{\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+2)}+e^{-\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+2)}}{2}=\frac{(\sqrt{3}+2)+\frac{1}{\sqrt{3}+2}}{2}=2\ \Rightarrow\ (f^{-1})'(b)=\frac{1}{2}$$

روش دوم: ضابطه‌ی معکوس $\sinh x$ را می‌دانیم:

$$f(x)=\sinh x\ \Rightarrow\ f^{-1}(x)=\operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})\ \Rightarrow\ \frac{d}{dx}f^{-1}(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(\sqrt{3})=(\frac{d}{dx}f^{-1})(\sqrt{3})=\frac{1+\frac{2\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{3}+2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+2)}=\frac{1}{2}$$

توضیح: علامت به‌کار رفته در صورت سؤال ایراد علمی دارد. $f^{-1}(\sqrt{3})$ یک عدد ثابت است پس مشتق آن صفر می‌شود یعنی: $\frac{d}{dx}f^{-1}(\sqrt{3})=0$. البته اطمینان داریم که منظور طراح محترم محاسبه‌ی مشتق و سپس جایگذاری $x=\sqrt{3}$ بوده است. به همین دلیل نماد صحیح برای این سؤال به صورت $(\frac{df^{-1}}{dx})(\sqrt{3})$ نوشته می‌شود. همچنین می‌توانستند از علامت $(f^{-1})'(\sqrt{3})$ استفاده کنند.

۷۵ـ گزینه «۱» با تغییر متغیر مناسب هر دو انتگرال را به صورت $\int_a^b e^{t^2}dt$ می‌نویسیم:

$$\int_{-4}^{-5}e^{(x+5)^2}dx+3\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}e^{9(x-\frac{2}{3})^2}dx$$

$$I_1=\int_{-4}^{-5}e^{(x+5)^2}dx\quad,\quad t=x+5\ ,\ dt=dx\ \Rightarrow I_1=\int_1^0 e^{t^2}dt=-\int_0^1 e^{t^2}dt$$

$$I_2=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}e^{9(x-\frac{2}{3})^2}dx\ ,\ t=3(x-\frac{2}{3})\ ,\ dt=3dx\ \Rightarrow I_2=\int_{-1}^{0}e^{t^2}\times\frac{1}{3}dt\xrightarrow{\text{زوج بودن تابع}} I_2=\int_0^1\frac{1}{3}e^{t^2}dt$$

$$\Rightarrow\ I_1+3I_2=-\int_0^1 e^{t^2}dt+3(\frac{1}{3})\int_0^1 e^{t^2}dt=0$$

۷۶ـ گزینه «۱» ابتدا به جمله‌ی عمومی S_1 توجه کنید. این جمله عمومی فرم 1^∞ دارد. می‌توانیم از هم‌ارزی $f(n)^{g(n)}\sim e^{g(n)(f(n)-1)}$ در مورد آن استفاده کنیم:

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}e^{n(n+1)(\frac{n-1}{n+1}-1)}=\lim_{n\to\infty}e^{-2n}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{-2n}=0$$

پس S_1 شرط لازم همگرایی را دارد و در ضمن S_1 را می‌توان هم‌ارز با $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2n}$ در نظر گرفت و این سری به وضوح همگراست چون سری هندسی با قدر نسبت $x=e^{-2}=\frac{1}{e^2}<1$ است.

اکنون به سری S_2 توجه می‌کنیم:

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n})(e^{\sqrt{n}})}$$

هرچند به دلیل وجود $e^{\sqrt{n}}$ در مخرج کسر و سرعت رشد آن می‌دانیم که S_2 همگراست، اما برای اثبات آن می‌توانیم از آزمون انتگرال استفاده کنیم:

$$\int_1^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=[-2e^{-\sqrt{x}}]_1^{\infty}=\frac{2}{e}$$

این انتگرال همگراست پس سری S_2 هم همگراست.

۷۷ـ گزینه «۱»

$$y=\mathrm{Ln}(\frac{۱}{۱-x^۲})=-\mathrm{Ln}(۱-x^۲) \Rightarrow y'=\frac{۲x}{۱-x^۲} \Rightarrow L=\int_۰^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{۱+y'^۲}\,dx$$

$$=\int_۰^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{۱+\frac{۴x^۲}{(۱-x^۲)^۲}}\,dx=\int_۰^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{\frac{۱+۲x^۲+x^۴}{(۱-x^۲)^۲}}\,dx=\int_۰^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{\frac{(۱+x^۲)^۲}{(۱-x^۲)^۲}}\,dx=\int_۰^{\frac{۱}{۲}}\frac{x^۲+۱}{۱-x^۲}\,dx$$

در این انتگرال، درجه‌ی صورت و مخرج برابر است. پس ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

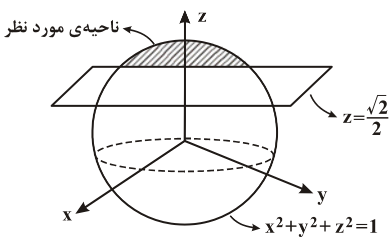
$$\frac{x^۲+۱}{۱-x^۲}=-\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}=-\frac{(x^۲-۱)+۲}{x^۲-۱}=-(۱+\frac{۲}{x^۲-۱})$$

حالا از تجزیه‌ی کسرها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{x^۲+۱}{۱-x^۲}=-(۱+\frac{۲}{x^۲-۱})=-(۱+\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x+۱}) \Rightarrow \int_۰^{\frac{۱}{۲}}\frac{x^۲+۱}{۱-x^۲}dx=-[x+\mathrm{Ln}|x-۱|-\mathrm{Ln}|x+۱|]_۰^{\frac{۱}{۲}}=[\mathrm{Ln}|\frac{x+۱}{x-۱}|-x]_۰^{\frac{۱}{۲}}=\mathrm{Ln}۳-\frac{۱}{۲}$$

۷۸ـ گزینه «۳» سطح S بخشی از کره‌ی $g:x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است.

پس المانِ سطح با توجه به معادله‌ی g به دست می‌آید:



$$S=\iint_S ds=\iint_A\sqrt{۱+z_x^۲+z_y^۲}\,dx\,dy\ ,\ z_x=\frac{\pm x}{\sqrt{۱-(x^۲+y^۲)}}\quad ,\quad z_y=\frac{\pm y}{\sqrt{۱-(x^۲+y^۲)}}$$

$$S=\iint_A\sqrt{۱+\frac{x^۲}{۱-(x^۲+y^۲)}+\frac{y^۲}{۱-(x^۲+y^۲)}}\,dx\,dy=\iint_A\frac{dx\,dy}{\sqrt{۱-(x^۲+y^۲)}}$$

ناحیه‌ی A یعنی تصویر S بر صفحه‌ی xoy یک دایره است. از برخورد صفحه‌ی $z=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ با معادله کره متوجه می‌شویم که دایره‌ی $x^۲+y^۲=\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید:

$$S=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{۱-r^۲}}=(-\frac{۱}{۲}(۱-r^۲)^{\frac{۱}{۲}}\times۲]_۰^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}})(۲\pi)=(-۲\pi)(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۱)\quad ،\quad S=\pi(۲-\sqrt{۲})$$

۷۹ـ گزینه «۳»

$$\vec F=\underbrace{(xy-\sin z)}_{P}\vec i+\underbrace{(\frac{۱}{۲}x^۲+e^y\phi(z))}_{Q}\vec j+\underbrace{(\frac{e^y}{z}\mathrm{Lnz}-x\cos z)}_{R}\vec k$$

برای این که انتگرال کار مستقل از مسیر باشد باید $\mathrm{curl}\vec F=۰$ باشد، یعنی روابط مقابل برقرار باشد:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow x=x$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\rightarrow -\cos z=-\cos z\quad ,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}\Rightarrow e^y\phi'(z)=\frac{e^y}{z}\mathrm{Lnz}\Rightarrow \phi'(z)=\frac{\mathrm{Lnz}}{z}\Rightarrow \phi(z)=\frac{(\mathrm{Lnz})^۲}{۲}+c$$

۸۰ـ گزینه «۲» ابتدا صورت کسر را به این شکل محاسبه می‌کنیم:

$$۱\times۱!+۲\times۲!+\cdots+n\times n!=\sum_{k=۱}^{n}k\times k!=\sum_{k=۱}^{n}((k+۱)-۱)k!=\sum_{k=۱}^{n}(k+۱)!-k!=-\sum_{k=۱}^{n}k!-(k+۱)!=-(۱!-(n+۱)!)=(n+۱)!-۱$$

یادآوری می‌کنیم که در مجموع‌های تلسکوپی داریم:

$$\sum_{k=۱}^{n}f_k-f_{k+۱}=f_۱-f_n$$

بنابراین خواهیم داشت:

مقدار حد $=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)!}{(n+۱)!}\simeq\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۱)!}{(n+۱)!}=۱$

۸۱ـ گزینه «۱» ابتدا صورت و مخرج زیر انتگرال را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$I=\int\frac{\mathrm{tgh}x+۱}{\mathrm{tgh}^۲x-۱}dx=\int\frac{\mathrm{tgh}x+۱}{-\mathrm{sech}^۲x}dx=-\int(\sinh x\cosh x+\cosh^۲x)\,dx=-\int[\frac{۱}{۲}\sinh ۲x+\frac{۱}{۲}(۱+\cosh ۲x)]dx$$

$$=-(\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}\cosh ۲x+\frac{۱}{۴}\sinh ۲x)+c_۱\xrightarrow{\cosh ۲x=۱+۲\sinh^۲x}I=-\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}\sinh^۲x+\frac{۱}{۴}\sinh ۲x+c_۱$$

$$\xrightarrow{c_۱-\frac{۱}{۴}=c}I=-\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\sinh^۲x+\frac{۱}{۴}\sinh ۲x+c$$

۸۲ـ گزینه «۲» طول قوس منحنی $y=f(x)$ در فاصله $a\le x\le b$ برابر است با:
$$S=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

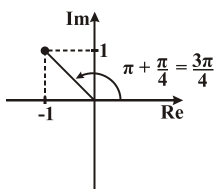
برای منحنی داده شده داریم:
$$f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}\Rightarrow S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(\frac{-2x}{1-x^2})^2}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{(1-x^2)^2+4x^2}}{1-x^2}dx$$
$$\Rightarrow S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{1+x^4-2x^2+4x^2}}{1-x^2}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{x^4+2x^2+1}}{1-x^2}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$$

درجه‌ی صورت و مخرج برابر است. پس ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم. سپس با تجزیه‌ی مخرج، کسر را تفکیک می‌کنیم:
$$\frac{1+x^2}{1-x^2}=-\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\frac{(x^2-1)+2}{x^2-1}=-(1+\frac{2}{x^2-1})=-(1+\frac{2}{(x-1)(x+1)})=-(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}-1$$

با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:
$$S=[\mathrm{Ln}|x+1|-\mathrm{Ln}|x-1|-x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=[\mathrm{Ln}|\frac{x+1}{x-1}|-x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=2\mathrm{Ln}3-1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۳ـ گزینه «۳» عبارت $|\frac{2+i}{5-3i}|^{1392}$ یک عدد حقیقی مثبت است پس هیچ تأثیری در نتیجه Arg ندارد. لذا کافیست که $\mathrm{Arg}(-1+i)$ را محاسبه کنیم.
$$\mathrm{Arg}(-1+i)=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$$



توجه کنید که $tg^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ است، اما چون مقدار x منفی است باید π را به آن اضافه کنیم.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۴ـ گزینه «۱» ابتدا امتداد مماس بر منحنی داده شده در نقطه $(1,2,-2)$ را می‌یابیم:
$$\vec{u}=(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t},\frac{\partial z}{\partial t})=(1,4t,-8t^3)$$

در نقطه‌ی M داریم $(t,2t^2,-2t^4)=(1,2,-2)$ پس $t=1$ است. پس بردار $\vec{u}$ برابر است با:
$$\vec{u}=(1,4,-8)$$

مشتق سویی تابع f در جهت بردار $\vec{u}$ برابر است با: $\frac{\vec{\nabla}f.\vec{u}}{|\vec{u}|}$. ابتدا گرادیان تابع f را به‌دست می‌آوریم:
$$\vec{\nabla}f=(\mathrm{Ln}(z^2+y^2),\frac{2xy}{z^2+y^2},\frac{2xz}{z^2+y^2})\Rightarrow\vec{\nabla}f=(\mathrm{Ln}8,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

بردار $\vec{u}$ را بر اندازه‌اش تقسیم می‌کنیم:
$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{(1,4,-8)}{\sqrt{1+16+64}}=\frac{1}{9}(1,4,-8)$$

حالا بردار به دست آمده را در گرادیان ضرب داخلی می‌کنیم:
$$\frac{\vec{\nabla}f.\vec{u}}{|\vec{u}|}=(\mathrm{Ln}8,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}).(\frac{1}{9},\frac{4}{9},-\frac{8}{9})=\frac{1}{9}(\mathrm{Ln}8+6)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۵ـ گزینه «۳» معادله‌ی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ با تبدیل x به y و y به x تغییری نمی‌کند. همچنین با تبدیل هر جفت از متغیرها به یکدیگر تغییری نمی‌کند. پس در تابع زیرانتگرال هم با تبدیل هر جفت از متغیرها به یکدیگر، مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند. در نتیجه داریم:
$$I=\iiint_D\frac{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}}{x^2+y^2+z^2+1}dv$$

با تبدیل $x\leftrightarrow z$ داریم:
$$I=\iiint_D\frac{z^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}}{z^2+y^2+x^2+1}dv$$

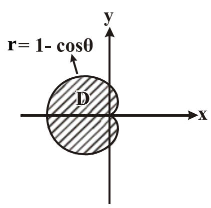
با جمع‌کردن این دو رابطه خواهیم داشت:
$$I+I=\iiint_D\frac{x^2+y^2+z^2+1}{x^2+y^2+z^2+1}dv=\iiint_D dv=(D\ \text{حجم})=\frac{4}{3}\pi\Rightarrow 2I=\frac{4}{3}\pi\Rightarrow I=\frac{2\pi}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۶ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه منحنی c بسته است با استفاده از قضیه گرین داریم:

$$I=\int_c (x^3-y)dx+(3x-2y^2)dy=\iint_D \left(\frac{\partial(3x-2y^2)}{\partial x}-\frac{\partial(x^3-y)}{\partial y}\right)dxdy \Rightarrow I=\iint_D (3+1)dxdy=4\iint_D dxdy$$

برای حل انتگرال فوق با استفاده از مختصات قطبی داریم:

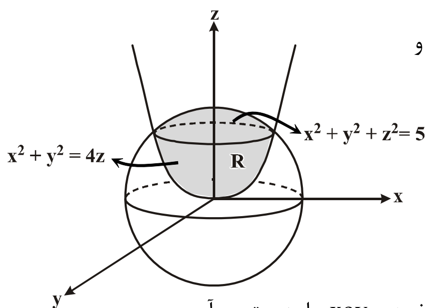


$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases},\quad \begin{cases} 0\le r\le 1-\cos\theta \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

$$I=4\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r\,dr\,d\theta=4\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Big|_0^{1-\cos\theta}d\theta=2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta-2\cos\theta)d\theta=2\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1+\cos 2\theta}{2}-2\cos\theta\right)d\theta \Rightarrow$$

$$I=2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta-2\cos\theta\right)d\theta=2\left(\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta-2\sin\theta\right)\Big|_0^{2\pi} \Rightarrow I=2(3\pi)=6\pi$$

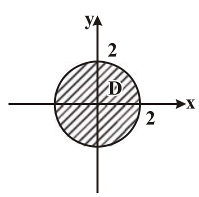


۸۷ـ گزینه «۲» حدود z در این ناحیه واضح هستند. این شکل از پایین به سهمی‌گون $z=\frac{x^2+y^2}{4}$ و از بالا به کره‌ی $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ محدود است. می‌توانیم ابتدا انتگرال نسبت به z را به دست آوریم:

$$V=\iiint_R dv=\iint_D\int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} dydx$$

$$\Rightarrow V=\iint_D\left(\sqrt{5-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{4}\right)dydx$$

برای حل انتگرال فوق از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. لذا ابتدا ناحیه D یعنی تصویر این شکل بر صفحه‌ی xoy را بدست می‌آوریم. از برخورد کره و سهمی‌گون خواهیم داشت:



$$\text{ناحیه } D:\ \left(\frac{x^2+y^2}{4}\right)^2=5-(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r^2}{4}\right)^2=5-r^2 \Rightarrow \frac{r^4}{16}=5-r^2 \Rightarrow r^4+16r^2-80=0$$

$\Rightarrow (r^2-4)(r^2+20)=0 \Rightarrow r=2 \Rightarrow$ ناحیه D درون دایره‌ی $r=2$ است. $\Rightarrow \begin{cases} 0\le r\le 2 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

بنابراین حجم V برابر است با:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(\sqrt{5-r^2}-\frac{r^2}{4}\right)r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(r\sqrt{5-r^2}-\frac{r^3}{4}\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}(5-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^4}{16}\right)\Big|_0^2 d\theta=2\pi\times\left(-\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\times 5\sqrt{5}-0\right)=\frac{2\pi}{3}5(\sqrt{5}-4)$$

۸۸ـ گزینه «۴» ابتدا با فرض $x=y=0$ در معادله تابعی داده شده داریم $f(0+0)=f(0)+f(0)+0$ بنابراین $f(0)=0$.

اکنون با کمک معادله تابعی داده شده کسر تعریف مشتق را ایجاد می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+5hx-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+5hx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+5x=3+5x$$

توضیح: اگر ضابطه‌ی $f(x)$ را بخواهیم، با انتگرال‌گیری از $f'(x)$ داریم $f(x)=3x+\frac{5}{2}x^2+c$. حالا از آنجا که $f(0)=0$ است، باید $c=0$ باشد و در نتیجه $f(x)=3x+\frac{5}{2}x^2$.

۸۹ـ گزینه «۳» نقاط بحرانی $f(x,y,z)=e^{x^2}$ را تحت قید $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=2$ تعیین می‌کنیم. اگر λ ضریب لاگرانژ باشد داریم:

$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z} \Rightarrow \lambda=\frac{2xe^{x^2}}{2x}=\frac{0}{2y}=\frac{0}{2z}$$

بنابراین یا $x=0$ است و y و z دلخواه هستند و یا $x\neq 0$ است و $y=z=0$. که در این صورت با توجه به معادله‌ی $g=2$ باید $x=\pm\sqrt{2}$ باشد.

به عبارتی نقاط بحرانی عبارتند از نقاط $(0,y,z)$ و $(\pm\sqrt{2},0,0)$.

مقادیر بحرانی f را حساب می‌کنیم: $f(0,y,z)=e^0=1$ و $f(\pm\sqrt{2},0,0)=e^2$. پس بیش‌ترین مقدار f با شرط $g=2$ برابر است با e^2.

۹۰ــ گزینه «۳» با توجه به ترتیب نوشته شده، ابتدا x را عددی ثابت فرض می‌کنیم (البته $x>1$ است) و n را به سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم. برای محاسبه‌ی حد در بی‌نهایت، فقط جملاتی مهم هستند که دارای بیشترین رشد باشند و از آنجا که $x\to 1^+$، بنابراین جملات x^n در صورت و مخرج باقی می‌مانند و اعداد ثابت ۱− و ۱+ حذف می‌شوند، در نتیجه:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^n}\right)=1$$

۹۱ــ گزینه «۴» به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء حاصل I_{n+1} را حساب می‌کنیم:

$$I_{n+1}=\int x^2(\ln x)^{n+1}dx$$

$$\begin{cases}(\ln x)^{n+1}=u\ \to du=(n+1)\dfrac{1}{x}(\ln x)^n\\[2mm] x^2dx=dv\ \to v=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$$

$$I_{n+1}=\int x^2(\ln x)^{n+1}dx=\frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}-\frac{(n+1)}{3}\underbrace{\int x^2(\ln x)^n dx}_{I_n}$$

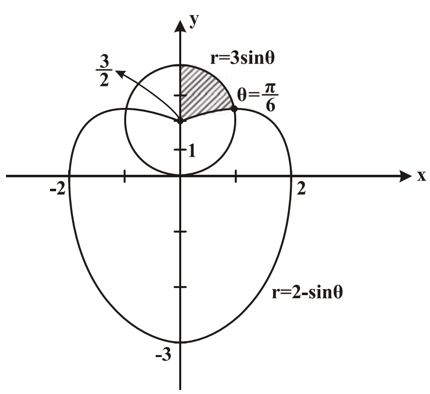
در نتیجه $I_{n+1}=\frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}-\frac{n+1}{3}I_n$، با ضرب طرفین تساوی در ۳ داریم:

$$3I_{n+1}+(n+1)I_n=x^3(\ln x)^{n+1}$$

۹۲ــ گزینه «۲» ابتدا محل تقاطع دو منحنی قطبی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}f(\theta)=3\sin\theta\\ g(\theta)=2-\sin\theta\end{cases}\Rightarrow f(\theta)=g(\theta)\Rightarrow 3\sin\theta=2-\sin\theta\Rightarrow \sin=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

اگر سایر نقاط برخورد را می‌خواستیم معادله‌ی $f(\theta)=(-1)^n g(\theta+n\pi)$ را حل می‌کردیم. اما چون ناحیه‌ی واقع در ربع اول را می‌خواهیم، مطابق شکل به سایر برخوردها نیازی نداریم.



ناحیه مورد نظر در شکل مقابل رسم شده است. در این ناحیه داریم $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

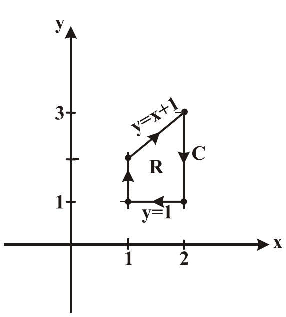
با توجه به فرمول محاسبه‌ی مساحت در مختصات قطبی داریم:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}((3\sin\theta)^2-(2-\sin\theta)^2)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(9\sin^2\theta-\sin^2\theta-4+4\sin\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(8\underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}+4\sin\theta-4)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(4(1-\cos 2\theta)+4\sin\theta-4)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(4\theta-2\sin 2\theta-4\cos\theta-4\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(0-(-2(\frac{\sqrt{3}}{2})-4(\frac{\sqrt{3}}{2})))=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۹۳ــ گزینه «۴» مرز C و ناحیه‌ی محصور شده توسط آن در شکل زیر نمایش داده شده است:



منحنی C در جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده است که عکس جهت مثلثاتی است، پس طبق قضیه‌ی گرین داریم:

$$I=\oint_C\vec{F}.d\vec{r}=-\iint_R(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA=-\iint_R(y-2y)dA=\int_1^2\int_1^{x+1}y\,dy\,dx$$

$$\Rightarrow I=\int_1^2\frac{y^2}{2}\Big|_1^{x+1}dx=\int_1^2(\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{1}{2})dx=\frac{1}{2}\int_1^2(x^2+2x)dx=\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3}+x^2)\Big|_1^2=\frac{8}{3}$$

۹۴ــ گزینه «۳» S یک سطح بسته است که ناحیه T را محدود کرده است. پس به کمک قضیه‌ی دیورژانس داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma = \iiint_T \mathrm{div}\vec{F}dv = \iiint_T (1+1+1)dv = 3(T\ \text{حجم جسم})$$

که در آن T جسم توپُر بین کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4a^2$ و استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ است. برای محاسبه‌ی این حجم از انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای کمک می‌گیریم.

حدود z از معادله‌ی کره به دست می‌آیند: $z=\pm\sqrt{4a^2-x^2-y^2}=\pm\sqrt{4a^2-r^2}$. البته چون تبدیل z به $-z$ معادله‌ی کره را تغییر نمی‌دهد پس می‌توانیم حجم ناحیه‌ی $z\geq 0$ را حساب کرده و ۲ برابر کنیم. یعنی $0\leq z\leq\sqrt{4a^2-r^2}$.

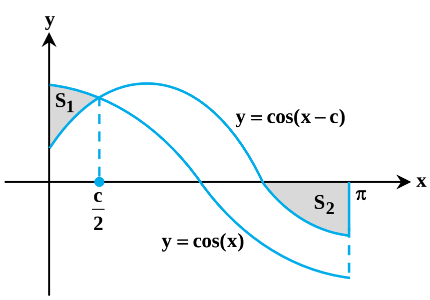
برای تشخیص حدود r دقت کنید که سایه‌ی این شکل بین دو دایره با شعاع‌های a و $2a$ قرار دارد.

$$V=2\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}}\int_0^{2\pi}\int_a^{2a} rdzdrd\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_a^{2a}\sqrt{4a^2-r^2}\ rdr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{2a}d\theta=\frac{-4\pi}{3}(0-(3a^2)^{\frac{3}{2}})=\frac{4\pi}{3}(3\sqrt{3}a^3)=4\sqrt{3}\pi a^3$$

بنابراین: $\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma = 12\pi\sqrt{3}a^3$.

۹۵ــ گزینه «۲» هرچند رسم نمودارها خیلی ضروری نیست با این حال با رسم $y=\cos x$ و انتقال آن یعنی $y=\cos(x-c)$ نواحی S_1 و S_2 را نشان داده‌ایم. محل برخورد منحنی‌های $y=\cos x$ و $y=\cos(x-c)$ را تعیین می‌کنیم. با توجه به آن که $0<c<\frac{\pi}{2}$ است، زاویه‌های $x-c$ و x نمی‌توانند به اندازه‌ی 2π با هم فاصله داشته باشند بنابراین داریم:

$$\cos(x-c)=\cos x \Rightarrow x-c=-x \Rightarrow 2x=c \Rightarrow x=\frac{c}{2}$$



حالا می‌توانیم مساحت محدود به این دو منحنی را از $x=0$ تا $x=\frac{c}{2}$ حساب کنیم:

$$S_1=\int_0^{\frac{c}{2}}[\cos x-\cos(x-c)]dx=[\sin x-\sin(x-c)]_0^{\frac{c}{2}}=\sin(\frac{c}{2})-\sin(-\frac{c}{2})+\sin(-c)$$

$$=\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{c}{2}-\sin c=2\sin\frac{c}{2}-\sin c$$

اکنون مساحت محدود به منحنی‌های $y=\cos(x-c)$ و $y=0$ و خط $x=\pi$ را به دست می‌آوریم. برای یافتن کران دیگر x، دو تابع را با هم برخورد می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=\cos(x-c) \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \cos(x-c)=0 \Rightarrow x-c=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=c+\frac{\pi}{2}$$

$$S_2=\int_{c+\frac{\pi}{2}}^{\pi}[0-\cos(x-c)]dx=-[\sin(x-c)]_{c+\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\sin(\pi-c)+\sin(\frac{\pi}{2})=\sin(-c)+1=-\sin c+1$$

طبق صورت سؤال داریم:

$$S_1=S_2 \Rightarrow 2\sin\frac{c}{2}-\sin c=1-\sin c \Rightarrow 2\sin\frac{c}{2}=1 \Rightarrow \sin\frac{c}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c}{2}=\frac{\pi}{6} \Rightarrow c=\frac{\pi}{3}$$

۹۶ــ گزینه «۱» در ربع اول از صفحه‌ی xoy داریم $0\leq x<\infty$ و $0\leq y<\infty$ در نتیجه داریم:

$$B=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-x-y}dydx=(\int_0^{\infty}e^{-x}dx)(\int_0^{\infty}e^{-y}dy)=[-e^{-x}]_0^{\infty}\times[-e^{-y}]_0^{\infty}=(0+1)(0+1)=1$$

همچنین برای C داریم:

$$C=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dydx}{(1+x^2)(1+y^2)}=(\int_0^{\infty}\frac{dy}{1+y^2})(\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2})=[tg^{-1}(y)]_0^{\infty}\times[tg^{-1}(x)]_0^{\infty}=(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-0)=\frac{\pi^2}{4}$$

۹۷- گزینه «۱» ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم:

حال انتگرال داده شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$I=\iint_D e^{\frac{x^۳+y^۳}{xy}}dxdy=\iint_D e^{\frac{x^۲}{y}+\frac{y^۲}{x}}dxdy$$

با توجه به ناحیه D و شکل تابع زیر انتگرال، بهتر است از تغییر متغیرهای $u=\frac{x^۲}{y}$ و $v=\frac{y^۲}{x}$ استفاده کنیم. در این صورت حدود انتگرال و ژاکوبین انتگرال جدید، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{x^۲}{y}=۰\quad,\quad y=x^۲\ \Rightarrow\frac{x^۲}{y}=۱\ \Rightarrow ۰<u<۱$$

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{y^۲}{x}=۰\quad,\quad x=y^۲\ \Rightarrow\frac{y^۲}{x}=۱\ \Rightarrow ۰<v<۱$$

$$J_{xy}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{۲x}{y} & \frac{-x^۲}{y^۲}\\ \frac{-y^۲}{x^۲} & \frac{۲y}{x}\end{vmatrix}=\frac{۴xy}{xy}-\frac{x^۲y^۲}{y^۲x^۲}=۴-۱=۳\ \Rightarrow J_{uv}=\frac{۱}{|J_{xy}|}=\frac{۱}{۳}$$

حال با توجه به این تغییرات، انتگرال را دوباره می‌نویسیم:

$$I=\iint_D e^{\frac{x^۲}{y}+\frac{y^۲}{x}}dxdy=\iint_{D'}e^{u+v}\frac{۱}{۳}dudv=\frac{۱}{۳}\int_۰^۱\int_۰^۱ e^{u+v}dudv=\frac{۱}{۳}\int_۰^۱ e^u du\int_۰^۱ e^v dv=\frac{۱}{۳}\times e^u\Big|_۰^۱\times e^v\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۳}(e-۱)(e-۱)=\frac{(e-۱)^۲}{۳}$$

۹۸ـ گزینه «۳»

روش اول: حد مجموعی داریم که جملات آن به فرم $\frac{۱}{\sqrt{n^۲+k}}$ هستند. با توجه به آن‌که جملات $n^۲$ و k هم‌درجه نیستند این حد مجموع به صورت ریمانی نیست. برای حل آن می‌توانیم از قضیه ساندویچ استفاده کنیم. می‌دانیم هر یک از جملات مجموع فوق کوچکتر از $\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱}}$ و بزرگتر از $\frac{۱}{\sqrt{n^۲+n}}$ می‌باشد بنابراین مجموع فوق بزرگتر از $\frac{n}{\sqrt{n^۲+n}}$ و کوچکتر از $\frac{n}{\sqrt{n^۲+۱}}$ می‌باشد.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^۲+n}}\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+n}}\right)\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^۲+۱}}\right)\ \Rightarrow ۱\le \text{مقدار حد}\le ۱$$

بنابراین طبق قضیه ساندویچ حاصل حد خواسته شده برابر ۱ است.

روش دوم: اگر اصرار داشته باشیم که این حد مجموع را با روش ریمانی و تبدیل به انتگرال حل کنیم، باید ابتدا $\frac{۱}{n}$ را فاکتور گرفته و از مجموع خارج کنیم. سپس جملاتی را که درجه‌ای کمتر از سایر جملات دارند حذف کنیم تا همه‌ی جملات صورت هم درجه شوند و همچنین همه‌ی جملات مخرج، هم‌درجه شوند. (طبق متن درس)

پس می‌توانیم $f(\frac{k}{n})$ را تشخیص داده و ضابطه‌ی $f(x)$ را پیدا کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{n^۲+k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{n^۲(۱+\frac{k}{n^۲})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{\frac{n^۲+k}{n^۲}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{\frac{n^۲+۰}{n^۲}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{۱}}$$

$$f(\frac{k}{n})=۱\Rightarrow f(x)=۱\Rightarrow \text{جواب حد}=\int_۰^۱(۱)dx=۱$$

۹۹ـ گزینه «۳» با توجه به قضیه دیورژانس، می‌توان چنین نوشت:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}\,d\sigma=\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dv$$

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(۳x+\tan yz)+\frac{\partial}{\partial y}(y+xz)+\frac{\partial}{\partial z}(۲z+e^{xy})=۳+۱+۲=۶$$

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dv=۶\iiint_D dv=۶\times(D\ \text{حجم ناحیه})=۶(\frac{۸\pi}{۳})=۱۶\pi$$

ناحیه‌ی D مخروطی با ارتفاع $x=۲$ و قاعده آن دایره‌ی $۴=y^۲+z^۲$ می‌باشد و لذا حجم آن از رابطه $V=\frac{۱}{۳}(۴\pi)(۲)=\frac{۸\pi}{۳}$ بدست می‌آید.

۱۰۰ـ گزینه «۴» ابتدا با استفاده از اتحاد مربع دو جمله و همچنین رابطه‌ی $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ تابع زیر انتگرال را به این شکل می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{1}{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}=\frac{1}{\cos^2 2x+\sin^2 2x-\frac{1}{2}\sin^2 2x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x}=\frac{1}{\cos^2 2x}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 2x}\right)$$

حالا با فرض $u=\frac{\mathrm{tg}2x}{\sqrt{2}}$ داریم $du=\frac{2dx}{\sqrt{2}\cos^2 2x}$ بنابراین:

$$I=\int\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 2x}\right)\left(\frac{dx}{\cos^2 2x}\right)=\int\left(\frac{1}{1+u^2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}du\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Arctg}(u)+c=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}2x}{\sqrt{2}}\right)+c$$

۱۰۱ـ گزینه «۱» ابتدا از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{\mathrm{Ln}(1+x)}{x}$$

از طرفی بسط تیلور $\mathrm{Ln}(1+x)$ برابر است با:

$$\mathrm{Ln}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

با جای‌گذاری بسط فوق در رابطه $f'(x)$ داریم:

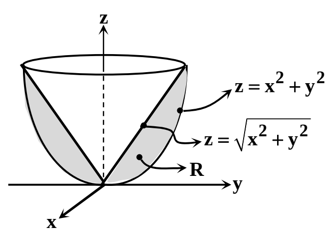
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n}\xrightarrow{\text{ازطرفین انتگرال می‌گیریم}}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$$

برای یافتن بازه همگرایی با توجه به گزینه‌ها کافیست که همگرایی سری فوق را در $x=1$ و $x=-1$ بررسی کنیم:

$$x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

شرط لازم و کافی برای همگرایی سری متناوب فوق آنست که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ نزولی باشد و $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ باشد و از آنجایی که این دو شرط برقرار است، سری فوق به ازای $x=1$ همگراست. به ازای $x=-1$ به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}$ که این سری هم همگراست. پس بازه‌ی همگرایی سری برابر است با: $-1\le x\le 1$

۱۰۲ـ گزینه «۴» حجم ناحیه موردنظر به صورت زیر نوشته می‌شود:



$$V=\iiint_R dv$$

برای حل از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم، لذا:

$$V=\iiint_R r\,dz\,dr\,d\theta$$

معادلات سهمی‌گون و مخروط در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow z=r\\ z=x^2+y^2\Rightarrow z=r^2\end{cases}\xrightarrow{\text{یافتن محل تلاقی}}r^2=r\Rightarrow r(r-1)=0\Rightarrow\begin{cases}r=0\\ r=1\end{cases}\Rightarrow 0\le r\le 1$$

تصویر این شکل بر صفحه‌ی xoy یک دایره است پس $0\le\theta\le 2\pi$ است. حجم ناحیه R برابر است با:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{r}r\,dz\,dr\,d\theta\Rightarrow$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1 rz\Big|_{r^2}^{r}dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\int_0^1(r^2-r^3)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 d\theta\Rightarrow V=\frac{1}{12}\times 2\pi=\frac{\pi}{6}$$

توضیح: از معادله‌ی رویه‌ها، کران‌های z به صورت $z=r$ و $z=r^2$ به‌دست می‌آیند، اما از کجا تشخیص می‌دهیم که کدام‌یک از آن‌ها کران بالا و کدام کران پایین است؟ برای این‌کار می‌توانید به حدود r توجه کنید: $0\le r\le 1$ است. یک مقدار دلخواه از آن مثلاً $r=\frac{1}{2}$ را انتخاب کنیم. واضح است کـه r^2 از r کوچکتر می‌شود. پس $r^2\le z\le r$ است.

۱۰۳ـ گزینه «۲» خمیدگی (انحناء) خم فضایی $\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ برابر است با:

$$\kappa=\frac{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|}{|\vec{R}'(t)|^{۳}}$$

بنابراین برای $\vec{R}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(a\sin t)\vec{j}+bt\vec{k}$ داریم:

$$\vec{R}'(t)=(-a\sin t)\vec{i}+(a\cos t)\vec{j}+b\vec{k}$$

$$\vec{R}''(t)=(-a\cos t)\vec{i}+(-a\sin t)\vec{j}$$

ضرب خارجی $\vec{R}'$ و $\vec{R}''$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{R}'\times\vec{R}''=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & ۰\end{vmatrix}=(ab\sin t)\vec{i}-(ab\cos t)\vec{j}+a^{۲}\vec{k}$$

بنابراین اندازه ضرب خارجی برابر است با:

$$\Rightarrow |\vec{R}'\times\vec{R}''|=\sqrt{a^{۲}b^{۲}+a^{۴}}=a^{۲}\sqrt{b^{۲}+a^{۲}}$$

همچنین اندازه $\vec{R}'(t)$ را حساب می‌کنیم:

$$|\vec{R}'(t)|=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در فرمول انحناء داریم:

$$\kappa=\frac{a\sqrt{b^{۲}+a^{۲}}}{\sqrt{(a^{۲}+b^{۲})^{۳}}}=\frac{a}{a^{۲}+b^{۲}}\Rightarrow\frac{a}{a^{۲}+b^{۲}}=\frac{۱}{۲a}\Rightarrow ۲a^{۲}=a^{۲}+b^{۲}\Rightarrow a^{۲}=b^{۲}\Rightarrow a=b$$

تذکر: منحنی $\vec{R}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ مارپیچ ارشمیدس است و طبق متن درس، انحنای آن $\kappa=\frac{a}{a^{۲}+b^{۲}}$ است. بهتر است انحنای منحنی‌های معروف را به خاطر بسپارید.

۱۰۴ـ گزینه «۴» بردار هادی خط عمود بر رویه که برابر با بردار گرادیان رویه می‌باشد را به دست می‌آوریم:

بردار هادی خط عمود بر رویه: $\vec{u}=\vec{\nabla}f=(۲(x-z)\ ,\ ۲(y+z)\ ,\ ۲(y+z)+۲(z-x))\Rightarrow\vec{u}=(x-z,y+z,y+۲z-x)$

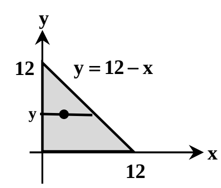
برای آن‌که این خط با صفحه yoz موازی باشد باید بر بردار نرمال صفحه yoz یعنی $\vec{n}=\vec{i}$ عمود باشد، لذا:

$$\vec{u}.\vec{n}=۰\ \Rightarrow\vec{u}.\vec{n}=\vec{u}.\vec{i}=x-z=۰\ \Rightarrow\ z=x$$

بنابراین نقاط فصل مشترک صفحه $z=x$ و رویه داده شده نقاط موردنظر مسئله می‌باشد و گزینه ۴ صحیح است.

۱۰۵ـ گزینه «۴»

روش اول: قاعده جسم را در شکل نشان داده‌ایم.



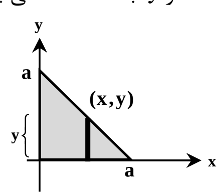
به ازای هر $۰\le y\le ۱۲$: مقطع عرضی این شکل نیم دایره‌ای است با قطرِ $x=۱۲-y$. پس مساحت این نیم‌دایره برابر است با $S(y)=\frac{\pi}{۲}(\frac{۱۲-y}{۲})^{۲}$. بنابراین خواهیم داشت:

$$V=\int_{۰}^{۱۲}s(y)dy=\int_{۰}^{۱۲}\frac{\pi}{۲}(\frac{۱۲-y}{۲})^{۲}dy=\frac{\pi}{۸}\int_{۰}^{۱۲}(۱۲^{۲}-۲(۱۲)y+y^{۲})dy=\frac{\pi}{۸}(۱۲^{۲}y-۱۲y^{۲}+\frac{۱}{۳}y^{۳})\Big|_{۰}^{۱۲}=\frac{\pi}{۸}(۱۲^{۳}-۱۲^{۳}+\frac{۱۲^{۳}}{۳})=۷۲\pi$$

روش دوم: (حل حالت کلی با دو فرمول مختلف:) می‌توانیم مسأله را در حالت کلی‌تری حل کنیم. مطابق شکل فرض کنید طول هر کدام از ساق‌های مثلث، a باشد. معادله‌ی خطی که از $(a,۰)$ و $(۰,a)$ می‌گذرد به صورت $x+y=a$ است.

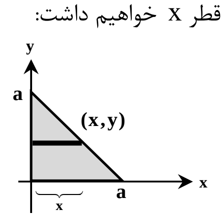
حال می‌توانیم مسأله را برحسب متغیر x یا برحسب متغیر y حل کنیم.

فرمول اول: در هر نقطه‌ی $۰\le x\le a$ یک برش عرضی مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم، طبق صورت سؤال نیم‌دایره‌ای به قطر y به دست می‌آید. (دقت کنید که ما فقط قاعده‌ی شکل را رسم کرده‌ایم)



$$S(x)=\frac{۱}{۲}\pi(\frac{y}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۸}\pi(a-x)^{۲}\ \Rightarrow\ V=\int_{۰}^{a}S(x)\,dx=\frac{\pi}{۸}\int_{۰}^{a}(a-x)^{۲}dx=-\frac{\pi}{۲۴}(a-x)^{۳}\Big|_{۰}^{a}=\frac{\pi}{۲۴}a^{۳}$$

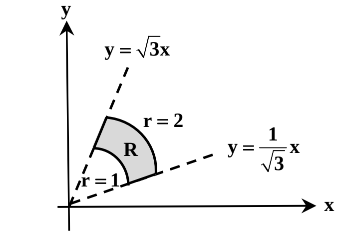
فرمول دوم: در هر نقطه‌ی $۰\le y\le a$ یک برش طولی مطابق شکل زیر درنظر می‌گیریم. طبق صورت سؤال نیم‌دایره‌ای به قطر x خواهیم داشت:



$$S(y)=\frac{۱}{۲}\pi(\frac{x}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۲}\pi(\frac{a-y}{۲})^{۲}=\frac{\pi}{۸}(a-y)^{۲}\ \Rightarrow\ V=\int_{۰}^{a}S(y)\,dy=\frac{\pi}{۸}\int_{۰}^{a}(a-y)^{۲}dy$$

$$\Rightarrow\ V=-\frac{\pi}{۲۴}(a-y)^{۳}\Big|_{۰}^{a}=\frac{\pi}{۲۴}a^{۳}$$

در این مثال $a=۱۲$ است پس $V=۷۲\pi$ به دست می‌آید.

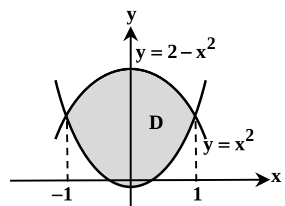


۱۰۶ـ گزینه «۳» روی خط $y=\sqrt{3}x$ داریم $\theta=\frac{\pi}{3}$ و روی خط $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ داریم $\theta=\frac{\pi}{6}$.

شرط $1\le x^2+y^2\le 4$ نیز کران‌های r را به صورت $1\le r\le 2$ معین کرده است. بنـابراین انتگـرال داده شـده را در مختصات قطبی به این شکل حل می‌کنیم.

$$\iint_R \arctan(\frac{y}{x})dxdy=\iint_R \theta\, r\, dr\, d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2 \theta r\, dr\, d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\theta(\frac{r^2}{2})\Big|_1^2 d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3}{2}\theta\, d\theta=\frac{3}{4}\theta^2\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{4}(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36})=\frac{\pi^2}{16}$$

◆ ◆ ◆ ◆



۱۰۷ـ گزینه «۳» ناحیه D را در شکل مقابل نشان داده‌ایم.

محل‌های برخورد دو منحنی به سادگی مشخص می‌شوند:

$$(2-x^2=x^2\ \Rightarrow\ x^2=1\ \Rightarrow\ x=\pm 1)$$

در تمام ناحیه D داریم: $-1\le x\le 1$ و اگر از پایین به بالا حرکت کنیم $y=x^2$ مرز ورودی و $y=2-x^2$ مرز خروجی است، پس $x^2\le y\le 2-x^2$.

اگر از نصف کردن ناحیه انتگرال‌گیری صرف نظر کنیم داریم:

$$\iint_D 2xy\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{2-x^2}2xy\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}2x(\frac{(2x-x^2)^2}{2}-\frac{(x^2)^2}{2})dx=0$$

از آن‌جا که تابع انتگرالده تابعی فرد است و باندها قرینه یکدیگرند مقدار انتگرال صفر است.

روش کوتاه: تابع $f(x,y)=2xy$ نسبت به هر دو متغیر فرد است. ناحیه D نسبت به محور y ها تقارن دارد پس داریم:

$$\iint_D f(x,y)dydx=0$$

در واقع مقدار f در نیمه راستِ D مثبت و در نیمه سمت چپ D منفی است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۸ـ گزینه «۴»

روش اول: بسط مک لورن $f(x)$ را می‌نویسیم. ضریب x^n در بسط مک لورن $f(x)$ برابر با $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ است.

$$f(x)=e^x(c_0+c_1x+c_2x^2)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}+\cdots)(c_0+c_1x+c_2x^2)$$

وقتی جملات دو پرانتز در هم ضرب می‌شوند، فقط در سه تا از آن‌ها x^n به‌وجود می‌آید:

$$\text{جملات شامل } x^n=c_0\frac{x^n}{n!}+c_1x\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+c_2x^2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}=(\frac{c_0}{n!}+\frac{c_1}{(n-1)!}+\frac{c_2}{(n-2)!})x^n$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{c_0}{n!}+\frac{c_1}{(n-1)!}+\frac{c_2}{(n-2)!}\ \Rightarrow\ f^{(n)}(0)=c_0+c_1n+c_2n(n-1)$$

روش دوم: با استفاده از قاعده‌ی لایب‌نیتز برای محاسبه‌ی مشتقِ n اُم $f=uv$ داریم:

$$f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(i)}v^{(n-i)}$$

با به کار بردن این قاعده برای تابعِ $f(x)$ داریم: $u=c_0+c_1x+c_2x^2$ و $v=e^x$.

همه‌ی مشتق‌های مرتبه‌ی بالاتر v برابر با e^x هستند. در مورد u می‌دانیم که $u^{(3)}=u^{(4)}=\cdots=0$ پس داریم:

$$f^{(n)}(x)=\binom{n}{0}(c_0+c_1x+c_2x^2)e^x+\binom{n}{1}(c_1+2c_2x)e^x+\binom{n}{2}(2c_2)e^x+0+0+\cdots$$

با جایگذاری $x=0$ در تساوی فوق داریم:

$$f^{(n)}(0)=c_0+nc_1+\frac{n(n-1)}{2}(2c_2)=c_0+nc_1+n(n-1)c_2$$

روش سوم: می‌توانیم c_0، c_1، c_2 و n را عدد دلخواه فرض کنیم و مشتق دوم را حساب کنیم؛ (اعداد طوری انتخاب شوند که گزینه‌ها متفاوت باشد.)

$$c_0=0\ ,\ c_1=1\ ,\ c_2=1\ ,\ n=2\ \ \Rightarrow P(x)=x+x^2\ \Rightarrow\ f(x)=e^x(x+x^2)$$

$$\Rightarrow\ f(x)=e^x(x+x^2)\ \Rightarrow\ f'(x)=e^x(x+x^2)+(1+2x)e^x=e^x(x^2+3x+1)$$

$$\Rightarrow\ f''(x)=e^x(2x+3)+e^x(x^2+3x+1)=e^x(x^2+5x+4)\Rightarrow f^{(2)}(0)=4$$

یعنی گزینه‌ای جواب است که اگر به جای nهای آن عدد ۲ و به جای c_0، c_1 و c_2 به ترتیب صفر، یک و یک قرار دهیم، حاصلش ۴ شود. فقط گزینه (۴) چنین شرایطی دارد!

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۹ـ گزینه «۱»

روش اول: با توجه به گزینه‌ها می‌توانیم مسأله را در حالت $n=1$ حل کنیم.

$$n=1 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \Rightarrow \left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2}=a$$

پس به ازای $n=1$ باید $a=2^{-1}$ به‌دست آید. گزینه‌ی (۱) صحیح است. در ضمن با به‌دست آوردن مقدار $a=2^{-1}$، گزینه‌ی (۴) هم رد می‌شود.

روش دوم: با استفاده از اتحاد مثلثاتیِ $\sin 2t = 2\sin t\cos t$ داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t\cos t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^n dt = 2^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n 2t\,dt$$

با تغییر متغیر روبرو داریم:

$$\begin{cases} 2t=\frac{\pi}{2}-x \\ 2dt=-dx \Rightarrow dt=\frac{-1}{2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{if} \quad t=0 \to x=\frac{\pi}{2} \\ \text{if} \quad t=\frac{\pi}{2} \to x=\frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n 2t\,dt = \frac{-1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{1}{2}(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt$$

در نتیجه داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^{-n}\cos^n t\,dt \Rightarrow a=2^{-n}$$

روش سوم: می‌توانیم انتگرال‌های داده شده را با استفاده از تابع بتا حل کنیم و از تقسیم آن‌ها برهم a را به دست آوریم. البته این کار وقت‌گیر و طولانی است. یادآوری می‌کنیم که:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

در انتگرال $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\cos^n t\,dt$ داریم:

$$\begin{cases} 2x-1=n \\ 2y-1=n \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{n+1}{2} \Rightarrow I=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma(n+1)}$$

در انتگرالِ $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt$ داریم:

$$\begin{cases} 2x-1=0 \\ 2y-1=n \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{n+1}{2} \Rightarrow J=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

حالا داریم:

$$I=aJ \Rightarrow a=\frac{I}{J}=\frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(n+1)}=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}$$

اگر n زوج باشد داریم $n=2k$ پس:

$$a=\frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2k+1)}=\frac{\frac{2k-1}{2}\times\frac{2k-3}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)k!}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ (2k)!}$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ از صورت و مخرج ساده می‌شود و در صورت کسر این جایگذاری را انجام می‌دهیم:

$$k!=k\times(k-1)\times\cdots\times 2\times 1=\frac{2k}{2}\times\frac{2k-2}{2}\times\cdots\times\frac{4}{2}\times\frac{2}{2}$$

با این جایگذاری خواهیم داشت:

$$a=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}(2k)!}{\left(\frac{1}{2}\right)(2k)!}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\left(\frac{1}{2}\right)^n=2^{-n}$$

اگر n فرد باشد قرار می‌دهیم $n=2k+1$ و باز هم به نتیجه‌ی مشابهی می‌رسیم.

۱۱۰ـ گزینه «۳» با توجه به بسط مک لورنِ تابع $f(x)=\text{Ln}(1+x)$ داریم:

$$\text{Ln}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \ : \ |x|\le 1$$

اگر در تساوی فوق به جای x ها x^2 قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\text{Ln}(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\cdots \ : \ |x|\le 1$$

حال با تقسیم طرفینِ تساوی فوق بر x^2 داریم:

$$\frac{\text{Ln}(1+x^2)}{x^2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^6}{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n+1}$$

توجه کنید که این سری هم در بازه‌ی $-1\le x\le 1$ همگراست. به ازای $x=\pm 1$ به سری متناوب $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ می‌رسیم که همگراست. البته برای آن‌که تقسیم بر x^2 تعریف شده باشد باید $x\ne 0$ باشد، پس $-1\le x\le 1$ و $x\ne 0$ است.

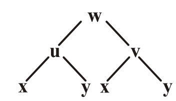
۱۱۱ـ گزینه «۱» ابتدا u و v را برحسبِ x و y به دست می‌آوریم، برای این‌کار باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} x = 2u+v \\ y = u-v \end{cases} +$$
$$x+y = 3u \Rightarrow u = \frac{1}{3}(x+y) \Rightarrow u_x = \frac{1}{3} = u_y$$

با جای‌گذاری مقدار u در دومین معادله، یعنی $y = u - v$، داریم:

$$y = \frac{1}{3}(x+y) - v \Rightarrow v = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \Rightarrow v = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \Rightarrow v_x = \frac{1}{3}\ ,\ v_y = \frac{-2}{3}$$

حال به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای، مشتقاتِ جزئی مرتبه‌ی اولِ w را محاسبه می‌کنیم:



$$\begin{cases} w_x = w_u u_x + w_v v_x = \frac{1}{3}w_u + \frac{1}{3}w_v \\ w_y = w_u u_y + w_v v_y = \frac{1}{3}w_u - \frac{2}{3}w_v \end{cases}$$

به‌طور مشابه مشتقات جزئی مرتبه‌ی دومِ w را به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} w_{xx} = \frac{1}{3}(w_{uu}u_x + w_{uv}v_x) + \frac{1}{3}(w_{vu}u_x + w_{vv}v_x) = \frac{1}{9}w_{uu} + \frac{2}{9}w_{uv} + \frac{1}{9}w_{vv} \\ w_{xy} = \frac{1}{3}(w_{uu}u_y + w_{uv}v_y) + \frac{1}{3}(w_{vu}u_y + w_{vv}v_y) = \frac{1}{9}w_{uu} - \frac{1}{9}w_{uv} - \frac{2}{9}w_{vv} \\ w_{yy} = \frac{1}{3}(w_{uu}u_y + w_{uv}v_y) - \frac{2}{3}(w_{vu}u_y + w_{vv}v_y) = \frac{1}{9}w_{uu} - \frac{4}{9}w_{uv} + \frac{4}{9}w_{vv} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 5w_{xx} + 2w_{xy} + 2w_{yy} = (\frac{5}{9}w_{uu} + \frac{10}{9}w_{uv} + \frac{5}{9}w_{vv})$$
$$+(\frac{2}{9}w_{uu} - \frac{2}{9}w_{uv} - \frac{4}{9}w_{vv}) + (\frac{2}{9}w_{uu} - \frac{8}{9}w_{uv} + \frac{8}{9}w_{vv}) = w_{uu} + w_{vv} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

۱۱۲ـ گزینه «۴» چون معادله‌ی مخروط به صورت $z = f(x,y)$ داده شده بهتر است صفحه‌ی تصویر را همان صفحه‌ی xoy درنظر بگیریم. می‌دانیم که مساحت رویه از فرمول $\iint_S dS = \iint_R \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dA$ به دست می‌آید. $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+(\frac{x}{z})^2+(\frac{y}{z})^2} = \sqrt{\frac{z^2+x^2+y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$

پس: $\text{مساحت سطح} = \iint_R \sqrt{2}\, dA = \sqrt{2} \times (R\ \text{مساحت})$

حالا ببینیم تصویر این سطح بر صفحه‌ی xoy یعنی ناحیه‌ی R چه شکلی است؟

رویه‌ها را برخورد می‌دهیم:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ x+2z = 3 \end{cases} \Rightarrow x + 2\sqrt{x^2+y^2} = 3 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2} = 3-x \Rightarrow 4(x^2+y^2) = 9-6x+x^2 \Rightarrow 3x^2+6x+4y^2 = 9 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

ناحیه‌ی R یک بیضی با شعاع‌های ۲ و $\sqrt{3}$ است. مساحت این بیضی برابر است با $2\sqrt{3}\,\pi$: $\text{مساحت سطح} = \sqrt{2} \times 2\sqrt{3}\,\pi = 2\pi\sqrt{6}$

۱۱۳ـ گزینه «۲» صفحه‌ای که مثلث C بر آن واقع است از نقاط $(0,0,1)$، $(0,1,0)$ و $(1,0,0)$ می‌گذرد. پس معادله‌ی آن به صورت $x+y+z=1$ است. بنابراین داریم $z = 1-x-y$.

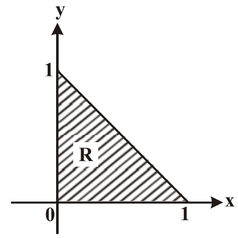
یادآوری می‌کنیم که معادله‌ی صفحه‌ای که از نقاط $(A,0,0)$ و $(0,B,0)$ و $(0,0,D)$ می‌گذرد به صورت $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{D} = 1$ است.

با توجه به توضیحات مسأله، C در جهت ساعتگرد پیموده می‌شود، بنابراین بنا به قضیه‌ی استوکس داریم:

$$I = \oint_C \underbrace{xy}_{P}\, dx + \underbrace{yz}_{Q}\, dy + \underbrace{xz}_{R}\, dz = -\iint_A [(y-0)(-1) + (z-0)(-1) + (0-x)]\, dA = -\iint_A (-y-z-x)\, dA \xrightarrow{z=1-x-y}$$

$$I = \iint_A (-y-1+x+y-x)dA = \iint_A dA = A\ \text{مساحت ناحیه‌ی} = \frac{1}{2}(1\times 1) = \frac{1}{2}$$

که در آن A تصویر مثلث C در صفحه‌ی xoy است:



۱۱۴ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنیم که میدان $\vec{F}$ پایستار نیست؛ زیرا $P_y=-z$ و $Q_x=z$ پس $P_y \neq Q_x$.

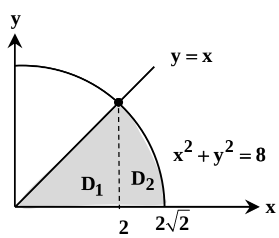
از طرفی منحنی C هم بسته نیست؛ زیرا نقاط ابتدا و انتهای آن که به ازای $t=0$ و $t=2\pi$ به‌دست می‌آیند، منطبق نیستند.

پس از معادلات پارامتری C استفاده می‌کنیم: $x=\cos t\ ,\ y=\sin t\ ,\ z=t$

$$\text{کار}=\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_C -yzdx+xzdy+xydz=\int_0^{2\pi}[(-t\sin t)(-\sin t)+(t\cos t)(\cos t)+(\sin t\cos t)]dt$$

$$\Rightarrow \text{کار}=\int_0^{2\pi}[t\underbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}_{1}+\frac{\sin 2t}{2}]dt=\int_0^{2\pi}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)dt=[\frac{t^2}{2}-\frac{\cos 2t}{4}]_0^{2\pi}=2\pi^2$$

۱۱۵ـ گزینه «۲» ابتدا ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را تشخیص می‌دهیم. با توجه به حدود داده شده، ابتدا خط $y=x$ و منحنی $y=\sqrt{8-x^2}$ (یعنی نیمه‌ی بالایی دایره‌ی $x^2+y^2=8$) را رسم می‌کنیم. این نمودارها در نقطه‌ی $x=2$ با هم برخورد می‌کنند.



نواحی انتگرال‌گیری هر کدام از انتگرال‌ها را D_1 و D_2 می‌نامیم.

در ناحیه‌ی D_1 داریم: $0 \le x \le 2$ و $0 \le y \le x$.

در ناحیه‌ی D_2 داریم: $2 \le x \le 2\sqrt{2}$ و $0 \le y \le \sqrt{8-x^2}$.

اکنون انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ی $D=D_1 \cup D_2$ را در دستگاه قطبی می‌نویسیم:

روی خط $y=x$ داریم $\theta=\frac{\pi}{4}$ پس، در این ناحیه $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ است. حدود r نیز از $r=0$ تا $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ هستند.

$$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{r^2}\,r\,drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\sqrt{2}} r^2drd\theta$$

۱۱۶ـ گزینه «۴» با توجه به گزینه‌های داده شده، می‌خواهیم ترتیب $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ را بنویسیم. ابتدا باید کمترین و بیشترین مقدار z را در این ناحیه به‌دست آوریم.

طبق صورت سؤال، در این ناحیه داریم $-1\le x\le 1$، $x^2\le y\le 1$ و $0\le z\le 1-y$.

با توجه به آن‌که $-1\le x\le 1$ است، داریم $0\le x^2\le 1$. بنابراین، کمترین و بیشترین مقدار ممکن برای y در این ناحیه عبارتند از $0\le y\le 1$. با در نظر گرفتن حدود z یعنی $0\le z\le 1-y$ و قرار دادن $y=0$ و $y=1$ در این عبارات، متوجه می‌شویم که در تمام این ناحیه $0\le z\le 1$ است.

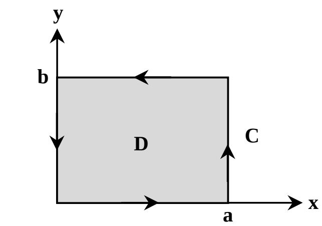
حالا حدود y را برحسب z می‌نویسیم: $z=1-y \Rightarrow y=1-z$

بنابراین همان‌طور که در همه‌ی گزینه‌ها تصریح شده است، حدود y به صورت $0\le y\le 1-z$ هستند.

برای تعیین حدود x برحسب y و z به روابطی که در آن‌ها رابطه‌ی x با سایر متغیرها معلوم شده است، توجه می‌کنیم. $y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$

به این ترتیب خواهیم داشت: $I=\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dxdydz$

دقت کنید لازم نیست حل به طور کامل انجام شود؛ چون $y=x^2$ یکی از مرزها است، پس برای dx باید از $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}$ باشد، لذا گزینه‌های (۱) و (۲) غلط هستند. از طرفی چون $0\le z\le 1-y$ لذا z نمی‌تواند منفی باشد و این یعنی گزینه (۳) غلط است.



۱۱۷ـ گزینه «۱» فرض می‌کنیم منحنی بسته‌ی C مرز مستطیلِ $0 \le x \le a$، $0 \le y \le b$ باشد. با استفاده از فرمول شار گذرنده از یک خم و همچنین قضیه‌ی گرین داریم:

$$\text{شار گذرنده از خم } C = \int_C \vec{F}.\vec{n}ds = \int_C Pdy - Qdx = \iint_D (P_x + Q_y)dA$$

بنابراین در این مثال خواهیم داشت:

$$I = \iint_D [(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 4xy) + \frac{\partial}{\partial y}(-6y)]dA = \iint_D (2x + 4y - 6)dydx \Rightarrow I = \int_0^a \int_0^b (2x + 4y - 6)dydx$$

$$= \int_0^a [2xy + 2y^2 - 6y]_0^b dx = \int_0^a (2bx + 2b^2 - 6b)dx = [bx^2 + 2b^2x - 6bx]_0^a = a^2b + 2b^2a - 6ab$$

بنابراین شار کل میدان $\vec{F}$ به صورت تابع دو متغیره‌ی $f(a,b) = a^2b + 2b^2a - 6ab$ به دست می‌آید. حالا نقطه‌ی بحرانی f را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_a = 2ab + 2b^2 - 6b = 0 \\ f_b = a^2 + 4ab - 6a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b(a + b - 3) = 0 \\ a(a + 4b - 6) = 0 \end{cases}$$

a و b مثبت هستند، بنابراین تنها جواب این دستگاه $(a,b) = (2,1)$ است. به ازای $a = 2$ و $b = 1$ داریم: $f(2,1) = 4 + 4 - 12 = -4 =$ مقدار مینیمم شار

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۸ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم S سطح خارجی کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و D ناحیه‌ی درون کره باشد.

طبق قضیه‌ی دیورژانس داریم: $\text{شار عبوری از سطح } S = I = \iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_D div\vec{F}dv \Rightarrow I = \iiint_D (2x + 0 + 3)dv$

تابع $2x$ فرد است در حالی‌که معادله‌ی مرز ناحیه‌ی D یعنی $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ نسبت به x زوج است. بنابراین $\iiint_D 2xdv = 0$ است.

در نتیجه داریم: $I = \iiint_D 3dv = 3 \times (\text{حجم } D) = 3 \times \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = 32\pi$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۹ـ گزینه «۴» چگالی ثابت یک است. یعنی $\rho(x,y) = 1$ است. پس مرکز ثقل این شکل، همان مرکز هندسی است. طول و عرض مرکز ثقل با این روابط به‌دست می‌آیند:

$$x_c = \frac{\iint_D xdA}{\iint_D dA} = \frac{\iint_D xdA}{\text{مساحت } D}$$

مساحت این بیضی برابر است با πab، البته ناحیه‌ی D فقط ربع اول از این بیضی است و مساحت آن $\frac{1}{4}\pi ab$ است.

مطابق متن درس برای نواحی بیضوی از تغییر متغیر بیضوی استفاده می‌کنیم پس برای محاسبه‌ی صورت کسر، از تغییر متغیر بیضوی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases} \Rightarrow J_{r\theta} = abr$$

در ربع اول بیضی داریم $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ و چون با انجام این تغییر متغیر، بیضی مورد نظر به دایره‌ی واحد تبدیل می‌شود، پس $0 \le r \le 1$ است.

$$\iint_D xdA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (ar\cos\theta)(abr)drd\theta = a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2\cos\theta drd\theta = a^2b[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{r^3}{3}]_0^1 = \frac{a^2b}{3}$$

بنابراین: $$x_c = \frac{\frac{1}{3}a^2b}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4a}{3\pi}$$

در نتیجه گزینه‌ی (۴) صحیح است.

برای حل کامل‌تر، محاسبه‌ی y_c را به صورت خلاصه می‌نویسیم: $$y_c = \frac{\iint_D ydA}{(\text{مساحت } D)} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (br\sin\theta)(abr)drd\theta}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{a^2b[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{r^3}{3}]_0^1}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4b}{3\pi}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۰ـ گزینه «۲» با توجه به گزینه‌ها جواب باید به صورت یک سری به‌دست آید. بنابراین ابتدا بسط مک‌لورن e^{-x^2} را می‌نویسیم و سپس جمله به جمله انتگرال می‌گیریم:

$$e^u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\Rightarrow e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\Rightarrow I=\int_0^a e^{-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^a x^{2n}dx\Rightarrow I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^a\Rightarrow I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{a^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

$$\Rightarrow I=a-\frac{a^3}{1!\times 3}+\frac{a^5}{2!\times 5}-\cdots$$

۱۲۱ـ گزینه «۲» با توجه به وجود x^2+y^2 در مخرج کسر می‌توانیم از فرم قطبی استفاده کنیم. با جایگذاری $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ داریم:

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^m(r\sin\theta)^n}{(r^2)^P}=\lim_{r\to 0}\frac{r^{n+m}\cos^m\theta\sin^n\theta}{r^{2P}}$$

اگر $2p>n+m$ باشد، مقدار این حد، $\pm\infty$ خواهد بود. پس حد وجود ندارد.

اگر $2p=n+m$ باشد، متغیر r حذف می‌شود و جواب حد به θ بستگی پیدا می‌کند. پس حد وجود ندارد.

اگر $2p<n+m$ باشد، متغیر r از مخرج ساده می‌شود و در صورت باقی می‌ماند. در این حالت جواب حد برابر با صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار حد فقط در حالت $2p<n+m$ موجود است.

۱۲۲ـ گزینه «۲» با توجه به قاعده‌ی کمترین درجه، وقتی $x\to 0^+$ خواهیم داشت: $x^5-x^2\simeq -x^2$ در نتیجه وقتی $x\to 0^+$ خواهیم داشت $-x^2\to 0^-$ (زیرا $-x^2$ همواره منفی است). بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x^5-x^2)=\lim_{x\to 0^+}f(-x^2)=f(0^-)=B$$

۱۲۳ـ گزینه «۳»

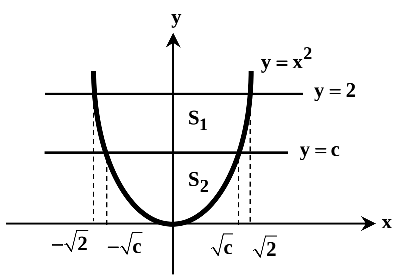
روش اول: منحنی $y=x^2$ و خط $y=2$ را برخورد می‌دهیم.

$$x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

حالا خط $y=c$ را با $y=x^2$ برخورد می‌دهیم:

$$x^2=c\Rightarrow x=\pm\sqrt{c}$$

مطابق شکل داریم:



$$S_1=S_2\Rightarrow\iint_{S_1}dxdy=\iint_{S_2}dxdy$$

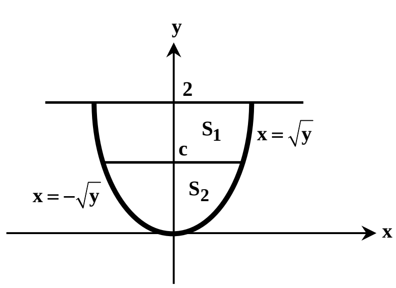
چون حدود y عدد ثابت هستند بهتر است آن‌ها را در انتگرال بیرونی بنویسیم. به همین علت ترتیب $dx\,dy$ را انتخاب کرده‌ایم. حدود x از معادله‌ی $y=x^2$ به صورت $x=\pm\sqrt{y}$ به دست می‌آیند.

$$I_1=\iint_{S_1}dxdy=\int_c^2\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dxdy=\int_c^2 2\sqrt{y}dy=\left[\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_c^2\ ,\ I_2=\iint_{S_2}dxdy=\int_0^c\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dxdy=\int_0^c 2\sqrt{y}dy=\left[\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^c$$

$$I_1=I_2\Rightarrow\frac{4}{3}(2^{\frac{3}{2}}-c^{\frac{3}{2}})=\frac{4}{3}(c^{\frac{3}{2}}-0)\Rightarrow 2c^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{3}{2}}\Rightarrow c^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\Rightarrow c=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$$

روش دوم: با استفاده از انتگرال یگانه هم می‌توانیم مسأله را حل کنیم. ابتدا همانند روش قبل نقاط برخورد $y=x^2$ را با خطوط $y=2$ و $y=c$ مشخص می‌کنیم.

ناحیه‌ی S_1 در بازه‌ی $c\le y\le 2$ و بین منحنی‌های $x=\pm\sqrt{y}$ قرار دارد.



$$S_1=\int_c^2[\sqrt{y}-(-\sqrt{y})]dy=\int_c^2 2\sqrt{y}\,dy=\left[\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_c^2$$

برای S_2 داریم:

$$S_2=\int_0^c[\sqrt{y}-(-\sqrt{y})]dy=\left[\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^c$$

ادامه‌ی حل مانند روش اول خواهد بود.

۱۲۴ـ گزینه «۴» در این سؤال هدف ما یافتن ضابطه‌ی $f(x)$ نیست، بلکه یافتن کران بالا و پایین برای $f(2)$ است.

طبق قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:
$$f(2)-f(0)=f'(c)(2-0)\ ,\ c\in(0,2)\ \Rightarrow\ f(2)-0=\frac{2}{1+c^2}$$

حالا $c\in(0,2)$ پس داریم:
$$\frac{2}{1+4}<\frac{2}{1+c^2}<\frac{2}{1+0}\ \Rightarrow\ \frac{2}{5}<f(2)<2$$

۱۲۵ـ گزینه «۱» اگرچه صورت سؤال ظاهراً مشکل است اما راه‌حل بسیار ساده‌ای دارد. معادله‌ی $x+y=1$ نشان می‌دهد که منحنی c قسمتی از خط $x+y=1$ است و همان‌طور که می‌دانید، انحنای یک خط راست در همه‌ی نقاط، برابر با صفر است.

۱۲۶ـ گزینه «۱» معادله‌ی منحنی $x^2-y^2=2(x^2+y^2)^2$ را در دستگاه قطبی می‌نویسیم:
$$r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=2r^4\ \Rightarrow\ r^2\cos2\theta=2r^4$$

از همین معادله دو کران برای r به‌دست می‌آید که عبارتند از $r=0$ و $r=\sqrt{\frac{\cos2\theta}{2}}$. با توجه به تساوی $r=\sqrt{\frac{\cos2\theta}{2}}$ می‌توانیم حدود θ را هم پیدا کنیم.

باید $\cos2\theta\ge0$ باشد. پس 2θ باید در ربع اول یا ربع چهارم باشد.
$$0\le2\theta\le\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$
$$\frac{3\pi}{2}\le2\theta\le2\pi\ \Rightarrow\ \frac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi$$

البته با توجه به آن‌که تبدیل x به $-x$ و تبدیل y به $-y$ معادله‌ی منحنی $x^2-y^2=(x^2+y^2)^2$ را تغییر نمی‌دهد، متوجه می‌شویم این ناحیه نسبت به هر دو محور x و y تقارن دارد. پس می‌توانیم قسمت واقع در ربع اول آن را حساب کرده و ۴ برابر کنیم.

پس کافیست ناحیه‌ی $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ و $0\le r\le\sqrt{\frac{\cos2\theta}{2}}$ را محاسبه کرده و ۴ برابر کنیم.

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{r^2}{2})d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{\frac{\cos2\theta}{2}})^2\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\,d\theta=[\frac{1}{2}\sin2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

۱۲۷ـ گزینه «۱» می‌دانیم که برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $|\cos n|\le1$ بنابراین $|(\frac{\cos n}{2n-1})^2|\le\frac{1}{(2n-1)^2}$ و سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ همگراست.

زیرا یک P– سری است که درجه مخرج از درجه صورت ۲ واحد بیشتر است. در واقع با مقایسه حدی می‌توان گفت رفتار این سری مانند رفتار سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}$ است که همگرای مطلق است.

حالا که این سری همگرای مطلق است پس همگرا هم هست.

تذکر: جملاتی مانند $\cos(n)$ و $\sin(n)$ و $\cos(n^2)$ و ... که در آن‌ها کمانِ موردنظر به بی‌نهایت میل می‌کند را اغلب با آزمون مقایسه حدی مورد تحلیل قرار می‌دهیم. البته مراقب حالات خاص باشد برای مثال $\sin(n\pi)$ که همواره صفر است.

تذکر: رفتار سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(cn)}{n^P}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(cn)}{n^P}$ مانند سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^P}$ است.

۱۲۸ـ گزینه «۱» با توجه به تعریف x_n داریم:
$$x_{n+1}=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\cdots+\sqrt{a}}}}}_{\text{مرتبه } n+1}=\sqrt{a+x_n}$$

از رابطه بازگشتیِ $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$ متوجه می‌شویم که دنباله‌ی (x_n) نامنفی است. پس $\lim_{n\to\infty}x_n\ge0$ است.

برای یافتن مقدار حد فرض کنیم $L=\lim_{n\to\infty}x_n$ بنابراین $L=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}$ خواهد بود. از طرفین رابطه بازگشتی به‌دست آمده حد بگیریم.

$$L=\sqrt{a+L}\ \Rightarrow\ L^2=a+L\ \Rightarrow\ L^2-L-a=0\ \xrightarrow{\Delta=1+4a}\ L=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$$

از صورت سئوال معلوم است که $a\ge0$ پس $\Delta=1+4a\ge1$ پس $\sqrt{1+4a}\ge1$. از طرفی می‌دانیم که حد این دنباله نامنفی است پس:
$$L=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

۱۲۹ـ گزینه «۳» فرض کنیم $v(x)=e^{ax}$ و $u(x)=x^2$ و $f(x)=u(x)v(x)$ باشد. طبق فرمول لایب نیتز مشتق nاُم f برابر است با:

$$f^{(n)}=\binom{n}{0}uv^{(n)}+\binom{n}{1}u^{(1)}v^{(n-1)}+\binom{n}{2}u^{2}v^{(n-2)}+\cdots+\binom{n}{n}u^{(n)}v$$

اما $u(x)=x^2$ چند جمله‌ای درجه دو است و به همین دلیل $u^{(3)}=u^{(4)}=\cdots=u^{(n)}=0$ پس فقط ۳ جمله اول از این مجموع باقی خواهند ماند. برای تابع $v(x)=e^{ax}$ نیز به‌وضوح $v^{(k)}(x)=a^ke^{ax}$.

$$f^{(n)}(x)=\binom{n}{0}x^2a^ne^{ax}+\binom{n}{1}2xa^{n-1}e^{ax}+\binom{n}{2}2a^{n-2}e^{ax}$$

$$=a^nx^2e^{ax}+2na^{n-1}xe^{ax}+n(n-1)a^{n-2}e^{ax}=e^{ax}[a^nx^2+2na^{n-1}x+n(n-1)a^{n-2}]$$

روش کوتاه‌تر: از آن‌جا که گزینه‌ها در دسترس ما است و یکی از آن‌ها جواب صحیح است باید به ازای $n=0$ تابع $f(x)$ به‌دست آید. یعنی مشتقِ صفرمِ تابع $f(x)$ باید برابر با خودِ $f(x)$ باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۴) رد می‌شوند.

از طرفی $f'(x)=e^{ax}[2x+ax^2]$ و در گزینه صحیح به ازای $n=1$ باید $f'(x)$ به‌دست آید پس گزینه (۳) پاسخ درست است.

۱۳۰ـ گزینه «۱» در $x=0$ داریم $f(0)=g(0)=1$.

اکنون برای $x>0$ مشتق‌های f و g را با هم مقایسه می‌کنیم.

$$g'(x)=\frac{1}{n}\qquad,\qquad f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}}$$

$x>0$ پس $1+x>1$ در نتیجه $\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}>1$ و این نشان می‌دهد که $f'(x)<g'(x)$ است.

بنابراین $g'(x)-f'(x)>0$، یعنی تابع $g(x)-f(x)$ در بازه‌ی $[0,\infty)$ صعودی است. پس برای هر $x>0$ داریم:

$$g(x)-f(x)>g(0)-f(0)\ \Rightarrow\ g(x)-f(x)>0\ \Rightarrow\ g(x)>f(x)$$

۱۳۱ـ گزینه «۱» ابتدا از فرمول $\sum_{n=0}^{\infty}u^n=\frac{1}{1-u}$ به‌ازای $u=x^3$ استفاده می‌کنیم. طبق صورت سؤال $|x|<1$ است، بنابراین $|x^3|<1$ است و شرط همگرایی سری برقرار است:

$$\frac{1}{1-x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^3)^n\ \Rightarrow\frac{1}{1-x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}$$

حالا برای آنکه مخرج کسر به توان ۲ برسد، از طرفین تساوی مشتق می‌گیریم:

$$\frac{1}{1-x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}\frac{0+3x^2}{(1-x^3)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}3nx^{3n-1}$$

حالا با تقسیم طرفین بر ۳ به نتیجه‌ی دلخواه می‌رسیم:

$$\frac{x^2}{(1-x^3)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{3n-1}$$

البته به‌ازای $n=0$ مقدار داخل سری صفر می‌شود، پس می‌توانیم این سری را از $n=1$ آغاز کنیم:

$$\frac{x^2}{(1-x^3)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{3n-1}$$

۱۳۲ـ گزینه «۴» حجم ناحیه‌ی محدود به چند رویه را می‌توانیم با استفاده از انتگرال سه‌گانه به‌صورت $V=\iiint_D dz\,dy\,dx$ به‌دست آوریم. در این مثال تصویر ناحیه در صفحه xy دایره‌ی $x^2+y^2=2y$ است، پس بهتر است از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. طبق متن درس می‌دانیم که در این دایره $0\le\theta\le\pi$ و $0\le r\le 2\sin\theta$ است. [اگر شکل این دایره یا توضیحات متن درس را به‌خاطر ندارید، با نوشتن معادله‌ی $x^2+y^2=2y$ در مختصات قطبی به معادله‌ی $r^2=2r\sin\theta$ می‌رسیم که جواب‌های آن $r=0$ و $r=2\sin\theta$ هستند. حالا با توجه به آنکه $r\ge0$ است، داریم: $\sin\theta\ge0$. پس $0\le\theta\le\pi$ به‌دست می‌آید.]

حدود z از معادله‌ی $z^2=y$ به‌صورت $z=\pm\sqrt{y}$ به‌دست می‌آیند که در مختصات استوانه‌ای به شکل $z=\pm\sqrt{r\sin\theta}$ نوشته می‌شوند.

$$V=\iiint_D r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_{-\sqrt{r\sin\theta}}^{\sqrt{r\sin\theta}}r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}[rz]_{-\sqrt{r\sin\theta}}^{\sqrt{r\sin\theta}}\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}2r^{\frac{3}{2}}(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow V=\int_0^{\pi}\frac{4}{5}(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}[r^{\frac{5}{2}}]_0^{2\sin\theta}\,d\theta=\int_0^{\pi}\frac{4}{5}\times2^{\frac{5}{2}}\sin^3\theta\,d\theta$$

برای حل انتگرال $\sin^3\theta$ آن را به‌صورت $(1-\cos^2\theta)\sin\theta$ می‌نویسیم:

$$V=\frac{4}{5}\times2^{\frac{5}{2}}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{4\times4\sqrt{2}}{5}[-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}]_0^{\pi}=\frac{16\sqrt{2}}{5}(2-\frac{2}{3})=\frac{16\sqrt{2}}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{64\sqrt{2}}{15}$$

۱۳۳ـ گزینه «۴» با فرض $z=a+ib$، آنگاه $\overline{z}=a-ib$ و لذا داریم:

$$\frac{1}{z}+2i=\frac{1}{a+ib}+2i=\frac{a-ib}{a^2+b^2}+2i=\frac{a}{a^2+b^2}-i\left(\frac{b}{a^2+b^2}+2\right)\Rightarrow \mathbf{Re}\left(\frac{1}{z}+2i\right)=\frac{a}{a^2+b^2}\qquad(1)$$

$$z-\overline{z}=(a+ib)-(a-ib)=2ib\Rightarrow \mathbf{Im}(z-\overline{z})=2b$$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow |z|^2=a^2+b^2\Rightarrow \frac{\mathbf{Im}(z-\overline{z})}{|z|^2}=\frac{2b}{a^2+b^2}\qquad(2)$$

اگر قرار باشد نامساوی داده شده برقرار باشد، داریم:

$$\xrightarrow{(1),(2)}\frac{a}{a^2+b^2}\le\frac{2b}{a^2+b^2}\xrightarrow{(a,b)\ne(0,0)} a\le 2b$$

۱۳۴ـ گزینه «۲» بسط تیلور تابع $\frac{1}{1-x}$ صفر (در واقع همان بسط مک‌لورن تابع) به صورت مقابل است:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

اگر از طرفین رابطه‌ی فوق مشتق بگیریم، داریم:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

می‌خواهیم یک‌بار دیگر از طرفین مشتق بگیریم تا درجه‌ی مخرج افزایش یابد. با توجه به گزینه‌ها، می‌خواهیم در سری ضریب n^2 ایجاد شود، پس ابتدا طرفین را در x ضرب می‌کنیم تا در داخل سری nx^n به‌وجود آید و با مشتق‌گیری از آن ضریب n^2 ایجاد شود.

بنابراین با ضرب x در طرفین داریم:

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

یک بار دیگر از طرفین رابطه‌ی فوق مشتق می‌گیریم:

$$\frac{1\times(1-x)^2-2(-1)(1-x)\times x}{(1-x)^4}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\Rightarrow\frac{(1-x)-2(-1)(x)}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\Rightarrow\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{n^2x^{n-1}}$$

۱۳۵ـ گزینه «۴» به طور کلی اگر $y=f(x)$ صعودی و $f(a)=c$ و $f(b)=d$ باشد، آن‌گاه:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_c^d f^{-1}(y)dy=bd-ac$$

بنابراین در این تست داریم:

$$\underbrace{\int_0^2 f(x)dx}_{\frac{1}{3}}+\int_0^2 f^{-1}(y)dy=2\times2-0\times0=4\Rightarrow\int_0^2 f^{-1}(y)dy=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$$

۱۳۶ـ گزینه «۱» می‌دانیم که $-1\le\sin x\le1$ پس $-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$ (توجه داریم که در ناحیه‌ی انتگرال‌گیری، $x>0$ است) پس داریم:

$$\int_n^{n+1}\frac{-1}{x}dx\le\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx\le\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\Rightarrow[-\mathrm{Ln}x]_n^{n+1}\le I_n\le[\mathrm{Ln}x]_n^{n+1}\Rightarrow \mathrm{Ln}n-\mathrm{Ln}(n+1)\le I_n\le\mathrm{Ln}(n+1)-\mathrm{Ln}n$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}\left(\frac{n}{n+1}\right)\le I_n\le\mathrm{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

وقتی $n\to\infty$ آنگاه $\frac{n}{n+1}$ و $\frac{n+1}{n}$ هر دو به عدد یک میل می‌کند و $\mathrm{Ln}(1)=0$ است پس:

$$0\le\lim_{n\to\infty}I_n\le0$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty}I_n=0$

روش تستی: یک روش ساده‌تر زیبا استفاده از مفهوم «مقدار میانگین در انتگرال‌ها» می‌باشد، برای تابع پیوسته f در بازه بسته $[a,b]$ همواره داریم:

$$\boxed{\int_a^b \mathbf{f(x)dx=f(c)(b-a)}}$$

که c متعلق به بازه $[a,b]$ می‌باشد. در این تست $a=n$، $b=n+1$ و $f(x)=\frac{\sin x}{x}$، لذا داریم:

$$I_n=\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin c}{c}[(n+1)-n]\Rightarrow \mathbf{I_n=\frac{\sin c}{c}}$$

از طرفی می‌دانیم $n<c<n+1$ و لذا وقتی $n\to\infty$ آن گاه $c\to\infty$ و بنابراین $\lim_{c\to\infty}\frac{\sin c}{c}=0$ و در نتیجه حد I_n برابر **صفر** خواهد شد.

۱۳۷ـ گزینه «۳» با توجه به گزینه‌ها واضح است باید مشتق μ نسبت به سه متغیر x، y و z حساب شود.

$$\mu_x=\frac{\partial\mu}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial r}(۲)+\frac{\partial\mu}{\partial s}(-۴)+\frac{\partial\mu}{\partial t}(۷)$$

$$\mu_y=\frac{\partial\mu}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial r}(۳)+\frac{\partial\mu}{\partial s}(-۱)+\frac{\partial\mu}{\partial t}(-۲)$$

$$\mu_z=\frac{\partial\mu}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial\mu}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=\frac{\partial\mu}{\partial r}(-۱)+\frac{\partial\mu}{\partial s}(۱)+\frac{\partial\mu}{\partial t}(۱)$$

با توجه به ضرایب به دست آمده داریم:
$$\mu_x+\mu_y+۵\mu_z=۲(\frac{\partial\mu}{\partial r})+۳(\frac{\partial\mu}{\partial r})+۵(-۱)\frac{\partial\mu}{\partial r}=۰$$

۱۳۸ـ گزینه «۲» فرض کنید $g(t)=\int_۱^{\sin t}\sqrt{۱+u^۴}\,du$ باشد و $h(x)=\int_۰^x g(t)\,dt$ طبق صورت سؤال ما مشتق دومِ تابع $h(x)$ را می‌خواهیم $(f(x)=\frac{d^۲}{dx^۲}h(x))$ با توجه به ضابطه‌ی $h(x)$ داریم:

$$h'(x)=۱\times g(x)-۰\ \Rightarrow\ h'(x)=g(x)\ \Rightarrow\ h''(x)=g'(x)$$

با توجه به ضابطه‌ی $g(t)$ داریم:
$$g'(t)=\cos t\times\sqrt{۱+\sin^۴ t}-۰$$

پس با قراردادن x به جای t داریم:
$$g'(x)=\cos x\sqrt{۱+\sin^۴ x}$$

به این ترتیب:
$$h''(x)=g'(x)=\cos x\sqrt{۱+\sin^۴ x}\ \Rightarrow\ h''(\pi)=\cos\pi\sqrt{۱+\sin^۴\pi}=-۱$$

۱۳۹ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $\begin{vmatrix}u=۵x+۲y+z\\ v=y-z+۵\\ w=۵z+۳\end{vmatrix}$ برای ساده‌تر شدن معادله‌ی این رویه استفاده می‌کنیم. ژاکوبین این دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xyz}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}۵&۲&۱\\ ۰&۱&-۱\\ ۰&۰&۵\end{vmatrix}=۲۵\ \Rightarrow J_{uvw}=\frac{۱}{۲۵}$$

با این تغییر متغیر رویه موردنظر به صورت $u^۲+v^۲+w^۲=۲۵$ در می‌آید. رویه جدید کره‌ای به شعاع ۵ است که حجم آن برابر $\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۴}{۳}\pi\times۵^۳$ است ولی این مقدار را باید در ژاکوبین ضرب کنیم که در این صورت جواب $\frac{۱}{۲۵}\times\frac{۴}{۳}\pi\times۵^۳=\frac{۲۰\pi}{۳}$ است.

۱۴۰ـ گزینه «۱» تابع $f(z)=az^۳$ که در آن $|a|=۱$ است، یک چند جمله‌ای از درجه‌ی ۳ است و برای آن داریم: $|f(۲i)|=|a(۲i)^۳|=۸|a|=۸$

بنابراین $f(z)=az^۳$ در شرط داده شده صدق می‌کند و همه‌ی ریشه‌های آن عبارتند از $z=۰$. فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

۱۴۱ـ گزینه «۱» با توجه به این‌که رابطه داده شده در صورت سؤال یعنی $\frac{a_{n+۱}}{a_n}\geq\frac{n}{n+۱}$ به ازای هر n برقرار است، ابتدا مقادیر این نامساوی را به ازای nهای متوالی (شروع از یک) به‌دست می‌آوریم و سپس این جملات را در هم ضرب می‌کنیم تا به کسر $\frac{a_{n+۱}}{a_۱}$ برسیم. یعنی:

$$n=۱\ \Rightarrow\ \frac{a_۲}{a_۱}\geq\frac{۱}{۲}$$

$$n=۲\ \Rightarrow\ \frac{a_۳}{a_۲}\geq\frac{۲}{۳}$$

$$n=۳\ \Rightarrow\ \frac{a_۴}{a_۳}\geq\frac{۳}{۴}$$

.

$$n=n\ \Rightarrow\ \frac{a_{n+۱}}{a_n}\geq\frac{n}{n+۱}$$

اکنون داریم:
$$\frac{a_۲}{a_۱}\times\frac{a_۳}{a_۲}\times\frac{a_۴}{a_۳}\times\cdots\times\frac{a_{n+۱}}{a_n}\geq\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\cdots\times\frac{n}{n+۱}$$

پس داریم:
$$\frac{a_{n+۱}}{a_۱}\geq\frac{۱}{n+۱}\ \Rightarrow\ a_{n+۱}\geq\frac{a_۱}{n+۱}\ \Rightarrow\ a_n\geq\frac{a_۱}{n}$$

با توجه به این‌که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ یک سری واگرا (سری هارمونیک) می‌باشد، بنابراین سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{n}$ نیز واگراست و طبق آزمون مقایسه سری بزرگتر یعنی $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ نیز واگراست.

به همین ترتیب نیز برای b_n داریم، $b_n \ge \frac{b_1}{\sqrt{n}}$ و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست، پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_1}{\sqrt{n}}$ نیز واگراست و طبق آزمون مقایسه سری بزرگتر یعنی $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ نیز واگراست.

۱۴۲ـ گزینه «۳»

روش اول: با مشتق‌گیری از طرفین تساوی داده شده به کمک فرمول مشتق از انتگرال، یعنی $(\int_a^u f(t)dt)' = u'f(u)$ ، داریم:

$$9 = 2xf(x^2) \Rightarrow f(x^2) = \frac{9}{2x} \xrightarrow{x^2=t} f(t) = \frac{9}{2\sqrt{t}}$$

با جایگذاری ضابطه f در معادله داده شده داریم:

$$1+9x = \int_0^{x^2}\frac{9}{2\sqrt{t}}dt \Rightarrow 1+9x = \frac{9}{\cancel{2}}(\cancel{2}\sqrt{t})\Big|_0^{x^2} \Rightarrow 1+\cancel{9x} = \cancel{9x} \Rightarrow 1=0$$

که تساوی حاصل غیرقابل قبول است و این بدین معناست که معادله جواب ندارد.

روش دوم: در این سؤال حل انتگرال راحت بوده، ولی سؤالاتی وجود دارد که نمی‌توان حاصل انتگرال را راحت حساب کرد، بنابراین حل دیگری از این نوع سؤال را ارائه می‌کنیم.

فرض کنید $g(x) = -9x + \int_0^{x^2} f(t)dt$، لذا داریم:

$$g'(x) = -9 + 2xf(x^2)$$

با توجه به اینکه برد f به صورت $[0,2]$ است، لذا $0 \le f(x^2) \le 2$ پس داریم: (دقت کنید که $0 \le x \le 2$ لذا $0 \le 2x \le 4$ خواهد بود)

$$0 \le 2x \le 4 \Rightarrow 0 \le 2xf(x^2) \le 8 \Rightarrow -9 \le g'(x) \le -1$$

بنابراین $g'(x)$ منفی است و این یعنی یک تابع اکیداً نزولی است و نتیجتاً حداکثر یک ریشه در بازهٔ $[0,2]$ دارد، حالا سراغ قضیه‌ی مقدار میانی می‌رویم:

$$g(0) = -1 \ , \ g(2) = -1-18+\int_0^4 f(t)dt \xrightarrow{f(t)\le 2} \int_0^4 f(t)dt \le \int_0^4 2dt = 8$$

پس $g(2) \le -11$ و لذا g بر بازه $[0,2]$ اصلاً ریشه ندارد.

۱۴۳ـ گزینه «۲» در زیر نشان می‌دهیم که $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ همگرای مشروط است.

ابتدا انتگرال داده شده را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$I = \int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

انتگرال $I = \int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$ یک انتگرال عادی است و بنابراین همگراست. برای محاسبه $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ از روش جز به جز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{-1}{x^2}dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{-\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$$

و انتگرال اخیر همگرای مطلق است، زیرا $|\frac{\sin x}{x^2}| \le \frac{1}{x^2}$ و $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ همگراست. از بحث فوق نتیجه می‌شود $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ همگراست. حال ثابت می‌کنیم $\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ یا به عبارتی $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ واگراست.

با استفاده از نامساوی روبرو:

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$$

کافی است نشان دهیم $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}dx$ واگراست (به عهده دانشجو). و آنگاه طبق آزمون مقایسه انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$ واگراست.

توضیح: انتگرال $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ به انتگرال دیریکله معروف است و مقدار آن برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

واضح است که در بازه $[1,+\infty)$: $\frac{1+\sin x}{\sqrt{1+x^3}} \leq \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}$ است، از طرفی می‌دانیم که $\int_{0}^{+\infty} \frac{2dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ یک انتگرال ناسره نوع P با $P>1$ و همگراست بنابراین طبق آزمون مقایسه برای انتگرال‌ها $\int_{1}^{+\infty} \frac{1+\sin x}{\sqrt{1+x^3}}dx$ همگراست.

۱۴۴ـ گزینه «۴» ابتدا دقت کنید که طبق فرمول مجموع سری هندسی داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

طرفین را در x ضرب می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n} = \frac{x}{(1-1)}$$

با مشتق‌گیری مجدد خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{(1-x^2)+2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

با ضرب طرفین در x به فرمول زیر می‌رسیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^{n} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \ , \ |x|<1$$

به ازای $x=\frac{1}{7}$ داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{7^{n+1}} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{7^{n}} = \frac{1}{7}\,\frac{\frac{1}{7}\times\frac{8}{7}}{(\frac{6}{7})^3} = \frac{8}{6^3} = \frac{1}{27}$$

بنابراین با خارج کردن جملات $n=0$ و $n=1$ داریم:

$$0+\frac{1}{49}+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{7^{n+1}} = \frac{1}{27} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{7^{n+1}} = \frac{1}{27}-\frac{1}{49} = \frac{22}{27\times 49}$$

۱۴۵ـ گزینه «۱» ابتدا فرمول کاهش مرتبه برای $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ را به دست می‌آوریم، با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow du = -\frac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

بنابراین:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\times\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\times I_n$$

با جایگذاری $a=2$ و $n=4$ داریم:

$$I_5 = \frac{1}{2(4)(2^2)}\left(\frac{x}{(x^2+4)^4}\right)\Big|_0^1 + \frac{2(4)-1}{2(4)(2^2)}I_4 \Rightarrow I_5 = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{625}-0\right)+\frac{7}{32}I_4 \xrightarrow{\times 32} 32I_5 = \frac{1}{625}+7I_4$$

۱۴۶ـ گزینه «۲» طبق نکته داریم:

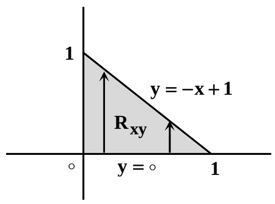
$$\int_{0}^{a} \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \frac{a}{2}$$

در این سؤال $f(x)=e^{x^2}$ و $a=1$، لذا حاصل انتگرال $\frac{1}{2}$ است.

۱۴۷ـ گزینه «۱» با فرض میدان برداری $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} = xy\vec{i} + (x^2+y^2)\vec{j}$ و به کمک قضیه گرین داریم:

$$W = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA = \iint_{R_{xy}} (2x - x)dA = \iint_{R_{xy}} xdA$$

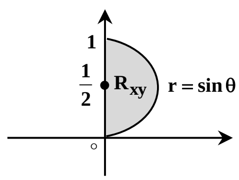
که در آن R_{xy} مثلث قائم‌الزاویه با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(0,1)$ در جهت مثلثاتی می‌باشد.



$$W = \iint_{R_{xy}} xdA = \int_0^1 \int_0^{-x+1} xydydx = \int_0^1 xy\Big|_0^{-x+1} dx$$

$$= \int_0^1 x(-x+1)dx = \int_0^1 (-x^2+x)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-2+3}{6} = \frac{1}{6}$$

۱۴۸ـ گزینه «۴» با توجه به توضیحاتی که در صورت سؤال آمده است، کران‌های انتگرال سه‌گانه به شکل زیر خواهد بود:



$$I = \iiint_D (x^2+y^2)dV = \iint_{R_{xy}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2)dzdA = \iint_{R_{xy}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dA$$

که در آن R_{xy} نیم‌دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$ واقع در ربع اول صفحه مختصات است.

به کمک تغییر متغیر قطبی، مقدار انتگرال دوگانه حاصل برابر است با:

$$I = \iint_{R_{xy}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dA = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \int_0^{\sin\theta} (r^2)^{\frac{3}{2}} rdrd\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \int_0^{\sin\theta} r^4 drd\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^5\theta}{5} d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin^2\theta)^2 \sin\theta d\theta = \frac{1}{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\cos^2\theta)^2 \sin\theta d\theta$$

به کمک تغییر متغیر $u = \cos\theta$ و $du = -\sin\theta d\theta$ داریم:

$$I = \frac{-1}{5}\int_1^0 (1-u)^2 du = \frac{-1}{5}\int_1^0 (1-2u^2+u^4)du = \frac{+1}{5}\left(u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right)_0^1 = \frac{8}{75}$$

۱۴۹ـ گزینه «۳» به کمک قضیه دیورژانس داریم:

$$\oiint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_T \mathrm{div}\vec{F}dV$$

که در آن $\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ است. بنابراین با توجه به ضابطه F داریم:

$$\oiint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_T (y^2+z^2+x^2)dV$$

که در آن T کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۳ می‌باشد، با استفاده از تغییر متغیر در مختصات کروی و با توجه به اینکه $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$ داریم:

$$\iiint_T (x^2+y^2+z^2)dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho^2\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = 2\pi\int_0^{\pi} \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^3 \sin\varphi d\varphi$$

$$= 2\pi\left(\frac{243}{5}\right)\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{486\pi}{5}(-\cos\varphi)_0^{\pi} = \frac{486\pi}{5}(1+1) = \frac{972\pi}{5}$$

نکته: در صورت سؤال اشتباهاً به جای $\iint_S F.nds$ تایپ شده $\iint_S F.ds$.

۱۵۰ـ گزینه «۴» دقت کنید که سطح S بسته نیست ولی با اضافه کردن سطح S' $(z=0)$ به آن داریم:

$$I = \iint_{SUS'} \vec{F}.\vec{n}d\sigma - \iint_{S'} \vec{F}.\vec{n}d\sigma = I_1 - I_2$$

ابتدا I_1 را حساب می‌کنیم:

با استفاده از قضیه دیورژانس می‌دانیم که شار برونسوی عبوری از SUS' برابر است با:

$$I_1 = \oiint_{SUS'} \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_T \mathrm{div}\vec{F}dV$$

که در آن $\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$. با توجه به ضابطه $\vec{F}$ و توضیحاتی که در صورت تست آمده داریم:

$$I_1 = \oiint_{SUS'} \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_{R_{xy}} \int_0^{4-x^2-y^2} (3+0+2z)dzdA = \iint_{R_{xy}} (3z+z^2)\Big|_0^{4-x^2-y^2} dA = \iint_{R_{xy}} \left(3(4-x^2-y^2)+(4-x^2-y^2)^2\right)dA$$

که در آن R_{xy} تصویررویه $x^2+y^2+z=4$ در صفحه xy می‌باشد، با قرار دادن $z=0$، تصویر رویه مذکور در صفحه xy به دست می‌آید که دایره‌ای به معادله $x^2+y^2=4$ است، یعنی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲. بنابراین با تغییر متغیر قطبی داریم:

$$\Rightarrow\ I_1=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(3(4-r^2)+(r^2)^2)r\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^{2}(12r-3r^3+r^5)dr$$

$$=2\pi(6r^2-\frac{3}{4}r^4+\frac{r^6}{6})\Big|_0^2=2\pi(24-12+\frac{32}{3})=2\pi(12+\frac{32}{3})=2\pi(\frac{36+32}{3})=\frac{136\pi}{3}$$

$$I_2=\iint_{S'}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S'}\vec{F}.(-K)dA=-\iint_{S'}z^2dA=0$$

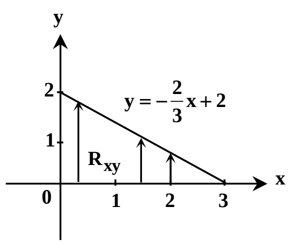
پس $I=I_1$.

توجه کنید که در این سؤال حتی اگر داوطلب متوجه بسته نبودن سطح S نمی‌شد، باز هم به جواب صحیح می‌رسید! سؤالاتی که با کیفیت طرح می‌شوند طوری هستند که انتگرال روی سطح S' صفر نمی‌شود و لذا حاصل انتگرال روی سطح S با حاصل انتگرال روی سطح SUS' تفاوت می‌کند و اتفاقاً طراح هر دو جواب را در گزینه‌ها قرار می‌دهد تا تفاوت داوطلب قوی با سایرین معلوم شود!

۱۵۱ـ گزینه «۳» برای محاسبه‌ی انتگرال رویه‌ایِ داده شده به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$\oiint_S f ds=\iint_{R_{xy}}f(x,y,z)\frac{|\vec{\nabla}g|}{|g_z|}dA$$

که در آن R_{xy} تصویر رویه‌ی S در صفحه‌ی xy و g معادله‌ی رویه‌ی S است.



$$\oiint_S f ds=\iint_{R_{xy}}(x+y)\frac{|2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}|}{|1|}dA$$

$$=\int_0^3\int_0^{-\frac{2}{3}x+2}(x+y)\sqrt{2^2+3^2+1^2}\,dydx=\sqrt{14}\int_0^3(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^{-\frac{2}{3}x+2}dx$$

$$=\sqrt{14}\int_0^3(x(-\frac{2}{3}x+2)+\frac{(-\frac{2}{3}x+2)^2}{2})dx=\sqrt{14}\int_0^3(-\frac{2}{3}x^2+2x+\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x+2)dx$$

$$=\sqrt{14}\int_0^3(-\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x+2)dx=\sqrt{14}(-\frac{4x^3}{27}+\frac{x^2}{3}+2x)\Big|_0^3=\sqrt{14}(-4+3+6)=5\sqrt{14}$$

۱۵۲ـ گزینه «۲» با ضرب طرفین تساوی داده شده در ρ داریم:

$$3\rho\sin\varphi\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=5\rho\cos\varphi+12$$

به کمک اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ داریم:

$$3\rho\sin\varphi(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta)=5\rho\cos\varphi+12$$

از طرفی می‌دانیم که در مختصات کروی $\rho\cos\varphi=z$، $\rho\sin\varphi\sin\theta=y$ و $\rho\sin\varphi\cos\theta=x$، بنابراین معادله فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}(x+y)=5z+12\Rightarrow\frac{3\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}y-5z=12$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود، معادله حاصل معادله یک صفحه می‌باشد.

۱۵۳ـ گزینه «۱» ریشه‌های چهارم $4e^{\frac{4\pi i}{3}}$ به این صورت هستند:

$$z=\sqrt[4]{4}e^{i\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2})}\ ;\ k=0,1,2,3$$

چون z_1 در ربع اول قرار دارد، پس $z_1=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$ است. z_2 در ربع دوم قرار دارد. پس داریم:

$$z_2=\sqrt{2}e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})i}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}.e^{\frac{\pi}{2}i}=iz_1$$

z_3 هم در ربع سوم قرار دارد:

$$z_3=\sqrt{2}e^{(\frac{\pi}{3}+\pi)i}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}.e^{\pi i}=-z_1$$

z_4 در ربع چهارم قرار دارد:

$$z_4=\sqrt{2}e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2})i}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}.e^{\frac{3\pi}{2}i}=-iz_1\Rightarrow\frac{z_3+z_4}{z_1+z_2}=\frac{-z_1-iz}{z_1+iz_1}=\frac{-(z_1+iz_1)}{z_1+iz_1}=-1$$

۱۵۴ـ گزینه «۱» با فاکتور گرفتن از $\frac{1}{n}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}tg^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}tg^{-1}\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{n}{n}tg^{-1}\left(\frac{n}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}tg^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)$$

پس یک حد مجموع ریمانی داریم که در آن $f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{k}{n}tg^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)$ است پس $f(x)=xtg^{-1}(x)$ است.

$$\text{جواب حد} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xtg^{-1}(x)dx$$

با استفاده از جزء به جزء داریم:

$$dv = xdx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\ ,\ u=tg^{-1}(x) \Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\text{جواب حد} = \frac{x^2}{2}tg^{-1}(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}tg^{-1}(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left[x-tg^{-1}(x)\right]_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

۱۵۵ـ گزینه «۲» انتگرال A در $x=0$ دارای ناسرگی است. با استفاده از همارزی‌ها و قاعده‌ی کمترین درجه داریم:

$$\frac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}+x^3\sqrt{x}}\simeq\frac{1-1+\frac{x^2}{2}}{x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}}}\simeq\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

پس $p=\frac{1}{2}<1$ است و انتگرال A در $x=0$ شرط همگرایی را دارد.

انتگرال B در $x\to\infty$ باید بررسی شود. با توجه به قاعده‌ی سرعت رشد داریم:

$$\left|\frac{2+\sin x}{e^x+x+1}\right|\approx\left|\frac{2+\sin x}{e^x}\right|\le 3e^{-x}$$

انتگرال $3e^{-x}$ همگراست:

$$\int_1^\infty 3e^{-x}dx=-3e^{-x}\Big|_1^\infty=\frac{3}{e}$$

پس انتگرال B همگراست.

۱۵۶ـ گزینه «۳» ابتدا سری توانی را در شکل استاندارد آن می‌نویسیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n n^{n-1}}{(n-1)!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$$

اکنون با استفاده از همارزی استرلینگ، شعاع همگرایی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n n^{n-1}}{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\frac{n}{e}}=2e\Rightarrow R=\frac{1}{2e}$$

توجه کنید که وقتی $n\to\infty$ داریم:

$$\sqrt[n]{(n-1)!}\simeq\sqrt[n]{n!}\simeq\frac{n}{e}$$

۱۵۷ـ گزینه «۱»

روش اول: با استفاده از قضیه فشردگی حاصل این حد را به دست می‌آوریم. در بازه‌ی $1\le x\le 2$ داریم $1\le x^2\le 4$ و $e\le e^{x^2}\le e^4$ بنابراین $e\sin(nx)\le e^{x^2}\sin(nx)\le e^4\sin(nx)$ و با انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$e\int_1^2\sin(nx)dx\le\int_1^2 e^{x^2}\sin(nx)dx\le e^4\int_1^2\sin(nx)dx\Rightarrow\left[-\frac{e}{n}\cos(nx)\right]_1^2\le S_n\le\left[-\frac{e^4}{n}\cos(nx)\right]_1^2$$

$$\Rightarrow\frac{\cos(n)-\cos(2n)}{n}e\le S_n\le\frac{\cos(n)-\cos(2n)}{n}e^4$$

در هر دو طرف این نامساوی وقتی $n\to\infty$ میل کند خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n)-\cos(2n)}{n}=\frac{\text{کران‌دار}}{\infty}=0$$

در نتیجه طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=0$$

روش دوم: در محاسبه حد انتگرال‌هایی که به صورت $\int_a^b g(x)f_n(x)dx$ است، یعنی از حاصل‌ضرب دو عبارت تشکیل شده است که یکی از آن‌ها مستقل از n می‌باشد. از قضیه مقدار میانگین به شکل خاصی استفاده می‌شود به این صورت که به جای $g(x)$ قرار می‌دهیم $g(c_n)$ که $a<c_n<b$ است و با خارج کردن $g(c_n)$، حاصل انتگرال $\int_a^b f_n(x)dx$ را به دست می‌آوریم. در این مثال با فرض $g(x)=e^{x^2}$ و $f_n(x)=\sin(nx)$ داریم:

$$S_n=\lim_{n\to+\infty}\int_1^2 e^{c_n^2}\sin(nx)dx=\lim_{n\to+\infty}e^{c_n^2}\int_1^2\sin(nx)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_1^2 e^{c_n^2}\times\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)\Big|_1^2=\lim_{n\to+\infty}e^{c_n^2}\times\left(-\frac{1}{n}(\cos(2n)-\cos(n))\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}e^{c_n^2}\times\left(\frac{\cos(n)-\cos(2n)}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}e^{c_n^2}\times\left(\frac{\text{عدد کراندار}}{+\infty}\right)=\lim_{n\to+\infty}e^{c_n^2}\times(0)=0$$

توجه داشته باشید که $1<c_n<2$ و در نتیجه $1<c_n^2<4$ می‌باشد و در نتیجه $e^1<e^{c_n^2}<e^4$ می‌باشد که رفتار دنباله c_n تأثیری در مقدار حد نخواهد داشت.

۱۵۸ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor}}{n}$ و $B=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\sqrt{2}}$. ابتدا تکلیف سری B را معلوم می‌کنیم:

با فرض $a_n=ne^{-\sqrt{n}}$ و $b_n=\frac{1}{n^2}$ داریم: سری B با توجه به آزمون مقایسه حدی همگراست. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}n^3e^{-\sqrt{n}}=0<1\Rightarrow$

برای سری A بهترین روش استفاده از آزمون آبل است. این آزمون را یادآوری می‌کنیم.

آزمون آبل: اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ی مثبت و از مرتبه‌ای به بعد نزولی و همگرا به صفر باشد و مجموع جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$، یعنی $\sum_{n=1}^{k}b_n$، کراندار باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ همگراست. همچنین اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا و از مرتبه‌ای به بعد یکنوا باشد و سری $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ همگرا باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ همگراست.

در این سؤال $a_n=\frac{1}{n}$ و $b_n=(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor}$ که می‌دانیم مجموع جزئی جملات سری $\sum_{n=1}^{k}b_n$ کران‌دار است. پس سری $\sum a_nb_n$ یا همان $\sum\frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor}}{n}$ همگراست.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵۹ـ گزینه «۲» وقتی $(x,y)\to(0,0)$ با استفاده از هم‌ارزی سینوس داریم $\sin x\simeq x$ و $\sin y\simeq y$ بنابراین داریم:

$$A=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\sin x+\sin y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x+y}=1$$

در مورد حد B ابتدا از هم‌ارزی سینوس در صورت کسر استفاده می‌کنیم. البته هم‌ارزی $\sin x^2\simeq x^2$ کافی نیست، زیرا x^2 از صورت حذف می‌شود پس هم‌ارزی را تا دو جمله می‌نویسیم:

$$B=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-\frac{(x^2)^3}{3!}-x^2}{x^2+y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-\frac{1}{6}x^6}{x^2+y}$$

روی مسیر $y=-x^2+mx^6$ داریم:

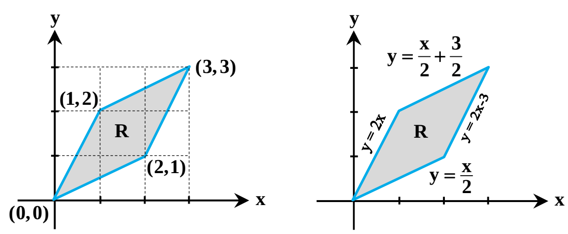
$$B=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^6}{x^2-x^2+mx^6}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^6}{mx^6}=-\frac{1}{6m}$$

بنابراین مقدار حد B بستگی به m دارد. در نتیجه B وجود ندارد.

توجه: انتخاب مسیر $y=-x^2+mx^6$ به این جهت مناسب بود که درجه‌ی صورت و مخرج را برابر می‌کرد.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶۰ـ گزینه «۳» معادله‌ی مرزهای ناحیه را مطابق شکل به دست می‌آوریم.



در واقع ناحیه‌ی D به خطوط $y-2x=0$ و $y-2x=-3$ و $2y-x=0$ و $2y-x=3$ محدود شده است. با فرض $u=y-2x$ و $v=2y-x$ داریم: $u=0$، $u=-3$، $v=0$ و $v=3$. ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xy}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-3\Rightarrow J_{uv}=\frac{1}{-3}$$

پس قدرمطلق ژاکوبین u و v برابر با $|J_{uv}|=\frac{1}{3}$ است. با این توضیحات داریم:

$$I=\iint_R\frac{e^{2x-y}}{1-2x+4y}dydx=\int_0^3\int_{-3}^{0}\frac{e^{-u}}{1+2v}\frac{1}{3}dudv=\frac{1}{3}\int_0^3\frac{1}{1+2v}[-e^{-u}]_{-3}^{0}dv=\frac{e^3-1}{3}\int_0^3\frac{dv}{1+2v}=\frac{e^3-1}{3}[\frac{1}{2}Ln(1+2v)]_0^3=\frac{e^3-1}{3}(\frac{1}{2}Ln7)$$

در نتیجه داریم:

$$I=\frac{1}{3}Ln\sqrt{7}(e^3-1)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶۱ـ گزینه «۲» فاصله‌ی نقطه‌ی (x,y,z) از مبدأ توسط تابع $f(x,y,z)=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ داده می‌شود. برای سادگی بیشتر فرض می‌کنیم $F(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲$ و حالا کمترین و بیشترین مقدار F را تحت دو قید $\begin{cases}g: x+y+۲z=۲\\ h: z=x^۲+y^۲\end{cases}$ به دست می‌آوریم. ابتدا معادله‌ی قید $h: z=x^۲+y^۲$ را در تابع F و در قید g قرار می‌دهیم تا با حذف متغیر z به یک مسأله‌ی دو متغیره با یک تابع هدف $F(x,y)$ و یک قید g دست پیدا کنیم، با این جایگذاری داریم:

$$F=x^۲+y^۲+z^۲=x^۲+y^۲+x^۲+y^۲ \Rightarrow F=۲(x^۲+y^۲)$$

$$g: x+y+۲z=۲ \Rightarrow g: x+y+۲x^۲+۲y^۲=۲$$

اکنون از روش لاگرانژ به این صورت استفاده می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{F_x}{g_x}=\frac{F_y}{g_y} \Rightarrow \frac{۴x}{۱+۴x}=\frac{۴y}{۱+۴y} \Rightarrow ۴x+۱۶xy=۴y+۱۶xy \Rightarrow y=x$$

با قرار دادن $y=x$ در محدودیت g داریم:

$$x+x+۲x^۲+۲x^۲=۲ \Rightarrow ۲x^۲+x-۱=\circ \xrightarrow{\Delta=۹} x=\frac{-۱\pm۳}{۴}=\frac{۱}{۲},-۱$$

با توجه به $y=x$ نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ به عنوان نزدیک‌ترین و دورترین نقاط از مبدأ به دست می‌آیند.

$$B \text{ از } A \text{ فاصله‌ی } =\sqrt{(-۱-\frac{۱}{۲})^۲+(-۱-\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۹}{۴}+\frac{۹}{۴}}=\sqrt{۲\times\frac{۹}{۴}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

سازمان سنجش گزینه (۳) را به عنوان جواب اعلام کرده که اشتباه است.

۱۶۲ـ گزینه «۴» C یک مرز بسته است. از قضیه‌ی استوکس استفاده می‌کنیم. منحنی C مرز بخشی از صفحه‌ی $g: ۳x+۳y+z=۴$ است که تصویر آن بر صفحه‌ی xoy درون دایره‌ی $x^۲+y^۲=۲$ است.

$$I=\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

$$\text{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ e^{x^۲}+y & \sin y^۲-z & z^۵-۲x\end{vmatrix}=(\circ+۱)\vec{i}-(-۲-\circ)\vec{j}+(\circ-۱)\vec{k}=\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$$

با توجه به معادله‌ی g داریم:

$$\vec{n}d\sigma=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{(۳,۳,۱)}{|۱|}dA$$

در نتیجه داریم:

$$I=\iint_A(۱,۲,-۱).(۳,۳,۱)dA=\iint_A(۳+۶-۱)dA=۸\times(A \text{ مساحت})=۸\times۲\pi=۱۶\pi$$

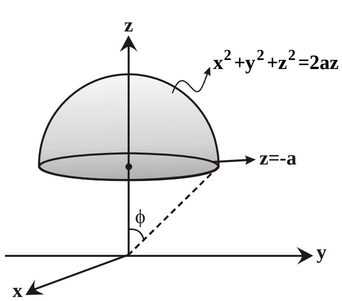
۱۶۳ـ گزینه «۱» کره‌ای به شعاع a که در بالای صفحه‌ی xy قرار دارد و در مبدأ مختصات بر این صفحه مماس است، باید کره‌ای به مرکز $(\circ,\circ,a)$ و شعاع a باشد که معادله‌ی این کره به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$x^۲+y^۲+(z-a)^۲=a^۲ \Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=۲az$$

در مختصات کروی این معادله را به این شکل می‌نویسیم:

$$\rho^۲=۲a\rho\cos\phi \Rightarrow \rho=۲a\cos\phi$$

و روی صفحه‌ی $z=a$ داریم $\rho=\cos\phi=a$ پس $\rho=\frac{a}{\cos\phi}=a\sec\phi$. این‌ها حدود ρ را مشخص می‌کنند.



روی محور zهای مثبت داریم $\phi=\circ$. در محل برخورد صفحه‌ی $z=a$ با کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۲az$ خواهیم داشت: $x^۲+y^۲=a^۲$. با جایگذاری $x=\circ$ می‌بینیم که در صفحه‌ی yz نقطه‌ی $(y,z)=(a,a)$ به دست می‌آید. در این نقطه داریم:

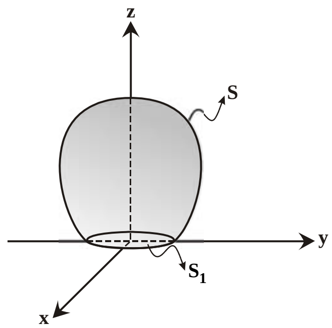
$$\phi=tg^{-۱}(\frac{y}{z})=tg^{-۱}(\frac{a}{a})=\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین $\circ\le\phi\le\frac{\pi}{۴}$ است.

حدود θ در مختصات کروی، وقتی که هیچ محدودیتی روی x و y نداشته باشیم به صورت $\circ\le\theta\le۲\pi$ است.

ژاکوبین دستگاه کروی $J=\rho^۲\sin\phi$ است.

$$I=\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{\frac{\pi}{۴}}\int_{a\sec\phi}^{۲a\cos\phi}\rho^۲\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$



۱۶۴ـ گزینه «۲» سطح S بسته نیست. برخورد این کره با صفحه‌ی $z=0$ دایره‌ی $x^2+y^2+(0-1)^2=5$ یعنی $x^2+y^2=4$ است. فرض می‌کنیم S_1 بخشی از صفحه‌ی $z=0$ باشد که درون دایره‌ی $x^2+y^2=4$ قرار گرفته در این صورت SUS_1 بسته است و از قضیه‌ی دیورژانس داریم:

$$I_1=\iint_{SUS_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint_D(-3x^2\sin x^3+4y^3+x)dv$$

همه‌ی عبارات در این انتگرال نسبت بـه x و y فـرد هسـتند در حـالی کـه معادلـه‌ی $x^2+y^2+(z-1)^2=5$ نسبت به x و y زوج است پس حاصل این انتگرال صفر اسـت. حـالا انتگـرال روی S_1 را حسـاب مـی‌کـنیم. در سطح S_1 داریم $z=0$ بنابراین:

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dydx=\sqrt{1+0}\,dydx$$

و بردار قائم برون‌سو به صورت $\vec{n}=-\vec{k}$ است پس داریم:

$$I_2=\iint_{S_1}\vec{F}.(-\vec{k})d\sigma=-\iint_{S_1}(1+xz)dydx=-\iint_{S_1}(1+0)dydx=-(S_1\ \text{مساحت})=-4\pi$$

در نهایت داریم:

$$I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=I_1-I_2=0-(-4\pi)=4\pi$$

۱۶۵ـ گزینه «۴» S سطح بسته نیست. برخورد این کره با صفحه‌ی $z=0$ دایره‌ی $x^2+y^2=9$ است. فـرض مـی‌کـنیم S_1 در صـفحه‌ی $z=0$ درون ایـن دایره باشد. SUS_1 سطح بسته است. با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس داریم:

$$I_1=\iint_{SUS_1}\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint_D(2+1+1)dv=4\times(D\ \text{حجم})=4\times(\text{حجم نیم‌کره})=4\times(\frac{1}{2})(\frac{4}{3}\pi\times3^3)=72\pi$$

حالا روی سطح S_1 داریم $z=0$ پس بردار قائم یکه‌ی برونسو در S_1 به صورت $\vec{n}=-\vec{k}$ است پس داریم:

$$I_2=\iint_{S_1}\vec{F}.(-\vec{k})d\sigma=-\iint_{S_1}(2+z)d\sigma=-\iint_{S_1}(2+0)d\sigma=-2\times(S_1\ \text{مساحت})=-2\times9\pi=-18\pi\Rightarrow I=I_1-I_2=72\pi+18\pi=90\pi$$

۱۶۶ـ گزینه «۴» با مرتب کردن و دسته‌بندی جملات داریم:

$$I=\int_C\frac{x^3(x^2+y^2)-3y}{x^2+y^2}dx+\frac{y(x^2+y^2)+3x}{x^2+y^2}dy=\int_C(x^3-\frac{3y}{x^2+y^2})dx+(y+\frac{3x}{x^2+y^2})dy$$

$$=\underbrace{\int_C x^3dx+ydy}_{I_1}+3\underbrace{\int_C\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy}_{I_2}$$

برای محاسبه‌ی I_1 با استفاده از قضیه‌ی گرین داریم:

$$I_1=\iint_D(Q_x-P_y)dydx=\iint_D(0-0)dydx=0$$

در مورد I_2 که میدان برداری معروفی است، طبق متن کتاب چون نقطه‌ی $(0,0)$ درون مرز قرار دارد خواهیم داشت:

$$I_2=2\pi$$

در نتیجه داریم:

$$I=I_1+3I_2=0+3(2\pi)=6\pi$$

۱۶۷ـ گزینه «۱» ابتدا توجه داشته باشید که وقتی $n\to\infty$، $\sin\frac{1}{n}$ به سمت صفر میل می‌کند، ولی مقدار $\cos n$ نامعلوم و فقط می‌دانیم که در بازه ۱− تا ۱ قرار دارد. در واقع در این حالت با توجه به زوج یا فرد بودن n، با کمک گرفتن از قضیه ساندویچ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}[2\sin\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cos n]^n=\lim_{n\to\infty}[2\sin0+\frac{1}{3}\cos n]^n=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{3}\cos n)^n$$

$$-\frac{1}{3}\le\frac{1}{3}\cos n\le\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}n\in E\Rightarrow0\le(\frac{1}{3}\cos n)^n\le(\frac{1}{3})^n\\ n\in O\Rightarrow(-\frac{1}{3})^n\le(\frac{1}{3}\cos n)^n\le(\frac{1}{3})^n\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{3})^n=\lim_{n\to\infty}0=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{3})^n=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{3}\cos n)^n=0$$

۱۶۸ـ گزینه «۳» با توجه به حدود دو انتگرال، هر دو فقط در بی‌نهایت ناسره هستند. برای بررسی انتگرال A آن را به دو انتگرال می‌شکنیم:

$$A=\int_1^\infty \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx \sim \int_1^\infty \frac{1-4\sin 2x}{x^3}dx=\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^\infty \frac{-4\sin 2x}{x^3}dx}_{I_2}$$

با توجه به نکات مربوط به همگرایی انتگرال $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$، که $a>0$ چون در انتگرال I_1، $p=3>1$ است، این انتگرال همگرای مطلق است. در مورد انتگرال I_2 نیز، با توجه به نکات مربوط به همگرایی انتگرال‌های به فرم $\int_a^\infty \frac{\sin kx}{x^p}dx$، که $a>0$, $k\neq 0$، با توجه به این‌که $p=3>1$، این انتگرال نیز همگرای مطلق، و در کل انتگرال A همگرای مطلق است. در مورد انتگرال B نیز مطابق مورد قبل، با توجه به نکات مربوط به همگرایی انتگرال‌های به فرم $\int_a^\infty \frac{\sin kx}{x^p}dx$، که $a>0$, $k\neq 0$، با توجه به این‌که $p=1$، این انتگرال همگرای مشروط است.

۱۶۹ـ گزینه «۱» برای حل این سؤال ساده، کافیست سری دوم را به ضرایب فرد و زوج تقسیم کنیم.

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\alpha-\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

حال برای به دست آوردن سری آخر، از تفکیک سری اولیه سؤال استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}=\alpha-\frac{1}{4}\alpha=\frac{3}{4}\alpha \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\alpha-\frac{3}{4}\alpha\right)=\frac{1}{4}\times\frac{-\alpha}{2}=-\frac{\alpha}{8}$$

۱۷۰ـ گزینه «۳» با توجه به این که مبدأ تنها ریشه مخرج است، با تغییر متغیری که جملات مخرج را هم درجه کند، حد داشتن این تابع را بررسی می‌کنیم:

$$y=Y\ ,\ x^2=X^4 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^4}\approx \lim_{(X,Y)\to(0,0)}\frac{X^4Y}{X^4+Y^4}$$

در این حالت با توجه به این‌که درجه صورت از مخرج بیشتر است، پس این حد موجود و برابر صفر است. البته می‌توان از تبدیل به فرم قطبی نیز استفاده کرد:

$$L=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^4}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta\times r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta+r^4\sin^4\theta}=\lim_{r\to 0}\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta}=\lim_{r\to 0}\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+0}=\lim_{r\to 0} r\sin\theta=0$$

۱۷۱ـ گزینه «۴» تابع h از مجموع دو تابع همگن از درجه ۰ و ۱ است، زیرا:

$$h_1(\lambda x,\lambda y)=f\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)=h_1(x,y)\ \Rightarrow n_1=0$$

$$h_2(\lambda x,\lambda y)=\lambda xg\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)=\lambda xg\left(\frac{y}{x}\right)=\lambda h_2(x,y)\ \Rightarrow n_2=1$$

حال از قضیه اویلر مرتبه دوم استفاده می‌کنیم:

$$x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 (h_1+h_2)}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 (h_1+h_2)}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 (h_1+h_2)}{\partial y^2}$$

$$=x^2\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 h_1}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}+x^2\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 h_2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2}$$

$$=n_1(n_1-1)h_1+n_2(n_2-1)h_2=0\times(-1)h_1+1(1-1)h_2=0\ \Rightarrow x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=-2xy\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}$$

۱۷۲ـ گزینه «۱» محل برخورد استوانه‌های $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ناحیه‌ی D ناحیه‌ی درون این دو استوانه باشد. تصویر D بر صفحه‌ی xoy دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ است. پس در این ناحیه $-a\le x\le a$ و $-\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2}$ است. کران‌های z هم از معادله‌ی $x^2+z^2=a^2$ به صورت $-\sqrt{a^2-x^2}\le z\le\sqrt{a^2-x^2}$ به دست می‌آیند.

با توجه به آن‌که $\pm x$ و $\pm y$ و $\pm z$ معادله‌ی استوانه‌ها را تغییر نمی‌دهند، پس ناحیه‌ی D نسبت به همه‌ی صفحات متقارن است. حجم واقع در $\frac{1}{8}$ اول را حساب کرده و ۸ برابر می‌کنیم.

$$\text{حجم}\ I=\iiint dxdydz\ \Rightarrow I=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}dxdydz=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\sqrt{a^2-z^2}\,dydz$$

$$=\int_0^a \sqrt{a^2-z^2}\,y\Big]_0^{\sqrt{a^2-z^2}}dz=\int_0^a (a^2-z^2)dz=a^2z-\frac{z^3}{3}\Big]_0^a\ \Rightarrow I=a^3-\frac{a^3}{3}=\frac{2}{3}a^3$$

۱۷۳ـ گزینه «۴» می‌دانیم که $\sec^2 x = 1+tg^2 x$، همچنین با انتخاب $u = tgx$ داریم $du = (1+tg^2 x)dx$. با توجه به این مطالب داریم:

$$\int \sec^4 x\,dx = \int \sec^2 x.\sec^2 x\,dx = \int (1+tg^2 x)\underbrace{(1+tg^2 x)dx}_{du} = \int (1+u^2)du = u+\frac{u^3}{3}+c = tgx+\frac{tg^3 x}{3}+c$$

حالا با جایگذاری کران‌ها داریم:

$$I = [tgx+\frac{tg^3 x}{3}]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

۱۷۴ـ گزینه «۴» می‌دانیم که $\int_a^b f'(x)dx = f(x)|_a^b$ البته این تساوی به شرطی برقرار است که تابع $f(x)$ در بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

تابع $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. پس برای استفاده از فرمول فوق باید بازه‌های $(-1,0)$ و $(0,1)$ را از هم جدا کنیم:

$$I = \int_{-1}^{+1} f'(x)dx = \int_{-1}^{0} f'(x)dx + \int_0^1 f'(x)dx = f(x)|_{-1}^{0} + f(x)|_0^1 = f(0^-)-f(-1)+f(1)-f(0^+)$$

با توجه به ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ می‌بینیم که:

$$f(0^-) = \frac{1}{1+2^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1 \quad , \quad f(0^+) = \frac{1}{1+2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$f(1) = \frac{1}{1+2^1} = \frac{1}{3} \quad , \quad f(-1) = \frac{1}{1+2^{-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

در نتیجه:

$$I = 1-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-0 = \frac{2}{3}$$

۱۷۵ـ گزینه «۴» جمله عمومی سری را می‌توان به صورت $\frac{(a-b)(a-2b)\cdots(a-nb)}{(n+1)!}x^{n+1}$ در نظر گرفت، در این صورت وقتی $n\to\infty$، جمله عمومی هم‌ارز $\frac{(-b)(-2b)\cdots(-nb)}{(n+1)!}x^{n+1}$ یا $\frac{(-1)^n b^n}{n+1}x^{n+1}$ است (برای توضیح بیشتر دقت کنید که گزینه‌ها هم به a بستگی ندارند و می‌توانید حالت $a=0$ را در نظر بگیرید. در واقع از هر پرانتز که به صورت $(a-nb)$ است فقط $-nb$ باقی می‌ماند). شعاع همگرایی برابر است با:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{b^n}{n+1}}} = \frac{1}{b} \Rightarrow |x| < \frac{1}{b} \Rightarrow -\frac{1}{b} < x < \frac{1}{b}$$

در نقاط مرزی، سری به صورت زیر در می‌آید:

$x = \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} \Rightarrow$ یک سری متناوب همگرا

$x = \frac{-1}{b} \Rightarrow -\frac{1}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \Rightarrow$ یک سری مثبت واگرا

۱۷۶ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. معادله‌ی $x^2+y^2=1$ نشان می‌دهد تصویر S بر صفحه‌ی xoy درون دایره‌ی واحد است. مساحت رویه S برابر است با:

$$S = \iint_S d\sigma = \iint_D \frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g.\vec{k}|}dA$$

برای $g(x,y,z): 3x+4y+12z-1=0$ داریم:

$$\vec{\nabla} g(x,y,z) = (3,4,12) \to |\vec{\nabla} g| = \sqrt{9+16+144} = 13 , |\vec{\nabla} g.\vec{k}| = 12$$

چون تصویر سطح بر روی صفحه xoy درون دایره $x^2+y^2=1$ است، لذا داریم:

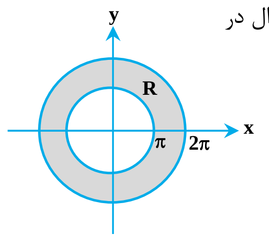
$$S = \iint_S d\sigma = \iint_D \frac{13}{12}dA = \frac{13}{12}(\text{مساحت دایره به شعاع ۱}) = \frac{13}{12}\times\pi(1)^2 = \frac{13\pi}{12}$$

۱۷۷ـ گزینه «۱» منحنی $r(\theta)=4\sin\theta$ دایره‌ای به قطر ۴ است که مرکز آن نقطه $(0,2)$ روی محور yها قرار دارد. یک دور کامل از این دایره در محدوده $0\le\theta\le\pi$ طی می‌شود. مساحت حاصل از دوران $r=f(\theta)$ حول محور xها برابر است با $S=2\pi\int_0^\pi y\sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)}d\theta$ که البته در آن $y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$ است.

$$S=2\pi\int_0^\pi 4\sin\theta.\sin\theta\sqrt{16\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta=8\pi\int_0^\pi\sin^2\theta\sqrt{16}d\theta=32\int_0^\pi\sin^2\theta d\theta=32\int_0^\pi\frac12(1-\cos2\theta)d\theta$$

$$=16\pi(\theta-\frac12\sin2\theta)\Big|_0^\pi=16\pi(\pi)=16\pi^2$$

۱۷۸ـ گزینه «۳» ناحیه انتگرال‌گیری ناحیه بین دو دایره به مرکز مبدأ و شعاع‌های π و 2π است بنابراین حل انتگرال در دستگاه قطبی ساده‌تر خواهد بود. به‌وضوح $0\le\theta\le2\pi$ و کران‌های r نیز از شعاع دایره‌ها به‌دست می‌آیند: $\pi\le r\le2\pi$. ژاکوبین دستگاه قطبی هم r است.



$$I=\iint_R\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx=\int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\frac{\sin(r)}{r}r\,dr\,dt=\int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\sin(r)\,dr\,d\theta$$

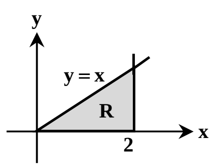
$$=\int_0^{2\pi}[-\cos(r)]_\pi^{2\pi}d\theta=\int_0^{2\pi}(-1-1)d\theta=-2(2\pi)=-4\pi$$

توجه: در ناحیه انتگرال‌گیری داریم $\pi^2\le x^2+y^2\le4\pi^2$

بنابراین $\pi\le\sqrt{x^2+y^2}\le2\pi$ پس $\sin(\sqrt{x^2+y^2})$ در این ناحیه همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر است. به عبارتی تابع جلوی انتگرال همواره کمتر یا مساوی صفر است پس جواب انتگرال الزاماً منفی خواهد بود.

از این استدلال می‌توانستیم گزینه‌های (۱) و (۴) را رد کنیم. توجه به علامت انتگرالده گاه باعث حل انتگرال می‌شود.

۱۷۹ـ گزینه «۲» ابتدا توجه شما را به یک نکته مهم جلب می‌کنیم. طبق متن درس،
برای همه توابع متعالی مانند نسبت‌های مثلثاتی و معکوس آن‌ها و توابع نمایی؛
انتگرال $\int f(\frac{y}{x})dx$ مشکل یا لاینحل است.



اما انتگرال $\int f(\frac{y}{x})dy$ به آسانی حل می‌شود زیرا وقتی y متغیر باشد برای $u=\frac{y}{x}$ داریم $u'_y=\frac{1}{x}$ که ثابت است و می‌توان آن را در انتگرالده ضرب و تقسیم کرد. در این تست نیز برای تابع $e^{\frac{2y}{x}}$ ترتیب مناسب آن است که dy در وسط و dx بیرون باشد.

پس احتیاج به تعویض ترتیب متغیرها داریم. خطوط $y=x$ و $x=2$ را رسم کرده و به شرط $0\le y\le2$ نیز توجه می‌کنیم. ناحیه انتگرال‌گیری معلوم می‌شود.

حال ابتدا کران‌های x را می‌نویسیم: $0\le x\le2$ و سپس با حرکت از پایین به بالا روی ناحیه R می‌بینیم $y=0$ کران پایین و $y=x$ کران بالای y است.

$$I=\iint_R e^{\frac{2y}{x}}dy\,dx=\int_0^2\int_0^x e^{\frac{2y}{x}}dy\,dx=\int_0^2\frac{x}{2}e^{\frac{2y}{x}}\Big|_0^x dx=\int_0^2\frac{x}{2}(e^2-e^0)dx=\frac{e^2-1}{2}\int_0^2 x\,dx=\frac{e^2-1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=e^2-1$$

۱۸۰ـ گزینه «۲» میزان شار رو به بیرون سطح S توسط $\vec F$ برابر است با: $\iint_S\vec F.\vec n ds$، با توجه به قضیه‌ی دیورژانس داریم: $\iint_S\vec F.\vec n ds=\iiint_T div\vec F dV$.

بنابراین:
$$div\vec F=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=\sqrt3+\sqrt3+\sqrt3=3\sqrt3\Rightarrow \text{شار}=\iiint_T3\sqrt3\,dV=3\sqrt3\,(T_{\text{حجم}})$$

که در آن T حجم بین کره و استوانه‌ی داده شده است. برای محاسبه‌ی این حجم از انتگرال سه‌گانه استفاده می‌کنیم:

$$T_{\text{حجم}}=2\iiint_R\int_0^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dzdA=\quad 2\iint_R\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dA$$

$$\iint_R\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dA$$

که در آن R ناحیه‌ی محصور بین دوایر متحدالمرکز $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+y^2=4a^2$ می‌باشد. به کمک دستگاه قطبی داریم:

$$T_{\text{حجم}}=2\int_0^{2\pi}\int_a^{2a}\sqrt{4a^2-r^2}\,rdrd\theta=2(2\pi)(-\frac12)(\frac23)(4a^2-r^2)^{\frac32}\Big|_{r=a}^{r=2a}=4\pi\sqrt3\,a^3$$

بنابراین شار بیرون از سطح S توسط $\vec F$ برابر است با: $3\sqrt3(T_{\text{حجم}})=3\sqrt3(4\pi\sqrt3a^3)=36\pi a^3$

۱۸۱ـ گزینه «۱» ابتدا با انجام اعمال سطری مقدماتی، سعی می‌کنیم ماتریس را ساده‌تر کنیم. در اولین مرحله، ستون دوم را از ستون اول کم می‌کنیم. همچنین ستون چهارم را از ستون سوم کم می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 4 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 4 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 16 & -8 & 2 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 & 16 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حالا } \frac{-1}{64} \text{ از ستون سوم را با ستون اول جمع می‌کنیم}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ \frac{15}{16} & -\frac{1}{2} & 4 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 16 & -8 & 2 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 & 16 & 2 \end{bmatrix}$$

حالا با استفاده از گسترش روی ستون اول داریم:

$$\det A = 0 - \frac{15}{16}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & 4 & 2 \\ -\frac{1}{8} & 16 & -8 & 2 \\ \frac{1}{16} & 0 & 16 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0$$

در این ماتریس هم با گسترش روی ستون دوم داریم:

$$\det A = -\frac{15}{16}\left[-0+0-16\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & 4 & 2 \\ \frac{1}{16} & 16 & 2 \end{vmatrix}\right] = \det A = 15\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & 4 & 2 \\ \frac{1}{16} & 16 & 2 \end{vmatrix}$$

اکنون به روش ساروس دترمینان ماتریس 3×3 را حساب می‌کنیم:

$$\det A = 15[16 + \frac{4}{16} + 16 - \frac{16}{16} - \frac{4}{4} - 64] = 15[-34 + \frac{1}{4}] = 15 \times \frac{-135}{4} = -\frac{2025}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۸۲ـ گزینه «۲»

روش اول: همان‌طور که می‌دانید وقتی $n \to \infty$ میل می‌کند داریم: $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \simeq \mathrm{Lnn}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{Lnn}} = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Lnn})^{\frac{1}{n}}$$

طبق متن کتاب، حد ریشه‌ی nاُم چند جمله‌ای‌ها و Lnn برابر با یک است. اما حل تشریحی آن به این صورت است:

$$A = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Lnn})^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \mathrm{Ln}A = \frac{1}{n}\mathrm{Ln}(\mathrm{Lnn}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ln}A = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}(\mathrm{Lnn})}{n}$$

این حد فرم $\frac{\infty}{\infty}$ دارد. با استفاده از هوپیتال داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ln}A = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\mathrm{Lnn}}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

بنابراین $A = e^0 = 1$ است.

روش دوم: از قضیه ساندویچ هم می‌توان به سؤال جواب داد؛ با توجه به کوچکترین و بزرگترین جمله داریم:

$$n \times \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < n \times 1 \Rightarrow \sqrt[n]{1} < \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n}$$

می‌دانیم: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1} = 1$ و $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ، پس بنابر قضیه ساندویچ حاصل حد برابر با یک است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۸۳ـ گزینه «۳» با کمی دقت به این کسرها متوجه می‌شویم که مخرج کسرها توان‌های متوالی عدد ۲ و صورت کسرها حاصل‌ضرب دو عدد متوالی به‌صورت $n(n+1)$ هستند. به بیان دقیق‌تر داریم:

$$A=\frac{1\times 2}{2^0}+\frac{2\times 3}{2^1}+\frac{3\times 4}{2^2}+\frac{4\times 5}{2^3}+\frac{5\times 6}{2^4}+\dots\Rightarrow A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$$

برای محاسبه‌ی مقدار این سری ابتدا به فرمول مجموع سری هندسی توجه می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\quad ;|x|<1$$

با دو بار مشتق‌گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

حالا با استفاده از قاعده‌ی لغزاندن حدود سری، کاری می‌کنیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$ ایجاد شود. اما قبل از آن توجه کنید که به‌ازای $n=0$ و $n=1$ جمله‌ی عمومیِ سریِ $\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$ برابر با صفر است. پس با کنار گذاشتن این دو جمله‌ی صفر خواهیم داشت:

$$0+0+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

حالا با استفاده از لغزاندن حدود داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$$

حالا به‌جای x در طرفین $x=\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\frac{1}{2^n}=\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3}=16\Rightarrow A=2+3+\frac{12}{4}+\dots=16$$

روش رد گزینه: جملات این سری را تا رسیدن به جمله‌ای که کوچکتر از $\frac{1}{2}$ باشد ادامه می‌دهیم. به شکل تولید جملات A توجه کنید:

$$A=\frac{1\times 2}{1}+\frac{2\times 3}{2}+\frac{3\times 4}{4}+\frac{4\times 5}{8}+\frac{5\times 6}{16}+\frac{6\times 7}{32}+\frac{7\times 8}{64}+\frac{8\times 9}{128}+\frac{9\times 10}{256}\simeq 2+3+3+2/5+2+1/3+0/9+0/6+0/35$$

مجموع همه‌ی این جملات برابر با ۱۵/۶۵ است. طبق فرمول داریم:

$15/65<$ مقدار سری $<15/65+2\times 0/35$

بنابراین گزینه (۳) جواب است.

۱۸۴ـ گزینه «۳» ابتدا با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه $\frac{d}{dx}f^{-1}(x)=\frac{-1}{1+x^2}$ ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و سپس مقدار $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ را می‌یابیم.

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x)=\frac{-1}{1+x^2}\xrightarrow{\int}f^{-1}(x)=-\mathrm{Arctg}x+c$$

طبق صورت سؤال $f(0)=1$ پس نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(1)=0$ به‌عبارتی $-\frac{\pi}{4}+c=0$ پس $c=\frac{\pi}{4}$ است.

$$\int_0^1 f^{-1}(x)dx=\int_0^1(-\mathrm{Arctg}x+\frac{\pi}{4})dx$$

برای حل انتگرال $\int_0^1-\mathrm{Arc\,tg}x dx$ با استفاده از روش جزء به جزء با انتخاب $-\mathrm{Arctg}x=u$ و $dx=dv$ داریم: $du=-\frac{1}{1+x^2}$ و $V=x$ در نتیجه:

$$\int_0^1 f^{-1}(x)dx=[-x\mathrm{Arctg}x]_0^1+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+[\frac{\pi}{4}x]_0^1=-\frac{\pi}{4}+[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+x^2)]_0^1+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}2$$

۱۸۵ـ گزینه «۱» مطابق متن درس، برای تابع سه متغیره باید ماتریس مقابل را تشکیل دهیم:

$$H=\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}&f_{xz}\\f_{yx}&f_{yy}&f_{yz}\\f_{zx}&f_{zy}&f_{zz}\end{bmatrix}$$

در این مثال داریم:

$$H=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&6(y-z)&12-6(y-z)\\0&12-6(y-z)&6(y-z)\end{bmatrix}$$

در نقطه‌ی $P(0,0,0)$ داریم:

$$H=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&12\\0&12&0\end{bmatrix}$$

این ماتریس، معین مثبت یا معین منفی نیست. زیرا دترمینانِ $\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$ برابر با صفر می‌شود. پس نقطه‌ی P نقطه‌ی زینی است.

در نقطه‌ی $Q(0,1,-1)$ داریم:

$$H=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&12&0\\0&0&12\end{bmatrix}$$

این ماتریس به وضوح معین مثبت است زیرا دترمینان خودش و ماتریس‌های $[2]$ و $\begin{bmatrix}2&0\\0&12\end{bmatrix}$ مثبت می‌شود. بنابراین نقطه‌ی Q نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع f است.

۱۸۶ـ گزینه «۳» طبق فرض داریم $\frac{\partial u}{\partial x}=-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ یعنی یک بار مشتق‌گیری نسبت به x مانند ۲ بار مشتق‌گیری نسبت به t است که در $-\alpha$ ضرب شده باشد. پس می‌توان از همین تساوی نتیجه گرفت که k بار مشتق‌گیری نسبت به x معادل است با 2k بار مشتق‌گیری نسبت به t که k بار در $-\alpha$ ضرب شده باشد. مثلاً:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(-\alpha)(-\alpha)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=(-1)^2\alpha^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^2}$$

و به همین ترتیب:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}=(-\alpha)^k\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}$$

روش دیگری که می‌توان به‌کار برد، یافتن ضابطه‌ی کلی u است به‌طوری‌که در تساوی $\frac{\partial u}{\partial x}=-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ صدق کند.

مثلاً تابع $u(x,t)=e^{-\alpha x+t}$ دارای این ویژگی است:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=-\alpha e^{-\alpha x+t}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=e^{-\alpha x+t}\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حالا اگر از این تابع، k بار نسبت به x مشتق بگیریم داریم:

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}=(-\alpha)^k e^{-\alpha x+t}$$

که با $\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}$ برابر است.

[اگر تابع $u=e^{-c\alpha x+ct}$ را در نظر بگیرید، نادرستی گزینه‌ی (۴) مشخص می‌شود.]

۱۸۷ـ گزینه «۱» با استفاده از رابطه‌ی داده شده $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ در صورت سؤال به جای x_n در صورت کسر جلوی سیگما قرار می‌دهیم:

$$x_n=x_{n+1}-x_{n-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x_{n+1}-x_{n-1}}{x_{n-1}.x_{n+1}}$$

اکنون کسر جلوی سیگما را تفکیک می‌کنیم و داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n+1}}$$

اکنون با استفاده از سری تلسکوپی، حاصل سری به دست آمده را می‌یابیم.

فقط توجه داشته باشید که این دو جمله پشت سر هم نیستند و اختلاف اندیس‌ها از یک واحد بیشتر است، پس باید به جای جمله‌ی اول به تعداد اختلاف اندیس‌ها، جملات اول را با هم جمع کنیم و به جای جمله آخر، به تعداد اختلاف اندیس‌ها، جملات آخر را نیز با هم جمع کنیم. در این مثال چون جملات آخر در ∞ تقریباً با هم برابر هستند، می‌توانیم عدد اختلاف اندیس‌ها را در جمله آخر ضرب کنیم، پس داریم:

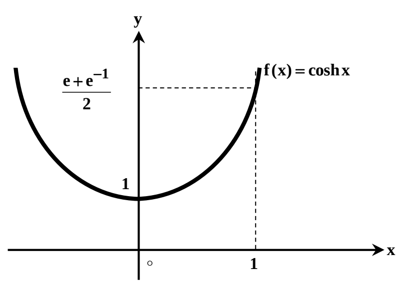
$$\text{حاصل سری}=(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})-2(a_\infty)=(\frac{1}{1}+\frac{1}{1})-2(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x_{n+1}})=2-2(0)=2$$

۱۸۸ـ گزینه «۱» طبق متن درس، اگر f تابعی صودی باشد، که $f(a)=\alpha$ و $f(b)=\beta$، آنگاه داریم:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx=\beta b-a\alpha$$

در این مثال تابع $f(x)=\cosh x$ را داریم که در بازه‌ی $[0,1]$ صعودی است و $f(0)=1$ و $f(1)=\frac{e+e^{-1}}{2}$ پس داریم:

$$\int_0^1\cosh x dx+\int_1^{\frac{e+e^{-1}}{2}}\cosh^{-1}x dx=\frac{e+e^{-1}}{2}\times1-0\times1=\frac{e+e^{-1}}{2}=\cosh 1$$



در پایان، نمودار این تابع را برای فهم بهتر مسأله، رسم کرده‌ایم.

۱۸۹ـ گزینه «۳» ابتدا ضابطه‌ی f را ساده‌تر می‌کنیم. با استفاده از رابطه‌ی مثلثاتی $1+\tan^2\frac{x}{2}=\sec^2\frac{x}{2}$ می‌توان نوشت:

$$f(x)=\mathrm{Ln}(\sin x)-\mathrm{Ln}2+\mathrm{Ln}(\sec^2\frac{x}{2})$$

می‌دانیم که $\sec\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$ پس $\sec^2\frac{x}{2}=\cos^{-2}\frac{x}{2}$ در نتیجه: $\mathrm{Ln}(\sec^2\frac{x}{2})=\mathrm{Ln}(\cos^{-2}\frac{x}{2})=-2\mathrm{Ln}(\cos\frac{x}{2})$ و ضابطه‌ی $f(x)$ به این صورت ساده می‌شود:

$$f(x)=\mathrm{Ln}(\sin x)-\mathrm{Ln}2-2\mathrm{Ln}(\cos\frac{x}{2})$$

بنابراین مشتق عبارت داده شده برابر است با:

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}+2\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\Rightarrow f'(x)=\cot gx+\mathrm{tg}\frac{x}{2}$$

با جایگذاری $x=\frac{\pi}{2}$ در این عبارت داریم:

$$f'(\frac{\pi}{2})=\cot g\frac{\pi}{2}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=0+1=1$$

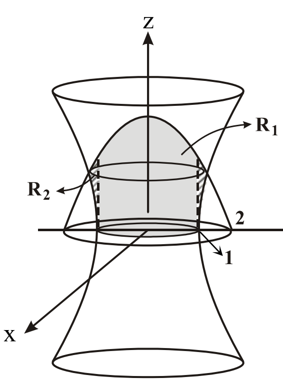
۱۹۰ـ گزینه «۴» برخورد سهمی گون و هذلولی گون را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1\\ 4-z=x^2+y^2\end{cases}\Rightarrow 4-z-\frac{z^2}{4}=1\Rightarrow z^2+4z-12=0\Rightarrow z=2\Rightarrow x^2+y^2=2$$

پس این دو رویه در ارتفاع $z=2$ با هم برخورد می‌کنند و تقاطع آن‌ها دایره‌ی $x^2+y^2=2$ است.

از طرفی، با توجه به صورت سؤال، صفحه‌ی xoy یعنی $z=0$ هم یکی از رویه‌ها است. از برخورد، این صفحه بارویه‌های دیگر، دایره‌های $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=1$ به دست می‌آیند که به ترتیب تقاطع سهمی‌گون و هذلولی گون با صفحه‌ی $z=0$ هستند. البته طبق صورت سؤال، سهمی‌گونِ $4-z=x^2+y^2$، سقف این شکل را تشکیل می‌دهد پس برخورد دادن آن با صفحه‌ی $z=0$ لازم نیست. به عبارتی دایره‌ی $x^2+y^2=4$ نقشی در این مثال ندارد.

با این اطلاعات می‌توانیم شکل ناحیه‌ی مورد نظر را هم رسم کنیم.



با توجه به این‌که تصویر این شکل بر صفحه‌ی xoy دایره است، بهتر است از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم.

معادله‌ی سهمی‌گون به صورت $4-z=r^2$ یعنی $z=4-r^2$ و معادله‌ی هذلولی‌گون به صورت $r^2-\frac{z^2}{4}=1$ نوشته می‌شود. از این معادله داریم $z^2=4(r^2-1)$ و با توجه به آن‌که $z\geq 0$ است داریم $z=2\sqrt{r^2-1}$.

اکنون آماده هستیم که حجم مورد نظر را در مختصات استوانه‌ای حساب کنیم.

ناحیه‌ای که تصویر آن درون دایره‌ی $x^2+y^2=1$ قرار دارد را R_1 و ناحیه‌ای که تصویر آن بین دو دایره‌ی $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=2$ قرار دارد را R_2 می‌نامیم. در ناحیه‌ی R_1 داریم $0\leq\theta\leq 2\pi$، $0\leq r\leq 1$ و حدود z از $z=0$ تا سهمی‌گون یعنی $z=4-r^2$ ادامه دارند.

اما در ناحیه‌ی R_2، داریم $0\leq\theta\leq 2\pi$، $1\leq r\leq\sqrt{2}$ و حدود z از سطح هذلولی‌گون یعنی $z=2\sqrt{r^2-1}$ تا سطح سهمی‌گون یعنی $z=4-r^2$ ادامه دارند.

بنابراین حجم ناحیه R برابر است با:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{z=0}^{z=4-r^2}rdzdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_{z=2\sqrt{r^2-1}}^{z=4-r^2}rdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1[rz]_0^{4-r^2}drd\theta+\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}[rz]_{2\sqrt{r^2-1}}^{4-r^2}drd\theta=$$

$$\Rightarrow V=\int_0^{2\pi}\int_0^1(4r-r^3)drd\theta+\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}(4r-r^3-2r\sqrt{r^2-1})drd\theta=\int_0^{2\pi}[2r^2-\frac{r^4}{4}]_0^1d\theta+\int_0^{2\pi}[2r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{2}{3}(r^2-1)^{\frac{3}{2}}]_1^{\sqrt{2}}d\theta$$

$$\Rightarrow V=2\pi\times[(2-\frac{1}{4})+(4-1)-(2-\frac{1}{4})-\frac{2}{3}(2-1)+\frac{2}{3}(0)]=2\pi\times(3-\frac{2}{3})=2\pi\times\frac{7}{3}=\frac{14\pi}{3}$$

تذکر: می‌توانیم ناحیه‌ی داده شده را به دو بخش تقسیم کنیم که یکی از آن‌ها بین $z=0$ و $z=2$ قرار دارد و دیگری در بالای $z=2$ قرار گرفته است. البته با این‌کار، چیزی از حجم محاسبات مورد نیاز کاسته نخواهد شد.

۱۹۱ـ گزینه «۳»

بررسی گزینه ۱: حد تابع $f(x,y)$ در مبدأ را می‌یابیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

برای یافتن حد فوق از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta=0\times\text{کران‌دار}=0$$

با توجه به این که $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ با مقدار $f(0,0)$ برابر است بنابراین $f(x,y)$ در نقطه $(0,0)$ پیوسته می‌باشد.

بررسی گزینه ۲: برای بررسی این گزینه ابتدا ضابطه‌ی تابع f_y را می‌یابیم. در $(0,0)$ از تعریف مشتق و در سایر نقاط از قواعد مشتق‌گیری استفاده می‌کنیم.

در نقاط $(x,y)\neq(0,0)$ داریم:

$$f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2\times(x^2+y^2)-2y(x^2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+x^2y^2-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

در نقطه‌ی $(0,0)$ از تعریف مشتق داریم:

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

حالا می‌توانیم پیوسته بودن تابع f_y را در مبدأ بررسی کنیم.

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & ;\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\quad (0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

طبق متن درس، به دلیل هم درجه بودن صورت و مخرج می‌دانیم که این حد وجود ندارد.

البته برای اثبات این مطلب می‌توانیم روی مسیرهای $y=0$ و $x=0$ جداگانه حد بگیریم که روی اولی مقدار حد برابر با یک و روی دومی مقدار حد صفر است یا حتی از نمایش قطبی استفاده می‌کنیم و با حذف r^4 از صورت و مخرج، جواب حد به θ بستگی پیدا می‌کند پس حد وجود ندارد.

با این توضیحات متوجه شدیم که f_y در مبدأ پیوسته نیست.

بررسی گزینه ۳: به طور مشابه ابتدا مشتق تابع $f(x,y)$ را نسبت به x در نقاطی به جز $(0,0)$ محاسبه می‌کنیم:

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy\times(x^2+y^2)-2x\times x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^3y+2xy^3-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

و با استفاده از تعریف مشتق داریم $f_x(0,0)=0$

با توجه به هم درجه بودن صورت و مخرج باز هم $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ وجود ندارد پس f_x در مبدأ ناپیوسته است.

بررسی گزینه ۴: همان‌طور که دیدید مشتقات جزئی تابع $f(x,y)$ در مبدأ به این صورت به‌دست می‌آیند:

$$f_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,h)-0}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{h^3}=0$$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{f(h,0)-0}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{h^3}=0$$

بنابراین مشتقات پاره‌ای f در مبدأ موجود می‌باشد.

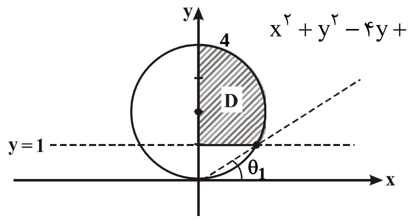
۱۹۲ـ گزینه «۱» برای یافتن گزینه درست کافیست انتگرال را در مختصات قطبی بنویسیم. در دستگاه قطبی داریم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2,\quad dxdy = rdrd\theta$$

حالا باید حدود انتگرال در مختصات قطبی را بیابیم، لذا ابتدا ناحیه D در مختصات دکارتی را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{4y - y^2} \Rightarrow x^2 = 4y - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2$$



دایره‌ای به مرکز $(0,2)$ و شعاع ۲ به‌دست آمد. البته شرط $x \ge 0$ و $y \ge 1$ را هم داریم. محل برخورد خط $y = 1$ با دایره را در ربع اول حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_1 = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

محدوده‌ی تغییرات θ برابر است با $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ برای یافتن حدود r باید معادله‌ی مرزها را در مختصات قطبی بنویسیم: $y = 1 \Rightarrow r\sin\theta = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\sin\theta}$

$$x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r\sin\theta = 0 \Rightarrow r = 4\sin\theta$$

بنابراین بازه تغییرات r به این صورت است: $\frac{1}{\sin\theta} \le r \le 4\sin\theta$

پس انتگرال داده شده در مختصات قطبی به این صورت می‌باشد:

$$\int_1^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r,\theta)rdrd\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{4\sin\theta} f(r)rdrd\theta$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۹۳ـ گزینه «۲» بردار هادی خط مماس بر دو رویه برابر با حاصلضرب خارجی بردارهای گرادیان دو رویه در نقطه داده شده است، پس داریم:

$$\begin{cases} F: x + z - 4 = 0 \to \vec{\nabla}F = (1,0,1) \\ G: x^2 + y^2 - 2 = 0 \to \vec{\nabla}G = (2x,2y,0) \xrightarrow{z=4,\ y=\sqrt{2},\ x=0} \vec{\nabla}G = (0,2\sqrt{2},0) \end{cases}$$

حاصلضرب خارجی بردارهای گرادیان را محاسبه می‌کنیم:

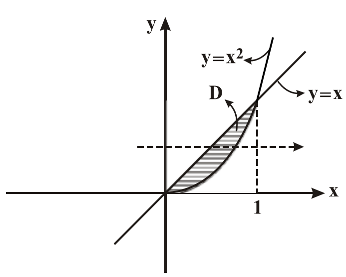
$$\vec{n} = \vec{\nabla}F \times \vec{\nabla}G = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = (-2\sqrt{2},0,2\sqrt{2})$$

البته هر برداری که مضرب $\vec{n}$ باشد نیز می‌تواند بردار هادی خاط مورد نظر باشد. پس با توجه به گزینه‌ها بردار $(2\sqrt{2},0,-2\sqrt{2})$ را درنظر می‌گیریم.
بنابراین‌معادله پارامتری خط مماس بر دو رویه داده شده در نقطه $(0,\sqrt{2},4)$ برابر است با:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\,t + 0 = 2t\sqrt{2} \\ y = 0 \times t + \sqrt{2} = \sqrt{2} \\ z = -2\sqrt{2}\,t + 4 = 4 - 2t\sqrt{2} \end{cases}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۹۴ـ گزینه «۲» تابع زیر انتگرال یک متغیره و به صورت $f(y)$ است، اگر dx را به انتگرال میانی بیاوریم، انتگرال خیلی ساده‌تر حل می‌شود. توجه کنید که $x = \sqrt{y}$ همان $y = x^2$ است البته با شرط $x \ge 0$ و $y \ge 0$. ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم، ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری را به‌صورت مقابل رسم می‌کنیم:



$$D: \begin{cases} y \le x \le \sqrt{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \frac{e^{\sqrt{y}}}{y - y\sqrt{y}}dxdy$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left[\frac{e^{\sqrt{y}}}{y - y\sqrt{y}} \times x\right]_y^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{y}}}{y - y\sqrt{y}}(\sqrt{y} - y)dy = \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}dy \Rightarrow I = \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}dy$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $u = \sqrt{y}$ استفاده می‌کنیم، لذا:

$$\sqrt{y} = u \Rightarrow y = u^2 \Rightarrow dy = 2udu,\quad \begin{cases} y = 0 \Rightarrow u = 0 \\ y = 1 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

با جایگذاری عبارات فوق در I داریم:

$$I = \int_0^1 \frac{e^u}{u}2udu = 2\int_0^1 e^u du = 2e^u\Big|_0^1 = 2(e-1)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۹۵ـ گزینه «۴» طبق صورت سؤال a_n دنباله‌ای نزولی و نامنفی است. بنابراین $\sqrt{a_n}$ هم دنباله‌ای نزولی و نامنفی است. حالا اگر $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگرا باشد، خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n = 0$ پس $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ بنابراین $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = 0$. به این ترتیب $\sqrt{a_n}$ دنباله‌ای نامنفی، نزولی و همگرا به صفر است، پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{a_n}$ همگراست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱) نادرست است. برای مثال فرض کنید $a_n = \frac{1}{n}$ و $b = -\frac{1}{n}$ باشد در این‌صورت سریِ $\sum_{n=1}^{\infty}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ همگراست اما سریِ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگراست.

گزینه‌ی (۲) شکل ناقص قضیه‌ی تراکم کوشی است. اگر به جای سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ از سری $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ صحبت می‌کرد، درست بود اما برای جمله‌ی فعلی می‌توان مثال نقض پیدا کرد. مثلاً $a_n = \frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید. در این صورت داریم: $a_{2^n} = \frac{1}{2^n}$ و می‌دانیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{2^n}$ همگراست در حالی‌که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

گزینه‌ی (۳) هم با درنظر گرفتن $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ رد می‌شود. می‌دانیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگراست اما سریِ مثبتِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ واگراست.

۱۹۶ـ گزینه «۱» ابتدا دامنه تابع $f(x) = \operatorname{Ln}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

نقطه بحرانی f را در دامنه‌اش پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = \operatorname{Ln}(1-x^2) - \operatorname{Ln}(1+x^2)$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{-4x}{1-x^4} = 0 \Rightarrow x = 0$$

حال مقدار f را در نقطه بحرانی و دو سرِ دامنه بررسی می‌کنیم.

$$f(0) = \operatorname{Ln}(1) = 0$$
$$f(1^-) = \operatorname{Ln}(0^+) = -\infty$$
$$f(-1^+) = \operatorname{Ln}(0^+) = -\infty$$

بنابراین برد f برابر با $(-\infty, 0]$ است.

۱۹۷ـ گزینه «۴» حروف داده شده را دسته‌بندی می‌کنیم: H, E, L, S, AA, FF. ۶ حرف متمایز داریم و F و A هر کدام تا دو بار قابل استفاده‌اند.

رمزهای ۴ حرفی را دسته‌بندی می‌کنیم تا شمارش هر دسته ساده‌تر باشد. دسته اول رمزهای بدون حرف تکراری: $\binom{6}{4}4!$

دسته دوم آن‌هایی که از F و F و دو حرف متمایز دیگر تشکیل شده‌اند. تعداد آن‌ها برابر است با: $\binom{5}{2}\frac{4!}{2!}$

دسته سوم آن‌هایی که از A و A و دو حرف متمایز دیگر تشکیل شده‌اند که تعدادشان مانند دسته‌ی قبل است: $\binom{5}{2}\frac{4!}{2!}$

دسته چهارم رمزهایی که از F و F و A و A ساخته می‌شوند. تعداد جایگشت‌های این ۴ حرف برابر است با: $\frac{4!}{2!2!}$

بنابراین با جمع کردن تعداد آن‌ها داریم:

$$\text{جواب} = \binom{6}{4}4! + \binom{5}{2}\frac{4!}{2!} + \binom{5}{2}\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!2!} = 360 + 120 + 120 + 6 = 606$$

۱۹۸ـ گزینه «۳» حجم حاصل از دوران منحنی $f(x)=\frac{۱}{x\sqrt{x^۲-۱}}$ در فاصله $[۲,t]$ حول محور xها برابر است با:

$$V=\pi\int_۲^t f^۲(x)\,dx=\pi\int_۲^t\frac{dx}{x^۲(x^۲-۱)}$$

با استفاده از تجزیه کسرها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{x^۲(x-۱)(x+۱)}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x^۲}=\frac{(A+B+C)x^۳+(A-B+D)x^۲-Cx-D}{x^۲(x-۱)(x+۱)}$$

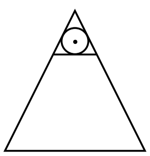
با مقایسه صورت کسرها داریم: $D=-۱$, $C=۰$, $A-B+D=۰$ و $A+B+C=۰$. بنابراین: $(A,B,C,D)=(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲},۰,۱)$.

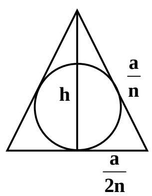
$$V=\pi\int_۲^t\left(\frac{۱}{۲}\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{۲}\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x^۲}\right)dx=\pi\left(\frac{۱}{۲}Ln\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)+\frac{۱}{x}\right)\Big|_۲^t=\pi\left(\frac{۱}{۲}Ln\left(\frac{t-۱}{t+۱}\right)+\frac{۱}{t}-\frac{۱}{۲}Ln(۳)-\frac{۱}{۲}\right)$$

هرگاه $t\to\infty$ خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to\infty}V=\pi\left(\frac{۱}{۲}Ln(۱)+۰+\frac{۱}{۲}Ln(۳)-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\pi}{۲}(Ln(۳)-۱)$$

۱۹۹ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع، a است. بنابراین مثلث متساوی‌الاضلاع کوچکی که در رأس بالاتر ایجاد می‌شود به ضلع $\frac{a}{n}$ است. با کمک قضیه فیثاغورث ارتفاع این مثلث را حساب می‌کنیم. ارتفاع آن را با h نشان می‌دهیم.





$(\frac{a}{n})^۲=h^۲+(\frac{a}{۲n})^۲$ پس $h^۲=\frac{۳}{۴}\frac{a^۲}{n^۲}$ یعنی $h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\frac{a}{n}$.

مرکز ثقل این مثلث در ارتفاع $\frac{۱}{۳}h=\frac{\sqrt{۳}}{۶}\frac{a}{n}$ از قاعده قرار دارد. پس شعاع دایره کوچک $r=\frac{\sqrt{۳}}{۶}\frac{a}{n}$ است.

مساحت هر کدام از دایره‌ها $\pi r^۲=\frac{۳\pi}{۳۶}\frac{a^۲}{n^۲}$ است. تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$۱+۲+۳+\ldots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

بنابراین مجموع مساحت دایره‌ها چنین است:

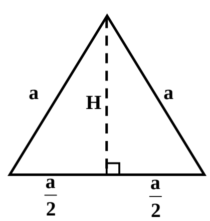
$$S_n=\frac{n(n+۱)}{۲}\pi r^۲=\frac{n(n+۱)}{۲}\frac{۳\pi}{۳۶}\frac{a^۲}{n^۲}=\frac{\pi(n^۲+n)a^۲}{۲۴n^۲}$$

هرگاه $n\to\infty$ با توجه به قاعده‌ی بزرگ‌ترین درجه خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi a^۲n^۲}{۲۴n^۲}=\frac{\pi a^۲}{۲۴}$$

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع بزرگ به ضلع a را نیز حساب می‌کنیم. بنابر قضیه فیثاغورث: $H^۲+(\frac{a}{۲})^۲=a^۲$ پس $H^۲=\frac{۳}{۴}a^۲$ و $H=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$.

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}\,(\text{قاعده})\,(\text{ارتفاع})=\frac{Ha}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$



حال نسبت $\lim_{n\to\infty}S_n$ به مساحت مثلث بزرگ معلوم می‌شود:

$$\text{جواب}=\frac{\lim_{n\to\infty}S_n}{\text{مساحت مثلث}}=\frac{\frac{\pi a^۲}{۲۴}}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}=\frac{۴\pi}{۲۴\sqrt{۳}}=\frac{\pi}{۶\sqrt{۳}}$$

۲۰۰ـ گزینه «۲» بهتر است مسأله را از حالت پارامتری به دکارتی تبدیل کنیم. از معادلات پارامتری داده شده داریم:

$$\sin t=y^{\frac{۱}{۳}}\ ,\ \cos t=x^{\frac{۱}{۳}}$$

می‌دانیم که $\sin^۲t+\cos^۲t=۱$ بنابراین $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=۱$. پس می‌توان نوشت:

$$y=(۱-x^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۳}{۲}}$$

$$y'=(\frac{۳}{۲})(-\frac{۲}{۳})x^{-\frac{۱}{۳}}(۱-x^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۱}{۲}}$$

$$y''=\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۴}{۳}}(۱-x^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}x^{-\frac{۱}{۳}}(۱-x^{\frac{۲}{۳}})^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۱-x^{\frac{۲}{۳}}}}{۳\sqrt[۳]{x^۴}}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}\sqrt{۱-x^{\frac{۲}{۳}}}}$$

می‌بینیم که در $x=۰$ و $x=\pm۱$ مقدار y'' تعریف نشده است. در همسایگی $x=۰$ چه از چپ و چه از راست $y''>۰$ است. پس در این نقطه y'' تغییر علامت نمی‌دهد، یعنی این نقطه، نقطه عطف نیست. اما در $x=۱$ و $x=-۱$ علامت y'' عوض می‌شود. پس این دو، طول نقاط عطف هستند.

۲۰۱ـ گزینه «۲» ابتدا به این مطلب توجه کنید که برای هر مقدار از x، $-1 \le \sin(x) \le 1$ است. بنابراین $-\frac{\pi}{2} < \sin(x) < \frac{\pi}{2}$ و در نتیجه $\cos(\sin x) > 0$ است.

پس کافی است دامنه‌ی تابع $\mathrm{Arc}\sin(\frac{1+x^2}{2x})$ را تعیین کنیم. در این تابع باید کسر $\frac{1+x^2}{2x}$ مقادیری بین ۱- تا ۱+ داشته باشد. با جدا کردن بخش‌های مثبت و منفی حوزه تعریف تابع را مشخص می‌کنیم.

اگر $x > 0$ باشد، از $0 < \frac{1+x^2}{2x} \le 1$ داریم: $1+x^2 \le 2x$.

$$1+x^2-2x \le 0 \qquad \Rightarrow \qquad (x-1)^2 \le 0 \qquad \Rightarrow \qquad x-1=0$$

پس $x=1$ تنها عضو دامنه در ناحیه‌ی $x>0$ است. به همین ترتیب اگر $x<0$ باشد، داریم: $-1 \le \frac{1+x^2}{2x} < 0$ پس می‌توان نوشت:

$$-2x \ge 1+x^2 > \ \Rightarrow\ 0 \ge 1+x^2+2x \ \Rightarrow\ 0 \ge (x+1)^2 \ \Rightarrow\ x+1=0$$

پس $x=-1$ تنها عضو دامنه در ناحیه‌ی $x<0$ است. بنابراین $D_f=\{-1,1\}$.

روش کوتاه: با امتحان کردن اعدادی مانند $x=1$ و $x=0$ و $x=-1$ در تابع f مشخص می‌شود که ± 1 در دامنه f قرار دارند؛ اما صفر در دامنه نیست. به این ترتیب همه گزینه‌ها به جز گزینه (۲) رد می‌شوند.

۲۰۲ـ گزینه «۱» می‌دانیم که $u-1<[u] \le u$ است. بنابراین $-x-1<[-x] \le -x$. با افزودن x به طرفین داریم $-1 < x+[-x] \le 0$ به عبارتی $-1 < f(x) \le 0$ است. با محاسبه ترکیب دو تابع داریم:

$$gof(x)=g(f(x))=\log_2(1-3f(x))$$

$-1 < f(x) \le 0$ بنابراین $0 \le -3f(x) < 3$ و از اینجا $1 \le 1-3f(x) < 4$ و اگر از طرفین لگاریتم در مبنای ۲ بگیریم، خواهیم داشت:

$$\log_2(1) \le \log_2(1-3f(x)) < \log_2(4)$$

به عبارتی:

$$0 \le gof(x) < 2$$

۲۰۳ـ گزینه «۴» فرض کنیم $[x]$ زوج باشد، در این صورت $[x+1]$ فرد است.

$$f(x)=x-[x]$$
$$f(x+1)=1+[x+1]-(x+1)=1+[x]+1-x-1=1+[x]-x$$

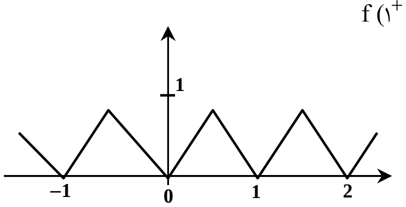
می‌بینیم که $f(x+1) \ne f(x)$. بنابراین دوره تناوب f برابر با یک نیست. گزینه‌های (۱) و (۳) رد می‌شوند.

حال پیوستگی f را بررسی می‌کنیم. در اعداد غیرصحیح، f به وضوح پیوسته است. پیوستگی f در $x=1$ را بررسی می‌کنیم. دقت کنید که اگر $x \to 1^+$, $[x]=1$ عددی فرد است و اگر $x \to 1^-$, $[x]=0$ عددی زوج است.

$$f(1)=1+[1]-1=1$$

$$f(1^+)=1+[1^+]-1=1 \qquad f(1^-)=1-[1^-]=1$$

حال پیوستگی f در $x=2$ را بررسی می‌کنیم.



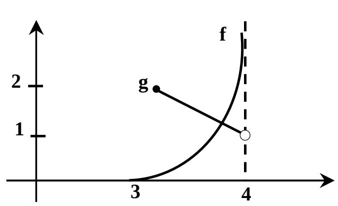
$$f(2)=2-[2]=0$$
$$f(2^+)=2-[2^+]=0$$
$$f(2^-)=1+[2^-]-2=0$$

با توجه به آن که f در اعداد صحیح ۱ و ۲ پیوسته و دارای دوره تناوب ۲ نیز هست، نتیجه می‌گیریم f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

برای فهم بهتر موضوع نمودار f را نیز رسم کرده‌ایم.

۲۰۴ـ گزینه «۴» دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{4-x}}$ بازه‌ی $[3,4)$ است. اگر $x>4$ باشد یا $x<3$ باشد، عبارت زیر رادیکال منفی است. $x=4$ هم ریشه مخرج است (می‌توانید از جدول تعیین علامت هم استفاده کنید). در دامنه‌ی به دست آمده داریم $x-3 \ge 0$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$g(x)=2-|x-3|=2-(x-3)=5-x$$



$y=g(x)$ یک خط راست است با شیب منفی و کسر هموگرافیک $y=\frac{x-3}{4-x}$ نیز تابعی یکنوا است. بنابراین رسم نمودارهای f و g در بازه $[3,4)$ آسان است.

$$f(3)=0 \qquad f(4^-)=+\infty$$
$$g(3)=2 \qquad g(4^-)=1$$

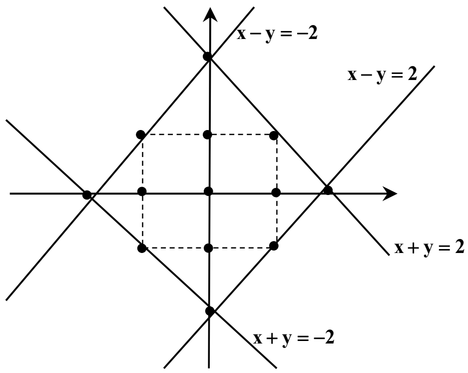
می‌بینم که فقط یک نقطه برخورد وجود دارد.

۲۰۵ـ گزینه «۲» توجه کنید که $(x,y)\in\mathbb{Z}^{۲}$ یعنی x و y اعداد صحیح باشند.

$$|x+y|\le ۲ \quad\Rightarrow\quad -۲\le x+y\le ۲$$
$$|x-y|\le ۲ \quad\Rightarrow\quad -۲\le x-y\le ۲$$

خطوط $x+y=۲$ و $x+y=-۲$ و $x-y=۲$ و $x-y=-۲$ را رسم می‌کنیم.

نقاطی مانند (x,y) را می‌خواهیم که مختصات صحیح داشته باشند و در ناحیه‌ی بین این چهار خط قرار بگیرند.



در ناحیه لوزی شکلی که بین این خطوط قرار می‌گیرد و روی مرزهای آن؛ در مجموع ۱۳ نقطه با مختصات صحیح وجود دارد.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۰۶ـ گزینه «۴» طبق فرض: $A=\int_{۰}^{۱}\frac{x^{۲}\,dx}{۱+x^{۴}}$ است. حال می‌خواهیم $I=\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{۱+x^{۴}}$ را برحسب A پیدا کنیم. احتیاج به تغییر متغیری داریم که کران‌های ۱ و ∞ را به کران‌های ۱ و ۰ تبدیل کند. این کار توسط متغیر $t=\frac{۱}{x}$ انجام می‌شود. وقتی $x=۱$ باشد، $t=۱$ است و وقتی $x\to\infty$ داریم: $t\to ۰$.

همچنین $t=\frac{۱}{x}$ پس $x=\frac{۱}{t}$ و $dx=-\frac{dt}{t^{۲}}$. با انجام این تغییرات داریم:

$$I=\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{۱+x^{۴}}=\int_{۱}^{۰}\frac{-\frac{۱}{t^{۲}}dt}{۱+\frac{۱}{t^{۴}}}=-\int_{۱}^{۰}\frac{t^{۲}\,dt}{t^{۴}+۱}=\int_{۰}^{۱}\frac{t^{۲}\,dt}{t^{۴}+۱}=A$$

یادآوری: هرگاه کران‌های انتگرال جابه‌جا شوند، حاصل قرینه می‌شود: $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۰۷ـ گزینه «۱» شیب خط مماس بر منحنی پارامتری $(x=t^{۲}+۲t\ ,\ y=۲t^{۲}-۳t+۱)$ در هر نقطه از آن چنین است: $m=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{۴t-۳}{۲t+۲}$

مقدار t را در نقطه‌ی مورد نظر تعیین می‌کنیم.

در نقطه‌ی $(x_{۰},y_{۰})=(۸,۳)$ داریم:

$$\begin{cases}x=t^{۲}+۲t=۸\\ y=۲t^{۲}-۳t+۱=۳\end{cases}$$

اگر معادله‌ی دوم را منهای ۲ برابر اولی کنیم مقدار t به دست می آید:

$$(۲t^{۲}-۲t^{۲})+(-۳t-۴t)+۱=۳-۱۶\ \Rightarrow\ -۷t=-۱۴\ \Rightarrow\ t=۲$$

شیب خط مماس در این نقطه را حساب می‌کنیم:

$$m=\frac{۴t-۳}{۲t+۲}=\frac{۸-۳}{۴+۲}=\frac{۵}{۶}$$

معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-y_{۰}=m(x-x_{۰})\ \Rightarrow\ y-۳=\frac{۵}{۶}(x-۸)\ \Rightarrow\ ۶y-۵x=-۲۲$$

با جایگذاری $x=۰$، محل برخورد با محور y ها معلوم می‌شود:

$$۶y-۰=-۲۲\ \Rightarrow\ y=-\frac{۲۲}{۶}\ \Rightarrow\ y=-\frac{۱۱}{۳}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۰۸ـ گزینه «۴» فرض می‌کنیم $u=x^{۲}-۱$ و $v=e^{x}$ باشد. همه‌ی مشتق‌های e^{x} از هر مرتبه‌ای برابر با e^{x} است. مشتق‌های اول و دوم u عبارتند از $u'=۲x$ و $u''=۲$ و سایر مشتق‌های مرتبه‌ی بالاتر آن صفر می‌شوند. حالا طبق فرمول داریم:

$$y=uv\ \Rightarrow\ y^{(۱۵)}=uv^{(۱۵)}+\binom{۱۵}{۱}u^{(۱)}v^{(۱۴)}+\binom{۱۵}{۲}u^{(۲)}v^{(۱۳)}+۰+۰+\cdots\ \Rightarrow\ y^{(۱۵)}=(x^{۲}-۱)e^{x}+۱۵(۲x)(e^{x})+\frac{۱۵\times ۱۴}{۲}(۲)(e^{x})$$

با جایگذاری $x=۱$ داریم:

$$y^{(۱۵)}_{(۱)}=۰+۳۰e+۲۱۰e=۲۴۰e$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۰۹ـ گزینه «۴» معادله‌ی $f'(x)=\circ$ را حل می‌کنیم تا محل نقاط بحرانی معلوم شود.

$$f'(x)=-\cos x-(\frac{۱}{۲}-x)\sin x+\cos x-\frac{۲x-۱}{۴}=(x-\frac{۱}{۲})\sin x-(\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۴})=(x-\frac{۱}{۲})\sin x-\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{۲})=(x-\frac{۱}{۲})(\sin x-\frac{۱}{۲})=\circ$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ \sin x=\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow\ x=\frac{۱}{۲}\ ,\ x=\frac{\pi}{۶}\ ,\ x=\frac{۵\pi}{۶}$$

اعداد $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=\frac{\pi}{۶}$ در بازه‌ی $[\circ,\frac{\pi}{۲}]$ قرار دارند.

برای تعیین نوع آن‌ها به علامت $f''(x)$ توجه می‌کنیم:

$$f''(x)=(۱)(\sin x-\frac{۱}{۲})+(x-\frac{۱}{۲})\cos x$$

در $x=\frac{۱}{۲}$ داریم $f''(\frac{۱}{۲})=\sin(\frac{۱}{۲})-\frac{۱}{۲}$. برای هر عدد مثبت x داریم $\sin x<x$ پس $\sin(\frac{۱}{۲})<\frac{۱}{۲}$، در نتیجه $f''(\frac{۱}{۲})$ منفی است. پس $x=\frac{۱}{۲}$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است. در $x=\frac{\pi}{۶}$ داریم:

$$f''(\frac{\pi}{۶})=(\sin(\frac{\pi}{۶})-\frac{۱}{۲})+(\frac{\pi}{۶}-\frac{۱}{۲})\cos\frac{\pi}{۶}=\circ+(\frac{\pi}{۶}-\frac{۱}{۲})\frac{\sqrt{۳}}{۲}>\circ$$

پس $x=\frac{\pi}{۶}$ طول نقطه‌ی مینیمم نسبی است.

۲۱۰ـ گزینه «۴» ابتدا x متناظر با $y=۱$ را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{۴x+۱}-\mathrm{Ln}۱=۳\ \Rightarrow\ ۴x+۱=۹\ \Rightarrow\ x=۲$$

حال با مشتق‌گیری ضمنی از معادله منحنی نسبت به پارامتر t خواهیم داشت:

$$\frac{۴\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}}{۲\sqrt{۴x+۱}}-\frac{\frac{dy}{dt}}{y}=\circ\ \xrightarrow[(۲,۱)]{\frac{dy}{dt}=\frac{۱}{۲}}\ \frac{۴\frac{dx}{dt}+\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۸+۱}}-\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}=\circ\ \Rightarrow\ \frac{dx}{dt}=\frac{۵}{۸}$$

۲۱۱- گزینه «۴» با توجه به تعریف دامنه ترکیب دو تابع داریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\ |\ f(x)\in D_g\}$$

$$D_f: x-x^۲>\circ\ \Rightarrow x(۱-x)>\circ\ \Rightarrow \circ<x<۱$$

$$D_g: x+۳\geq\circ\ \Rightarrow x\geq -۳$$

$$\Rightarrow D_{gof}=\{\circ<x<۱\ |\ \log_۲(x-x^۲)\geq -۳\}=\{\circ<x<۱\ |\ x-x^۲\geq ۲^{-۳}\}=\{\circ<x<۱\ |\ x^۲-x+\frac{۱}{۸}\leq\circ\}$$

$$\Rightarrow x^۲-x+\frac{۱}{۸}=\circ\ \Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱-\frac{۴}{۸}}}{۲}=\frac{۱\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{۲\pm\sqrt{۲}}{۴}$$

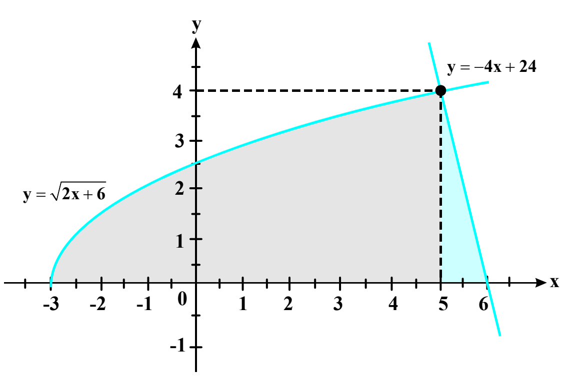
$$\Rightarrow D_{gof}=\{\circ<x<۱\ |\ \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}\leq x\leq\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}\}=[\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴},\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}]$$

۲۱۲- گزینه «۴»

روش اول: با توجه به این که نقطه $(۵,۴)$ مختصات آن در معادله تابع $y=\sqrt{۲x+۶}$ صدق می‌کند، پس ابتدا باید معادله‌ی خط قائم بر منحنی و گذرنده از نقطه $(۵,۴)$ را به دست بیاوریم.

$$y'=\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۶}}\xrightarrow{x=۵}m=\frac{۱}{۴}\ \Rightarrow\ \text{شیب قائم}\ m'=-۴$$

$$y-y_\circ=m(x-x_\circ)\ \Rightarrow y-۴=-۴(x-۵)\ \Rightarrow y=-۴x+۲۴$$



اکنون نمودار تابع داده شده و خط قائم بر آن را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.
ناحیه موردنظر سؤال در شکل مشخص شده است که این ناحیه به ازای x های -۳ تا ۵ زیر نمودار تابع $y=\sqrt{۲x+۶}$ قرار دارد و از $x=۵$ تا $x=۶$ زیر نمودار تابع $y=-۴x+۲۴$ قرار دارد، پس باید مساحت این دو ناحیه را به دست آوریم و با جمع کنیم.

$$S_۱=\int_{-۳}^{۵}\sqrt{۲x+۶}\,dx=\int_{-۳}^{۵}(۲x+۶)^{\frac{۱}{۲}}dx=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}(۲x+۶)^{\frac{۳}{۲}})_{-۳}^{۵}=\frac{۱}{۳}(۶۴)=\frac{۶۴}{۳}$$

مساحت قسمت هاشورخورده مساحت یک مثلث با قاعده یک واحد و ارتفاع ۴ می‌باشد و داریم:

$$S_۲=\frac{۱}{۲}\times۱\times۴=۲$$

پس مساحت کل برابر است با:

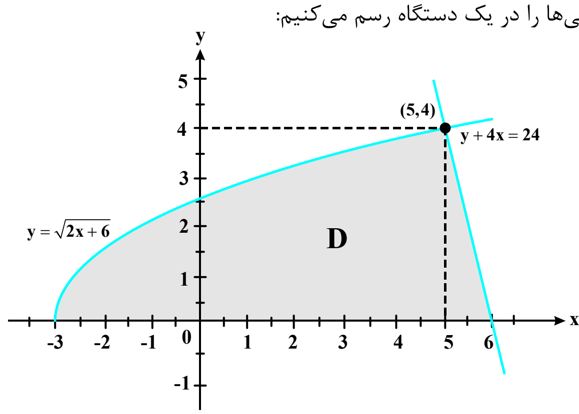
$$S=\frac{۶۴}{۳}+۲=\frac{۷۰}{۳}$$

روش دوم: اولین کاری که باید انجام دهیم، به دست آوردن خط قائم مورد اشاره است:

$$m = y' = \frac{2}{2\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{\sqrt{2(5)+6}} = \frac{1}{4} \Rightarrow m' = -\frac{1}{m} = -4$$

$$\Rightarrow L: y = -4(x-5)+4 = -4x+24 \Rightarrow y+4x = 24$$

حالا برای راحتی کار، هر دوی این دو منحنی‌ها را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



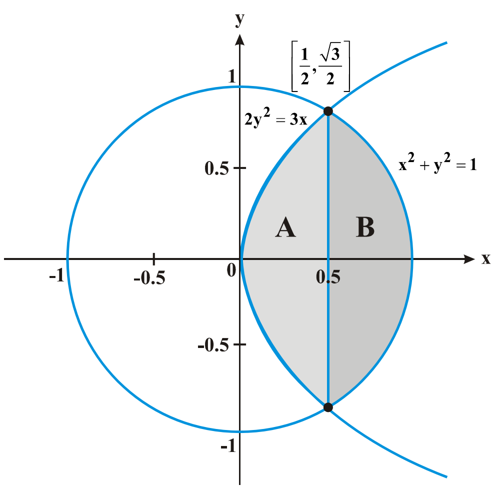
همانطور که ملاحظه می‌کنید، ناحیه مورد نظر در راستای محور xها منظم است. در نتیجه داریم:

$$y = \sqrt{2x+6} \Rightarrow x = \frac{y^2-6}{2} \quad , \quad y+4x = 24 \Rightarrow x = \frac{24-y}{4}$$

$$S = \iint_D dA = \int_0^4 \int_{\frac{y^2-6}{2}}^{\frac{24-y}{4}} dxdy = \int_0^4 \left(\frac{24-y}{4} - \frac{y^2-6}{2}\right)dy = \frac{1}{4}\int_0^4 (-2y^2 - y + 36)dy$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 36y\right)\Big|_0^4 = \frac{1}{4}\left(-\frac{128}{3} - \frac{16}{2} + 144\right) = \frac{-64-12+216}{6} = \frac{70}{3}$$

۲۱۳- گزینه «۲» در واقع حجم حاصل از دوران ناحیه D که شامل دو ناحیه منظم A و B است حول محور xها خواسته شده است (برای محاسبه حجم حاصل از دوران حول محور x، باید ناحیه در راستای محور yها منظم باشد). با توجه به تقارن هر دو ناحیه نسبت به این محور، کافیست فقط حجم حاصل از دوران ناحیه واقع در ربع اول حول محور xها را محاسبه کنیم. حالا داریم:



$$V = \pi\int_a^b r^2(x)dx = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} y_1^2 dx + \pi\int_{\frac{1}{2}}^1 y_2^2 dx = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3x}{2}\right)dx + \pi\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2)dx$$

$$= \pi\left(\frac{3}{4}x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right) + \pi\left(x - \frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^1\right) = \frac{3\pi}{4}\left(\frac{1}{4} - 0\right) + \pi\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right)\right]$$

$$= \frac{3\pi}{16} + \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{11}{24}\right) = \frac{3\pi}{16} + \frac{5\pi}{24} = \pi\left(\frac{9+10}{48}\right) = \frac{19\pi}{48}$$

۲۱۴- گزینه «۱» با استفاده از رابطه طول منحنی به فرم $y = f(x)$ داریم:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$$

$$y = 1 - Ln(\cos x) \Rightarrow y' = \frac{\sin x}{\cos x} = tgx \Rightarrow 1+(y')^2 = 1+tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow L = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left|\frac{1}{\cos x}\right| dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sec x dx = Ln|\sec x + tgx| \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= Ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right| - Ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| = Ln\left|\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right| = Ln3$$

۲۱۵ـ گزینه «۴» می‌دانیم که $y = x-[x]$ بخش اعشاری عدد x است و $۰ \le x-[x] < ۱$. بنابراین با قرینه کردن طرفین داریم: $۰ \ge -x+[x] > -۱$
حال با افزودن یک واحد به طرفین نامساوی می‌توان چنین نوشت:

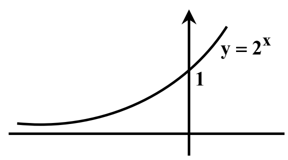
$$۱ \ge ۱-x+[x] > ۰ \quad , \quad ۱ \le \frac{۱}{۱-x+[x]} < \infty \quad , \quad ۱ \le \frac{۱}{\sqrt{۱-x+[x]}} < \infty$$

به عبارتی $۱ \le f(x) < \infty$.

۲۱۶ـ گزینه «۱» نمودارهای $f(x) = ۲^x$ و $g(x) = \frac{۱}{۲}\log x^۲$ را رسم می‌کنیم. تابع f بر $\mathbb{R}$ تعریف شده است و $f'(x) = ۲^x \operatorname{Ln} ۲$ همواره مثبت است.
بنابراین f همواره صعودی است.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ۲^{-\infty} = ۰ \quad , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = ۲^{\infty} = \infty$$

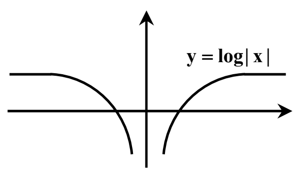
همچنین $f(۰) = ۱$ است. با این اطلاعات نمودار f را رسم می‌کنیم.



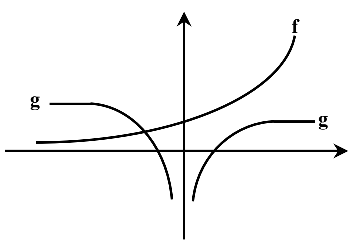
در مورد $g(x)$ دقت کنید که $g(x) = \log(\sqrt{x^۲}) = \log(|x|)$ تابعی زوج است و بنابراین نمودار آن نسبت به محور y متقارن است. برای $۰ < x < \infty$ داریم $g(x) = \log x$. دامنه $g(x)$ شامل صفر نیست.

$$\lim_{x \to ۰^+} g(x) = \log(۰^+) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$$

توجه کنید که سرعت رشد توابع لگاریتمی بسیار کمتر از توابع نمایی است.



اکنون با رسم نمودارهای f و g در یک دستگاه، واضح است که تنها یک نقطه برخورد دارند.



۲۱۷ـ گزینه «۴» همه جملات این بسط به فرم $\frac{۶!}{n!m!k!}(x^۲)^n(-\frac{۱}{x})^m(۱)^k$ هستند که در آن $n+m+k = ۶$ است و $n, m, k \ge ۰$. برای آن که جمله به وجود آمده فاقد x باشد، باید $m = ۲n$ باشد. همه این جملات را نوشته و با هم جمع می‌کنیم.

$$\frac{۶!}{۰!۰!۶!}(x^۲)^۰(-\frac{۱}{x})^۰(۱)^۶ + \frac{۶!}{۱!۲!۳!}(x^۲)(-\frac{۱}{x})^۲(۱)^۳ + \frac{۶!}{۲!۴!۰!}(x^۲)^۲(-\frac{۱}{x})^۴ = ۱+۶۰+۱۵ = ۷۶$$

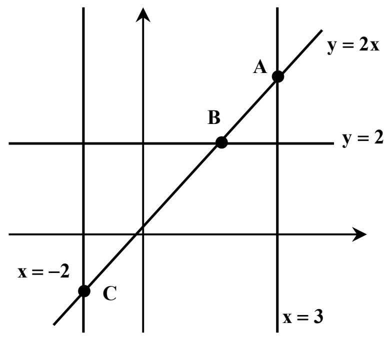
۲۱۸ـ گزینه «۱» در $x = ۰$ و $x = \pm۱$ مقدار عبارات داخل قدر مطلق صفر می‌شود. در این نقاط ضابطه f عوض می‌شود؛ بنابراین با جدا کردن نواحی داریم:

$$f(x) = \begin{cases} -x-۱+۱+x = ۰ & x < -۱ \\ x+۱+۱+x = ۲x+۲ & -۱ < x < ۰ \\ -x+۱+۱-x = -۲x+۲ & ۰ < x < ۱ \\ x-۱+۱-x = ۰ & ۱ < x \end{cases}$$

در بازه‌های $(-\infty, -۱)$ و $(۱, \infty)$ تابع f مقدار ثابتی دارد. در بازه $(۰, ۱)$ خط $y = -۲x+۲$ نزولی است و نقطه در بازه $(-۱, ۰)$ تابع f با خط $y = ۲x+۲$ برابر است که صعودی است.

۲۱۹ـ گزینه «۴» تابع $f(x)=\frac{2x}{x+2}+\frac{9x-2}{x^2-x-6}$ دارای یک مجانب افقی است که معادله آن چنین است: $y=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$

دقت کنید که وقتی $x\to\pm\infty$، با استفاده از قانون بزرگ‌ترین درجه، مقدار حد به دست می‌آید. خط $y=2$ مجانب افقی f است. از طرفی خط $x=-2$ مجانب قائم f است؛ زیرا ریشه‌ی مخرج است و $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\pm\infty$. سایر ریشه‌های مخرج از حل معادله $x^2-x-6=0$ به دست می‌آیند. $\Delta=25$ و $x=\frac{1\pm5}{2}=3,-2$ است. پس خط $x=3$ نیز مجانب قائم f است.



خط $y=2x$ با مجانب‌های قائم و افقی f که عبارتند از $x=-2$ و $x=3$ و $y=2$ در سه نقطه برخورد می‌کند که عبارتند از: $A(3,6)$ و $B(1,2)$ و $C(-2,-4)$.

$$\text{فاصله A و C}=\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$$

$$\text{فاصله A و B}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$\text{فاصله B و C}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

بنابراین فقط گزینه (۴) می‌تواند درست باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۲۰ـ گزینه «۲» نقاط بحرانی یک تابع، نقاطی‌اند که تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست و یا مشتقش برابر صفر است.

$$|x+1|-|x|=\begin{cases}-1 & x<-1\\ 2x+1 & -1\le x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}\Rightarrow f(x)=(|x+1|-|x|)^2=\begin{cases}1 & x<-1\\ (2x+1)^2 & -1\le x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

تابع f در نقاط $x=0$ و $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقاط جزء نقاط بحرانی تابع f هستند.

$$f'(x)=0\Rightarrow 2(2)(2x+1)=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\ :\ -1\le x\le 0$$

مشتق تابع f در $x=\frac{-1}{2}$ برابر صفر است، پس $x=\frac{-1}{2}$ یک نقطه بحرانی تابع f است. در نتیجه، تابع f سه نقطه بحرانی دارد.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۲۱- گزینه «۱» توجه کنید که در این‌گونه سؤالات، تا زمانی که مختصات نقطه تلاقی را به صورت تابعی از c به‌دست نیاورده‌اید، c را به سمت عدد مطلوب میل ندهید. یعنی:

$$\begin{cases}y+3x=c+1\\ cy+(c^2+2)x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=(c+1)-3x\\ x=\frac{2-cy}{c^2+2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=(c+1)-3\frac{2-cy}{c^2+2}\\ x=\frac{2-c((c+1)-3x)}{c^2+2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y(1-\frac{3c}{c^2+2})=(c+1)-\frac{6}{c^2+2}\\ x(1-\frac{3c}{c^2+2})=\frac{2-c(c+1)}{c^2+2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y(\frac{c^2-3c+2}{c^2+2})=\frac{(c+1)(c^2+2)-6}{c^2+2}\\ x(\frac{c^2-3c+2}{c^2+2})=\frac{2-c-c^2}{c^2+2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{c^3+c^2+2c-4}{c^2-3c+2}\\ x=\frac{2-c-c^2}{c^2-3c+2}\end{cases}$$

$$\lim_{c\to1} x=\lim_{c\to1}\frac{2-c-c^2}{c^2-3c+2}\ \underline{\underline{HOP}}\ \lim_{c\to1}\frac{-1-2c}{2c-3}=\frac{-1-2}{2-3}=3$$

$$\lim_{c\to1} y=\lim_{c\to1}\frac{c^3+c^2+2c-4}{c^2-3c+2}\ \underline{\underline{HOP}}\ \lim_{c\to1}\frac{3c^2+2c+2}{2c-3}=\frac{3+2+2}{2-3}=-7$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۲۲- گزینه «۳» کافی است از معادله ضمنی داده شده نسبت به پارامتر t مشتق بگیریم. ولی در ابتدا:

$$Ln(x^2-3)+\sqrt{3y+2x}-y+2=0\xrightarrow{x=2}Ln(4-3)+\sqrt{3y+4}-y+2=0\Rightarrow\sqrt{3y+4}=y-2$$

$$\xrightarrow{y\ge2}3y+4=y^2-4y+4\Rightarrow y^2-7y=y(y-7)=0\xrightarrow{y\ge2}y=7$$

$$Ln(x^2-3)+\sqrt{3y+2x}-y+2=0\xrightarrow{\frac{d}{dt}}\frac{2x\frac{dx}{dt}}{x^2-3}+\frac{3\frac{dy}{dt}+2\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{3y+2x}}-\frac{dy}{dt}=0$$

$$(x,\frac{dx}{dt})=(2,0/05)\Rightarrow\frac{2\times2\times0/05}{2^2-3}+\frac{3\frac{dy}{dt}+2\times0/05}{2\sqrt{3\times7+2\times2}}-\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow 0/2+\frac{3\frac{dy}{dt}+0/1}{10}-\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{0/21}{0/7}=0/3$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۲۳- گزینه «۱» با توجه به این‌که مختصات نقطه، در معادله صفحه صدق نمی‌کند (امتحان کنید!)، پس باید این معادله صفحه‌ای باشد که یکی از وجوه مقابل این نقطه در آن قرار دارد. در این حالت، فاصله نقطه A از این صفحه برابر طول یال مکعب است. در نتیجه داریم:

$$d=\frac{|۴x+۴y-۷z+۲|}{\sqrt{۴^۲+۴^۲+۷^۲}}=\frac{|۴(۲)+۴(۳)-۷(۴)+۲|}{\sqrt{۸۱}}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow V=d^۳=\frac{۸}{۲۷}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۲۴ـ گزینه «۱» فرض می‌کنیم $t=kx$ باشد. در این صورت داریم $x=\frac{t}{k}$ پس $dx=\frac{۱}{k}dt$.

$$\circ\le x\le\pi\Rightarrow\circ\le t\le k\pi$$

با این تغییر متغیر داریم:

$$I_k=\int_\circ^{k\pi}e^{(\frac{t}{k})^۲}\sin t\frac{dt}{k}=\frac{۱}{k}\int_\circ^{k\pi}e^{\frac{t^۲}{k^۲}}\sin t\,dt$$

اکنون داریم: $\lim\limits_{k\to\infty}I_k=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\int_\circ^{k\pi}e^{\frac{t^۲}{k^۲}}\sin t\,dt}{k}$ مخرج به ∞میل می‌کند. اگر صورت کسر به ∞ میل نکند، مقدار حد برابر با صفر است ($\frac{\text{کران‌دار}}{\infty}=\circ$)

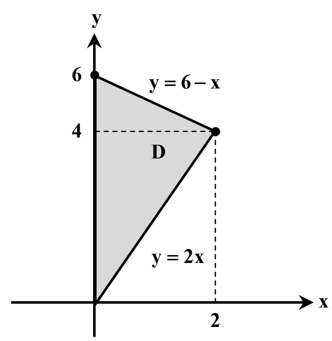
اگر هم حد صورت، ∞ باشد با استفاده از هوپیتال داریم:

$$\lim_{k\to\infty}I_k=\lim_{k\to\infty}\frac{(\pi)(e^{\frac{k^۲\pi^۲}{k^۲}}\sin k\pi)-(\circ)}{۱}=\lim_{k\to\infty}\pi e^{\pi^۲}\sin k\pi=\lim_{k\to\infty}(\circ)=\circ$$

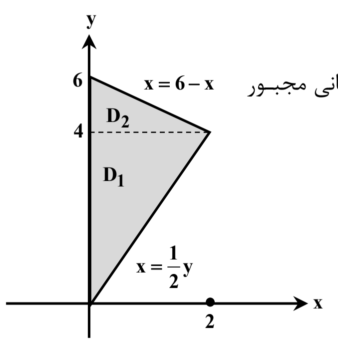
پس در هر صورت داریم: $\lim\limits_{k\to\infty}I_k=\circ$.

◆ ◆ ◆ ◆

۲۲۵ـ گزینه «۳» از گزینه‌ها پیداست که باید ترتیب متغیرها را در انتگرال عوض کنیم. ابتدا با توجه به حدود انتگرال میانی یعنی خط $y=۲x$ و خط $y=۶-x$، همچنین با در نظر گرفتن حدود x که به صورت $\circ\le x\le ۲$ است، ناحیه‌ی D را تشخیص می‌دهیم.



حالا می‌خواهیم این انتگرال را با ترتیب $\iint_D f(x,y)dxdy$ بنویسیم. برای نوشتن حدود x در انتگرال میانی مجبور می‌شویم که قسمت‌های بالایی و پایینی D را از هم جدا کنیم.



برای ناحیه‌ی $D_۱$ داریم $\circ\le y\le ۴$ و از چپ به راست مرز ورودی $x=\circ$ و مرز خروجی $x=\frac{y}{۲}$ است.

برای ناحیه‌ی $D_۲$ داریم $۴\le y\le ۶$ و از چپ به راست، مرز ورودی $x=\circ$ و مرز خروجی $x=۶-y$ است.

$$I=\int_\circ^۴\int_\circ^{\frac{y}{۲}}f(x,y)dxdy+\int_۴^۶\int_\circ^{۶-y}f(x,y)dxdy$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۲۶ـ گزینه «۴» مرز C دایره‌ای به مرکز (۲,۲) و شعاع $R=۱$ است، پس نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ درون این مرز قرار ندارد. طبق متن درس، هرگاه مبدأ مختصات درون مرز بسته‌ی C قرار نداشته باشد، برای میدان برداری $\vec{F}=(\frac{-y}{x^۲+y^۲},\frac{x}{x^۲+y^۲})$ داریم:

$$\oint_C\vec{F}.dr=\oint_C\frac{-ydx+xdy}{x^۲+y^۲}=\circ$$

توضیح: میدان $\vec{F}$ پایستار است، با محاسبه‌ی مشتق‌های جزئی می‌بینیم که:

$$Q_x=P_y=\frac{y^۲-x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

این توابع درون و روی مرز بسته‌ی C پیوسته و مشتق‌پذیرند، پس با استفاده از قضیه‌ی گرین داریم:

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D(Q_x-P_y)dA=\iint_D(\circ)dA=\circ$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۲۷ـ گزینه «۱» اگر z_1، z_2 و z_3 ریشه‌های سوم واحد باشند یعنی جواب‌های معادله‌ی $z^3=1$ باشند، داریم $z^3-1=0$؛ پس با تجزیه به عوامل اول داریم:

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=0 \Rightarrow z^3-1=z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2-(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)z-z_1z_2z_3=0$$

با توجه به تساوی طرفین، ضریب z^2 و ضریب z و جمله ثابت معادله عبارتند از:

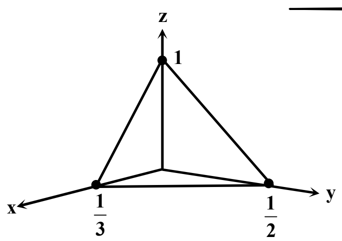
$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=0 \\ z_1z_2z_3=1 \end{cases}$$

در ضمن با تقسیم معادله‌ی $z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=0$ بر $z_1z_2z_3$ داریم: $\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_1}=0$. همچنین با توجه به آن‌که z_1 و z_2 و z_3 جواب‌های معادله‌ی $z^3=1$ هستند، داریم:

$$z_1^3=1 \Rightarrow z_1^2\times z_1=1 \Rightarrow z_1^2=\frac{1}{z_1}$$

به همین ترتیب $z_2^2=\frac{1}{z_2}$ و $z_3^2=\frac{1}{z_3}$ پس گزینه‌های (۲) و (۴) کاملاً یکسان هستند. با این توضیحات دیدیم که گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) صحیح هستند. اما گزینه (۱) صحیح نیست؛ زیرا: $z_1^3+z_2^3+z_3^3=1+1+1\neq 0$.

۲۲۸ـ گزینه «۱»



روش اول: طبق فرمول متن کتاب حجم ۴ وجهی که در نقاط $x=a$، $y=b$ و $z=c$ با محورهای مختصات برخورد می‌کند برابر با $V=\frac{1}{6}abc$ است.

بنابراین در این مثال داریم:

$$V=\frac{1}{6}(1)(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})=\frac{1}{36}$$

روش دوم: معادله‌ی صفحه‌ای که از نقاط داده شده می‌گذرد به صورت $\frac{x}{\frac{1}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}+\frac{z}{1}=1$ است. بنابراین $z=1-3x-2y$.

معادله‌ی خطی که در صفحه‌ی xoy از $(\frac{1}{3},0)$ و $(\frac{1}{2},0)$ می‌گذرد به صورت $\frac{x}{\frac{1}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1$ است یعنی $y=\frac{1-3x}{2}$ پس، با استفاده از انتگرال سه‌گانه، حجم این ناحیه برابر است با:

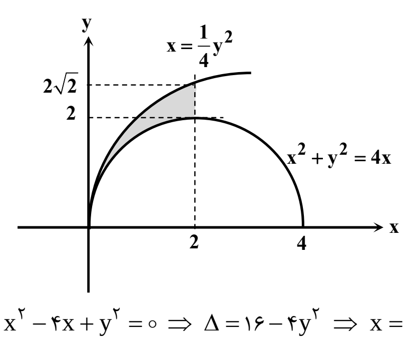
$$V=\int_0^{\frac{1}{3}}\int_0^{\frac{1-3x}{2}}\int_0^{1-3x-2y}dzdydx=\int_0^{\frac{1}{3}}\int_0^{\frac{1-3x}{2}}(1-3x-2y)dydx=\int_0^{\frac{1}{3}}[(1-3x)y-y^2]_0^{\frac{1-3x}{2}}dx=\int_0^{\frac{1}{3}}[(1-3x)(\frac{1-3x}{2})-\frac{(1-3x)^2}{4}]dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}(1-3x)^2dx=[-\frac{1}{12}\frac{(1-3x)^3}{3}]_0^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{36}$$

۲۲۹ـ گزینه «۲» از گزینه‌ها معلوم است که باید ترتیب متغیرها را عوض کنیم. ابتدا با رسم کران‌های انتگرال میانی ناحیه‌ی D را تشخیص می‌دهیم.

منحنی $y=\sqrt{4x-x^2}$ نیم‌دایره‌ی بالایی از دایره‌ی $x^2+y^2=4x$ است. منحنی $y=2\sqrt{x}$ همان منحنی $x=\frac{1}{4}y^2$ است البته، در ربع اول قرار می‌گیرد.

با توجه به حدود x داریم $0\le x\le 2$.



خط $x=2$ را با منحنی‌های $x=\frac{1}{4}y^2$ و $x^2+y^2=4x$ برخورد می‌دهیم، مقادیر $y=2\sqrt{2}$ و $y=2$ مطابق شکل به‌دست می‌آیند. برای نوشتن حدود x در انتگرال میانی مجبور می‌شویم ناحیه‌ی D را به دو بخش تقسیم کنیم. در بخش زیرین داریم $0\le y\le 2$ و اگر از چپ به راست حرکت کنیم، $x=\frac{1}{4}y^2$ مرز ورودی است و $x^2+y^2=4x$ مرز خروجی است.

از حل معادله‌ی $x^2+y^2=4x$ می‌توانیم x را برحسب y به‌دست آوریم.

$$x^2-4x+y^2=0 \Rightarrow \Delta=16-4y^2 \Rightarrow x=\frac{+4\pm\sqrt{4(4-y^2)}}{2}=2\pm\sqrt{4-y^2}$$

البته $x=2+\sqrt{4-y^2}$ نیم‌دایره‌ی سمت راست و $x=2-\sqrt{4-y^2}$ نیم‌دایره‌ی سمت چپ را نشان می‌دهد.

پس در بخش پایینی D داریم $0\le y\le 2$ و $\frac{1}{4}y^2\le x\le 2-\sqrt{4-y^2}$.

در بخش بالایی D داریم $2\le y\le 2\sqrt{2}$ و اگر از چپ به راست حرکت کنیم $x=\frac{1}{4}y^2$ مرز ورودی و $x=2$ مرز خروجی است.

بنابراین گزینه‌ی (۲) به شکل صحیح ترتیب جدید انتگرال دوگانه را نشان می‌دهد.

$$\int_0^2\int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}}f(x,y)dxdy+\int_2^{2\sqrt{2}}\int_{\frac{y^2}{4}}^{2}f(x,y)dxdy$$

۲۳۰ـ گزینه «۱» ابتدا با استفاده از اتحادها، $f(z)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$f(z)=(z^2+1)(z^2-1)(z^2+1)(z-1)(z^2+z+1)=(z^2+1)(z-1)(z+1)(z^2+1)(z-1)(z^2+z+1)=(z^2+1)^2(z-1)^2(z+1)(z^2+z+1)$$

ریشه‌های $z+1=0$ و $z-1=0$ اعداد $z=\pm1$ هستند. معادله‌ی $z^2+1=0$ دارای دو ریشه‌ی مختلط $z=\pm i$ است. معادله‌ی $z^2+z+1=0$ نیز دارای ۲ ریشه‌ی متمایز است که عبارتند از $z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. در مجموع ۶ ریشه‌ی متمایز به‌دست می‌آید.

توجه: هر چندجمله‌ای درجه‌ی n در اعداد مختلط دقیقاً دارای n ریشه است. پس این چند جمله‌ای درجه‌ی ۹ دقیقاً دارای ۹ ریشه است. اما برخی از ریشه‌ها ممکن است تکراری باشند. در مثال بالا $f(z)$ دارای ۶ ریشه‌ی متمایز است.

۲۳۱ـ گزینه «۱» می‌خواهیم از آزمون f_x و f_y و $\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ در نقطه $p(-\frac{4}{3},-\frac{5}{3})$ استفاده کنیم. برای ساده‌تر شدن مشتق‌گیری‌ها فرض کنید $u=x^2+y^2-xy+2y+x$. بنابراین داریم:

$$u_x=2x-y+1 \Rightarrow u_{xx}=2\ ,\ u_{xy}=-1$$
$$u_y=2y-x+2 \Rightarrow u_{yy}=2$$

در نقطه‌ی $p(-\frac{4}{3},-\frac{5}{3})$ داریم:

$$\begin{cases} u_x=-\frac{8}{3}+\frac{5}{3}+1=0\ ,\ u_{xx}=2\ ,\ u_{xy}=-1 \\ u_y=-\frac{10}{3}+\frac{4}{3}+2=0\ ,\ u_{yy}=2 \end{cases}$$

پس $\Delta=(2)(2)-(-1)^2>0$ و $u_{xx}>0$: در نتیجه p نقطه‌ی مینیمم نسبی برای $u(x,y)$ است. پس p یک نقطه مینیمم نسبی برای تابع $f(x,y)=e^{u(x,y)}$ است.

توضیح: نقاط بحرانی تابع $w=e^u$ همان نقاط بحرانی تابع $w=u$ هستند.

هم‌چنین نقاط بحرانی توابع $w=Ln(u)$ و $w=\sqrt{u}$ نیز همان نقاط بحرانی تابع $w=u$ هستند؛ البته با رعایت این شرط که $u>0$ باشد.

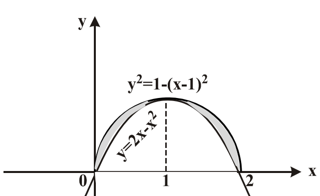
بنابراین در این سؤال توانستیم به‌جای تابع f روی تابع $u=x^2+y^2-xy+2y+x$ کار کنیم و محاسبات را ساده‌تر انجام دهیم.

۲۳۲ـ گزینه «۱» ابتدا ناحیه‌ی توصیف شده در صورت سؤال را رسم می‌کنیم.

حالا به کمک انتگرال معین، حجم حاصل از دوران را محاسبه می‌کنیم. معمولاً از روش دیسک برای دوران حول محور xها استفاده می‌کنیم.

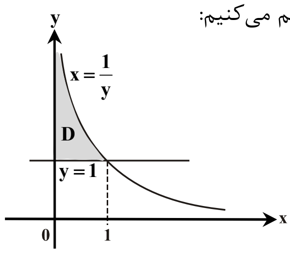
منحنی $y^2=1-(x-1)^2$ از محور xها دورتر است پس، شعاع دوران بزرگتر را می‌دهد: $R_1=\sqrt{1-(x-1)^2}=\sqrt{2x-x^2}$

منحنی $y=2x-x^2$ به محور xها نزدیک‌تر است و شعاع دوران کوچکتر را می‌دهد: $R_2=2x-x^2$. محل برخورد منحنی‌های $y=\sqrt{2x-x^2}$ و $y=2x-x^2$ در جایی است که $2x-x^2=0$ باشد یعنی $x=0$ و $x=2$. در نتیجه خواهیم داشت:



$$V=\pi\int_0^2(R_1^2-R_2^2)dx$$
$$\Rightarrow V=\pi\int_0^2(1-(x-1)^2-(2x-x^2)^2)dx=\pi\int_0^2(1-x^2+2x-1-4x^2+4x^3-x^4)dx$$
$$=\pi\int_0^2(-x^4+4x^3-5x^2+2x)dx=\pi(\frac{-x^5}{5}+x^4-\frac{5x^3}{3}+x^2)\Big|_0^2=2\pi(\frac{-1}{5}+1-\frac{5}{3}+1)=\frac{4\pi}{15}$$

۲۳۳ـ گزینه «۲» ناحیه‌ی D را که محدود به منحنی $y=\frac{1}{x}$ (یا همان $x=\frac{1}{y}$) و خطوط $y=1$ و $x=0$ است، رسم می‌کنیم:



در این ناحیه داریم $1\le y<\infty$ و اگر از چپ به راست حرکت کنیم، $x=0$ مرز ورودی است و $x=\frac{1}{y}$ مرز خروجی است. در این صورت انتگرال دوگانه‌ی داده شده برابر است با:

$$\iint_D-\frac{dA}{x+y}=\int_1^\infty\int_0^{\frac{1}{y}}\frac{-dxdy}{x+y}=-\int_1^\infty[Ln(x+y)]_0^{\frac{1}{y}}dy=\int_1^\infty(Lny-Ln(y+\frac{1}{y}))dy$$

$$\int_1^\infty(Lny-Ln(\frac{y^2+1}{y}))dy=\int_1^\infty Ln\frac{y^2}{y^2+1}dy=\int_1^\infty(2Lny-Ln(y^2+1))dy=2(yLny-y)\Big|_1^\infty-\int_1^\infty Ln(y^2+1)dy$$

برای محاسبه‌ی انتگرال اخیر از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} Ln(y^۲+۱)=u \ \to\ du=\dfrac{۲y}{y^۲+۱} \\ dy=dv \ \to\ v=y \end{cases} \Rightarrow \int Ln(y^۲+۱)dy = yLn(y^۲+۱)-\int\frac{۲y^۲}{y^۲+۱}dy = yLn(y^۲+۱)-۲\int(۱-\frac{۱}{y^۲+۱})dy$$

$$= yLn(y^۲+۱)-۲(y-\tan^{-۱}y)$$

در نتیجه داریم:

$$\iint_D -\frac{dA}{x+y} = ۲(yLn-y)-yLn(y^۲+۱)+۲(y-\tan^{-۱}y)\Big|_۱^\infty = yLn(\frac{y^۲}{y^۲+۱})-۲\tan^{-۱}y\Big|_۱^\infty = (۰-۲(\frac{\pi}{۲}))-(Ln\frac{۱}{۲}-۲(\frac{\pi}{۴})) = -\frac{\pi}{۲}+Ln۲$$

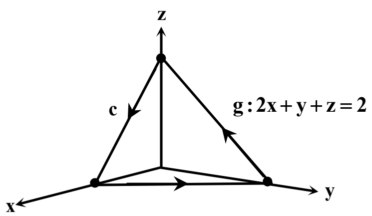
توجه کنید که: $\lim\limits_{y\to\infty} Ln(\frac{y^۲}{y^۲+۱}) = Ln(۱)=۰$.

۲۳۴ـ گزینه «۳» صفحه‌ی $g:۲x+y+z=۲$ با صفحات مختصات در $\frac{۱}{۸}$ اول برخورد می‌کند و مرز آن یک مثلث است که همان منحنی c را تشکیل می‌دهد.

c یک منحنی بسته است، پس از قضیه‌ی استوکس استفاده می‌کنیم و داریم: $\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_S curl\vec{F}.\vec{n}d\sigma$

سطح S همان صفحه‌ی $g:۲x+y+z^۲=۴$ است که در $\frac{۱}{۸}$ اول قرار دارد.

ابتدا $curl\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم.



$$curl\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & ۳xz \end{vmatrix} = (۰)\vec{i}-(۳z-x)\vec{j}+y\vec{k}$$

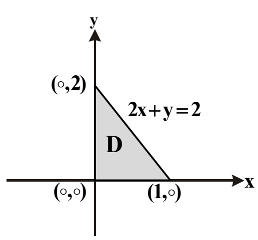
پس $curl\vec{F}=(۰,x-۳z,y)$ است.

فرض می‌کنیم ناحیه‌ی D، تصویر S بر صفحه‌ی xoy باشد. $\vec{n}d\sigma = \pm\dfrac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA = \pm\dfrac{(۲,۱,۱)}{۱}dA$

برای آن‌که بردار به دست آمده رو به بالا باشد، باید علامت مثبت را در نظر بگیریم.

$$I=\iint_D (۰,x-۳z,y).(۲,۱,۱)dA = \iint_D (x-۳z+y)dA = \iint_D [x-۳(۲-۲x-y)+y]dA$$

$$= \iint_D (۷x+۴y-۶)dA = (۷\bar{x}+۴\bar{y}-۶)\times(\text{مساحت } D)$$



ناحیه‌ی D به محورهای مختصات و خط $۲x+y=۲$ محدود می‌شود. رئوس آن $(۰,۰)$ و $(۱,۰)$ و $(۰,۲)$ هستند.

پس مساحت آن $\frac{۲\times۱}{۲}=۱$ و مرکز گون آن: $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{۰+۱+۰}{۳},\frac{۰+۰+۲}{۳}) = (\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ است.

$$I=(\frac{۷}{۳}+\frac{۸}{۳}-۶)\times(۱)=-۱$$

۲۳۵ـ گزینه «۴» سعی می‌کنیم با انجام یک سری عملیات روی رابطه $\frac{۱}{۱-x}=\sum\limits_{n=۰}^{\infty}x^n$ به فرم خواسته شده در سؤال برسیم. ابتدا از طرفین تساوی مشتق می‌گیریم:

$$\frac{۱}{(۱-x)^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}nx^{n-۱} \xrightarrow{\times x} \frac{x}{(۱-x)^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}nx^n \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{۱+x}{(۱-x)^۳}=\sum_{n=۱}^{\infty}n^۲x^{n-۱}=۱+\sum_{n=۲}^{\infty}n^۲x^{n-۱}$$

$$\xrightarrow{\times x} \frac{x+x^۲}{(۱-x)^۳}=x+\sum_{n=۲}^{\infty}n^۲x^n \xrightarrow{x=\frac{۱}{۵}} \frac{\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۵}}{(۱-\frac{۱}{۵})^۳}=\frac{۱}{۵}+\sum_{n=۲}^{\infty}n^۲(\frac{۱}{۵})^n \Rightarrow \sum_{n=۲}^{\infty}\frac{n^۲}{۵^n}=\frac{\frac{۶}{۲۵}}{\frac{۶۴}{۱۲۵}}-\frac{۱}{۵}=\frac{۱۵}{۳۲}-\frac{۱}{۵}=\frac{۴۳}{۱۶۰}$$

۲۳۶ـ گزینه «۳» با توجه به بسته بودن سطح S، از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_D (div\vec{F})dv = \iiint_D (۱+۲+۳)dv = ۶\iiint_D dv = ۶V$$

۲۳۷ـ گزینه «۲» با توجه به ضابطه‌ی $f(x)$ چه برای اعداد گویا و چه برای اعداد گنگ داریم: $|f(x)|=|\pm x|=|x|$ پس $-x \le f(x) \le x$ در نتیجه $\frac{-x}{۱+۲x^۲} \le \frac{f(x)}{۱+۲x^۲} \le \frac{x}{۱+۲x^۲}$. حالا از قضیه‌ی ساندویچ استفاده می‌کنیم. در دو طرف نامساوی داریم: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pm x}{۱+۲x^۲} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pm x}{۲x^۲} = ۰$ پس $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ۰$ است.

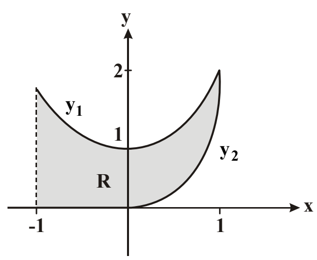
توجه: برای اعداد منفی جهت نامساوی‌ها عوض می‌شود اما این نتیجه‌ی به‌دست آمده را تغییر نمی‌دهد.

۲۳۸ـ گزینه «۲» طبق فرمول، اگر هر مقطع عرضی شکل در ارتفاع y دارای مساحت $S(y)$ باشد، حجم شکل برابر با: $V = \int_{y=a}^{y=b} S(y)dy$ است. در این جسم داریم $۰ \le y \le h$ زیرا ارتفاع آن h است. هر مقطع عرضی این جسم قطاعی به شعاع a و زاویه‌ی $\alpha = ۲\pi(۱-\frac{y}{h})$ است. مساحت قطاع برابر است با:

$$S(y) = \frac{۱}{۲}a^۲\alpha = \frac{۱}{۲}a^۲ ۲\pi(۱-\frac{y}{h}) \Rightarrow S(y) = \pi a^۲(۱-\frac{y}{h})$$

با جایگذاری در فرمول V داریم:

$$V = \int_۰^h S(y)dy = \pi a^۲ \int_۰^h (۱-\frac{y}{h})dy = \pi a^۲ (y - \frac{y^۲}{۲h})\Big|_۰^h = \frac{\pi a^۲ h}{۲}$$



۲۳۹ـ گزینه «۲» مساحت بین منحنی‌های $y_۱ = x^۲+۱$ و $y_۲ = \frac{x^۳+|x^۳|}{۲}$ را در بازه‌ی $-۱ \le x \le ۱$ می‌خواهیم.

ابتدا توجه کنید که در بازه‌ی $-۱ \le x < ۰$ داریم: $y_۲ = \frac{x^۳+|x^۳|}{۲} = \frac{x^۳-x^۳}{۲} = ۰$ و در بازه‌ی $۰ \le x \le ۱$ داریم: $y_۲ = \frac{x^۳+|x^۳|}{۲} = \frac{x^۳+x^۳}{۲} = x^۳$.

بنابراین نمودارها مطابق شکل رسم می‌شوند و طبق فرمول مساحت محصور به دو منحنی داریم:

$$S = \int_{-۱}^{۱} (y_۱ - y_۲)dx$$

دقت کنید که چون $y_۱ \ge y_۲$ است، نیازی به استفاده از قدر مطلق نداریم. با جایگذاری مقادیر $y_۱$ و $y_۲$ در بازه‌های $-۱ \le x < ۰$ و $۰ \le x \le ۱$ داریم:

$$S = \int_{-۱}^{۰} (x^۲+۱-۰)dx + \int_۰^۱ (x^۲+۱-x^۳)dx = [\frac{x^۳}{۳}+x]_{-۱}^{۰} + [\frac{x^۳}{۳}+x-\frac{x^۴}{۴}]_۰^۱ = \frac{۴}{۳}+\frac{۱۳}{۱۲} = \frac{۲۹}{۱۲}$$

۲۴۰ـ گزینه «۳» می‌دانیم که $|\cos(۳^n\alpha)| \le ۱$ است، بنابراین داریم: $\left|\frac{\cos(۳^n\alpha)}{۳^n}\right| \le \frac{۱}{۳^n}$

سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۳^n}$ از نوع هندسی و با قدر نسبت $\frac{۱}{۳}$ است. از آنجا که $|\frac{۱}{۳}| < ۱$ است، همگرایی این سری واضح است، پس طبق آزمون مقایسه، سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \left|\frac{\cos(۳^n\alpha)}{۳^n}\right|$ همگراست. این نشان می‌دهد که سریِ $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos(۳^n\alpha)}{۳^n}$، نه تنها همگراست، بلکه از نوع همگرای مطلق است. در محاسبات بالا مهم نیست که مقدار α چند باشد. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۲۴۱ـ گزینه «۴» ابتدا با محاسبه‌ی $\text{curl}\vec{F}$ مشخص می‌کنیم که آیا $\vec{F}$ پایستار است یا خیر؟ اگر $\text{curl}\vec{F} = ۰$ باشد، میدان $\vec{F}$ پایستار است و انتگرال مستقل از مسیر C خواهد بود.

$$\text{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ۲x+z & z & y+x \end{vmatrix} = (۱-۱)\vec{i} - (۱-۱)\vec{j} + (۰-۰)\vec{k} = ۰$$

پس انتگرال مستقل از مسیر C است و کافی است نقطه‌ی ابتدا و انتهای مسیر را در تابع پتانسیل قرار بدهیم. با جایگذاری $t=۰$ و $t=۱$ در فرمول $\alpha(t)$ به‌ترتیب نقاط $A(۱,۰,۱)$ و $B(۰,۲,۳)$ که ابتدا و انتهای مسیر هستند معلوم می‌شوند. حالا تابع پتانسیل را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x,y,z) = \int (۲x+z)dx + \int z\,dy + \int (۰+۰)dz = x^۲+zx+zy \Rightarrow \int_C \vec{F}.d\vec{r} = g(x,y,z)\Big|_A^B = x^۲+zx+zy\Big|_{(۱,۱,۱)}^{(۰,۲,۳)} = (۰+۶)-(۱+۱+۱) = ۳$$

۲۴۲ـ گزینه «۳» ابتدا مشتق‌های جزئی f نسبت به x و y را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا نقطه‌ی بحرانی f معلوم شود:

$$\begin{cases} f_x = y - y^3 - 3x^2y = 0 \\ f_y = x - 3xy^2 - x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1-y^2-3x^2) = 0 \\ x(1-3y^2-x^2) = 0 \end{cases}$$

با توجه به شرط $x>0$ و $y>0$ که در صورت سؤال آمده است، می‌دانیم که x و y مخالف صفر هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 1-y^2-3x^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 1-3x^2 \\ 1-3y^2-x^2 = 0 \Rightarrow 1-3(1-3x^2)-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{x>0} x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

با جایگذاری $x=\frac{1}{2}$ در هر کدام از معادلات داریم: $y^2=\frac{1}{4}$، پس با توجه به شرط $y>0$ داریم: $y=\frac{1}{2}$. تا اینجا متوجه شدیم که نقطه‌ی $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ تنها نقطه‌ی بحرانی f در ناحیه‌ی $x>0$ و $y>0$ است.

برای تعیین نوع این نقطه از محک Δ استفاده می‌کنیم: $f_{xx}=-6xy$ ، $f_{xy}=1-3y^2-3x^2$ ، $f_{yy}=-6xy$

در نقطه‌ی $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ داریم:

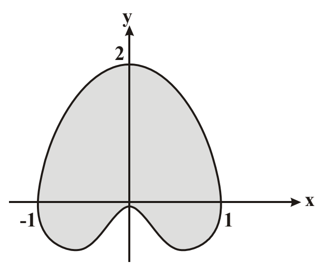
$$f_{xx}=-\frac{6}{4} \text{ ، } f_{xy}=1-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{2}{4} \text{ ، } f_{yy}=-\frac{6}{4} \Rightarrow \Delta=(f_{xx})(f_{yy})-(f_{xy})^2=(-\frac{6}{4})(-\frac{6}{4})-(-\frac{2}{4})^2=\frac{32}{16}=2>0$$

پس $\Delta>0$ و $f_{xx}<0$، یعنی نقطه‌ی بحرانی مورد نظر از نوع ماکزیمم نسبی است. در ضمن مقدار تابع f در نقطه‌ی $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ به راحتی قابل محاسبه است:

$$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$

۲۴۳ـ گزینه «۲» معادله‌ی رویه‌های داده‌شده را می‌توان به‌صورت $z=1$ و $z=\frac{r}{1+\sin\theta}$ نوشت. با توجه به این معادلات بهتر است از دستگاه استوانه‌ای استفاده کنیم. حجم ناحیه‌ی D در دستگاه استوانه‌ای برابر با $V=\iiint_D r\,dz\,dr\,d\theta$ است. حدود z به وضوح مشخص هستند. برای تعیین حدود r و θ رویه‌های داده‌شده را با هم برخورد می‌دهیم:

$$z=1 \text{ , } z=\frac{r}{1+\sin\theta} \Rightarrow \frac{r}{1+\sin\theta}=1 \Rightarrow r=1+\sin\theta$$



منحنی $r=1+\sin\theta$ یک دلوار است که در شکل مقابل رسم شده است.

در این دلوار داریم: $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1+\sin\theta$. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\sin\theta}\int_{\frac{r}{1+\sin\theta}}^{1} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\sin\theta}[rz]_{\frac{r}{1+\sin\theta}}^{1}\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\sin\theta}(r-\frac{r^2}{1+\sin\theta})\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3(1+\sin\theta)}]_0^{1+\sin\theta}\,d\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}[\frac{(1+\sin\theta)^2}{2}-\frac{(1+\sin\theta)^2}{3}]d\theta=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}(1+\sin\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}(1+2\sin\theta+\sin^2\theta)\,d\theta$$

با جایگذاری $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$، داریم:

$$V=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}(1+2\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2})\,d\theta=\frac{1}{6}[\theta-2\cos\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}]_0^{2\pi}=\frac{1}{6}(3\pi)=\frac{\pi}{2}$$

۲۴۴ـ گزینه «۱» دستگاه معادلات ضمنی داده‌شده را به این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{cases} F=x^2+y^3+UV+U-4=0 \\ G=xy+U^3+V-3=0 \end{cases}$$

طبق فرمول مشتق‌گیری ضمنی برای توابع U و V داریم:

$$U_x=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,V)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(U,V)}}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_V \\ G_x & G_V \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_U & F_V \\ G_U & G_V \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 2x & U \\ y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} V+1 & U \\ 3U^2 & 1 \end{vmatrix}}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر $x=y=U=V=1$، داریم:

$$U_x=-\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{2-1}{2-3}=1$$

به همین ترتیب با محاسبه‌ی V_x، داریم:

$$V_x=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,U)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(V,U)}}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_U \\ G_x & G_U \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_V & F_U \\ G_V & G_U \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 2x & V+1 \\ y & 3U^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U & V+1 \\ 1 & 3U^2 \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}=-\frac{6-2}{3-2}=-4$$

درنتیجه داریم: $U_x-V_x=1+4=5$

۲۴۵ـ گزینه «۲» اگر x عددی گنگ باشد، $n!x$ نیز عددی گنگ خواهد بود. پس $n!x\pi$ زاویه‌ای به شکل $k\pi$ نمی‌شود. بنابراین $\cos(n!x\pi)$ به ±1 نمی‌رسد و می‌توان گفت $-1<\cos(n!x\pi)<1$ در نتیجه وقتی $m\to\infty$ خواهیم داشت: $\lim\limits_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^m=0$

بنابراین می‌توان نوشت: $\lim\limits_{n\to\infty}(0)=0=$ جواب حد

۲۴۶ـ گزینه «۴» می‌دانیم که اگر دنباله x_n به عددی مانند a همگرا باشد، آنگاه x_{n+1} نیز به a همگراست. پس با حد گرفتن از دو طرف رابطه بازگشتی داریم:

$$a=\frac{a}{\sqrt2}+\frac{\sqrt2}{a}\Rightarrow\sqrt2a^2=a^2+2\Rightarrow(\sqrt2-1)a^2=2\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt2}{\sqrt{\sqrt2-1}}$$

چون $x_1=1>0$ پس $x_2=\frac{1}{\sqrt2}+\frac{\sqrt2}{1}>0$ و به همین ترتیب همه جملات دنباله مثبت هستند پس حد آن‌ها نمی‌تواند منفی باشد لذا $a\ge0$ پس $a=\frac{\sqrt2}{\sqrt{\sqrt2-1}}$ جواب است.

توضیح: برای بررسی دقیق‌تر ثابت می‌کنیم دنباله x_n همگراست. برای هر عدد مثبت $u>0$ داریم $u+\frac1u\ge2$. توجه کنید که دنباله x_{n+1} جمع $\frac{x_n}{\sqrt2}$ و $\frac{\sqrt2}{x_n}$ است و $x_n>0$ پس $x_{n+1}\ge2$. از صورت سؤال داریم: $x_{n+1}=f(x_n)$ که $f(x)=\frac{x}{\sqrt2}+\frac{\sqrt2}{x}$ و $f(x)$ برای $x\ge\sqrt2$ صعودی اکید است. زیرا: $f'(x)=\frac12-\frac{\sqrt2}{x^2}=\frac{x^2-2}{\sqrt2x^2}\ge0$ پس دنباله x_n صعودی است. از طرفی $x_1\le2\sqrt2$ و چنانچه $x_n\le2\sqrt2$ آن‌گاه $x_{n+1}=f(x_n)\le f(2\sqrt2)=2+\frac12\le2\sqrt2$ و لذا (با توجه به استقراء) این دنباله از بالا کراندار و بنابراین همگرا می‌باشد.

۲۴۷ـ گزینه «۳» ابتدا از تجزیه‌ی کسرها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

$$A=\frac{1}{(0+1)(0+2)}=\frac12\ ,\ B=\frac{1}{(-1)(-1+2)}=-1\ ,\ C=\frac{1}{(-2)(-2+1)}=\frac12$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{\frac12}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac12}{n+2}=\left(\frac{\frac12}{n}-\frac{\frac12}{n+1}\right)+\left(\frac{-\frac12}{n+1}+\frac{\frac12}{n+2}\right)$$

بنابراین دو سری تلسکوپی به این صورت خواهیم داشت:

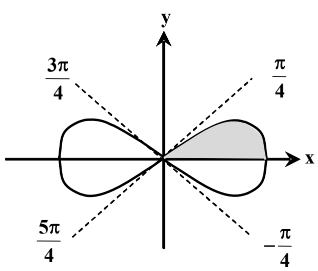
$$\text{حاصل سری}=\frac12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac1n-\frac{1}{n+1}\right)-\frac12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac12\left(\frac11-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\right)-\frac12\left(\frac{1}{1+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\right)=\frac12(1-0)-\frac12\left(\frac12-0\right)=\frac14$$

۲۴۸ـ گزینه «۳» ابتدا توجه کنید که در ضابطه‌ی این منحنی تبدیل x به $-x$ یا y به $-y$ تغییری ایجاد نمی‌کند پس، می‌توانیم مساحت واقع در ربع اول را حساب کرده و ۴ برابر کنیم.

با توجه به وجود x^2+y^2 در ضابطه‌ی این منحنی بهتر است از دستگاه قطبی استفاده کنیم.

$$x^2-y^2=\frac14(x^2+y^2)^2\ \Rightarrow\ r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=\frac14(r^2)^2\ \Rightarrow\ r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac14r^4\ \Rightarrow\ r^2\cos2\theta-\frac14r^4=0\ \Rightarrow\ r^2\left(\cos2\theta-\frac{r^2}{4}\right)=0$$

$$\Rightarrow\ r=0\ ,\ r=2\sqrt{\cos2\theta}$$



برای تعیین حدود θ در این منحنی توجه کنید که باید $\cos2\theta\ge0$ باشد پس، $-\frac\pi2\le2\theta\le\frac\pi2$ یا $\frac{3\pi}{2}\le2\theta\le\frac{5\pi}{2}$. به عبارتی $\frac{-\pi}{4}\le\theta\le\frac\pi4$ یا $\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}$.

البته ما می‌خواهیم فقط قسمتی را که در ربع اول است حساب کرده و ۴ برابر کنیم. در این قسمت داریم: $0\le\theta\le\frac\pi4$:

$$S=4\int_0^{\frac\pi4}\left(\frac{r^2}{2}\right)d\theta=\frac42\int_0^{\frac\pi4}4\cos2\theta\,d\theta=\frac{16}{2}\frac{\sin2\theta}{2}\Bigg|_0^{\frac\pi4}=\frac82=4$$

۲۴۹ـ گزینه «۳» انحنای منحنی قطبی $r = f(\theta)$ از این فرمول به‌دست می‌آید:

$$\kappa = \frac{|2r'^2 + r^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|2\cos^2\theta + (2+\sin\theta)^2 + \sin\theta(2+\sin\theta)|}{((2+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}, \xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{2}} \kappa = \frac{12}{9^{\frac{3}{2}}} = \frac{12}{27}$$

۲۵۰ـ گزینه «۱» طول قوس منحنی پارامتری $\vec{r}(t)$ در بازه‌ی $[0,t]$ طبق فرمول $s = \int_0^t |\vec{r}'(t)|\,dt$ به دست می‌آید. ابتدا با مشتق‌گیری از مؤلفه‌ها، بردار $\vec{r}'(t)$ را به دست می‌آوریم:

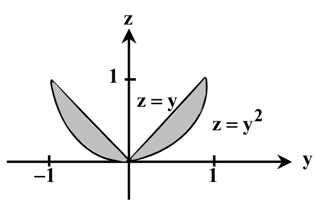
$$\vec{r}'(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t, e^t\sin t + e^t\cos t, e^t) \Rightarrow |\vec{r}'(t)| = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{2t}}$$

$$= \sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2 t + 1)e^{2t}} = \sqrt{3e^{2t}} = e^t\sqrt{3}$$

$$\text{طول قوس}: s = \int_0^t |\vec{r}(t)|dt = \int_0^t e^t\sqrt{3}dt = \sqrt{3}(e^t - 1)$$

۲۵۱ـ گزینه «۲» اگر هدف ما محاسبه حجم این ناحیه باشد، بهترین روش استفاده از مختصات استوانه‌ای است. زیرا رویه‌ها در مختصات استوانه‌ای داده شده‌اند. اما گزینه‌ها برحسب مختصات کروی می‌باشند پس ناچاریم معادله رویه‌ها را در این مختصات بنویسیم. معادله $z = r$ در مختصات کروی چنین است:

$$z = r \Rightarrow \rho\cos\phi = \rho\sin\phi \Rightarrow \cos\phi = \sin\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$



توجه کنید از معادله $z = r^2$ داریم $\rho\cos\phi = \rho^2\sin^2\phi$ پس $\rho = \frac{\cos\phi}{\sin^2\phi} \geq 0$.

رویه‌ی $z = r$ همان مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است. رویه‌ی $z = r^2$ همان سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ است.

اگر $x = 0$ قرار دهید و در صفحه‌ی zoy مقطع آن‌ها را رسم کنید.

واضح است که حدود ϕ از $\phi = \frac{\pi}{4}$ تا $\phi = \frac{\pi}{2}$ هستند. حدود θ هم در مختصات کروی همیشه به صورت $0 \leq \theta \leq 2\pi$ هستند مگر آن‌که روی متغیرهای x یا y محدودیتی داشته باشیم. با این توضیحات خواهیم داشت:

$$\text{حجم} = \iiint_D dv = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\cos\phi}{\sin^2\phi}} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

۲۵۲ـ گزینه «۳»

روش اول (روش تستی): می‌توانیم به n یک مقدار دلخواه بدهیم (چون المان انتگرال‌گیری برحسب x می‌باشد و گزینه‌ها به مقدار n وابسته نیستند)،

مثلاً قرار می‌دهیم $n = 0$ و داریم:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx \xrightarrow{n=0} I = \int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\pi}dx = (x)_0^{\pi} = \pi$$

روش دوم (روش تشریحی): صورت کسر چون دارای عامل n است، طوری آن را بازنویسی می‌کنیم که عامل مخرج در آن نمایان شود، پس صورت کسر را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\sin(n+\frac{1}{2})x \Rightarrow \sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}$$

می‌توانیم یک سری با دو جمله‌ی پشت سر هم بنویسیم که حاصل این سری با استفاده از سری تلسکوپی همان دو جمله‌ی بالا بشود، یعنی:

$$\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{n}\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} 2\cos(\frac{kx + \frac{x}{2} + kx - \frac{x}{2}}{2})\sin(\frac{kx + \frac{x}{2} - kx + \frac{x}{2}}{2})$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2\cos(kx)\sin(\frac{x}{2}) = 2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$

پس داریم:

$$\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}(\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos(nx))$$

$$\Rightarrow \sin(n+\frac{1}{2}x)=2\sin\frac{x}{2}(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos(nx))$$

اکنون به جای صورت کسر در جلوی انتگرال عبارت به دست آمده در بالا را قرار می‌دهیم و داریم:

$$\int_0^{\pi}\frac{2\sin\frac{x}{2}(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos(nx))}{\sin\frac{x}{2}}dx=2\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos(nx))dx$$

$$=2(\frac{1}{2}x+\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}\sin(nx))\Big|_0^{\pi}=2(\frac{1}{2}\pi+0\cdots0)=\pi$$

۲۵۳ـ گزینه «۴» دایره‌ی یکه به مرکز مبدأ مختصات دایره‌ای است به شعاع ۱ واحد که معادله آن به صورت $x^2+y^2=1$ می‌باشد. حال چون نقاط بحرانی تابع $z=x^4-x^2-y$ روی دایره‌ی یکه به معادله $x^2+y^2=1$ را می‌خواهیم به دست آوریم در واقع نقاط بحرانی تابع تحت قید یا شرط $x^2+y^2=1$ را می‌خواهیم بیابیم. از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. ابتدا قید داده شده را به صورت $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ می‌نویسیم.

$$\begin{cases}\overrightarrow{\nabla z}=(4x^3-2x,-1)\\ \overrightarrow{\nabla g}=(2x,2y)\\ \overrightarrow{\nabla z}=\lambda\overrightarrow{\nabla g}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{4x^3-2x}{2x}=\lambda\\ -\dfrac{1}{2y}=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x^3-2x=2\lambda x & (1)\\ -1=2\lambda y & (2)\end{cases}$$

از معادله (۱) دو حالت زیر را باید در نظر بگیریم.

۱) اگر $x=0$ باشد با قرار دادن $x=0$ در قید $x^2+y^2=1$ داریم: $y=\pm1$ پس دو نقطه بحرانی به مختصات $(0,1)$ و $(0,-1)$ برای تابع z تحت قید $x^2+y^2=1$ به دست می‌آید.

۲) اگر $x\neq0$ باشد از معادله (۱) داریم: $4x^3-2x=2\lambda x\Rightarrow 2\lambda=4x^2-2\Rightarrow\lambda=2x^2-1$

به جای x^2 قرار می‌دهیم $x^2=1-y^2$ و داریم: $\lambda=2(1-y^2)-1=1-2y^2$

اکنون این مقدار λ را در معادله (۲) قرار می‌دهیم و داریم:

$$-1=2\lambda y\Rightarrow -1=2(1-2y^2)y\Rightarrow -1=2y-4y^3\Rightarrow 4y^3-2y-1=0\Rightarrow h(y)=4y^3-2y-1=0$$

اکنون می‌خواهیم تعداد جواب‌های این معادله در محدوده $-1\le y\le1$ را به دست آوریم. ابتدا باید ریشه‌های مشتق تابع $h(y)$ را به دست آوریم.

$$h'(y)=12y^2-2=0\Rightarrow y^2=\frac{1}{6}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt6}$$

با توجه به این که این دو مقدار در بازه $[-1,1]$ قرار دارند باید با استفاده از قضیه مقدار میانی دو سر هر یک از بازه‌های $[-1,-\frac{1}{\sqrt6}]$ و $[\frac{-1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}]$ و $[\frac{1}{\sqrt6},1]$ را تعیین علامت کنیم.

$$\begin{cases}h(-1)=-4+2-1=-3\\ h(-\frac{1}{\sqrt6})=\frac{4}{3\sqrt6}-1<0\end{cases}\Rightarrow h(-1)h(-\frac{1}{\sqrt6})>0\Rightarrow$$ $h(y)$ در این بازه فاقد ریشه است.

$$\begin{cases}h(-\frac{1}{\sqrt6})=\frac{4}{3\sqrt6}-1\\ h(\frac{1}{\sqrt6})=-\frac{4}{3\sqrt6}-1\end{cases}\Rightarrow h(-\frac{1}{\sqrt6})h(\frac{1}{\sqrt6})>0\Rightarrow$$ $h(y)$ در این بازه هم فاقد ریشه است

$$\begin{cases}h(\frac{1}{\sqrt6})=-\frac{4}{3\sqrt6}-1\\ h(1)=4-2-1=1\end{cases}\Rightarrow h(\frac{1}{\sqrt6})h(1)<0\Rightarrow$$ $h(y)$ در این بازه دارای یک ریشه است

اگر این ریشه را y_0 بنامیم با توجه به معادله قید که به صورت $x^2+y^2=1$ می‌باشد، داریم: $x^2=1-y^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{1-y_0^2}$

پس دو نقطه بحرانی دیگر به مختصات $(\sqrt{1-y_0^2},y_0)$ و $(-\sqrt{1-y_0^2},y_0)$ تابع z با قید $x^2+y^2=1$ دارد.

پس در کل این تابع تحت قید داده شده دارای ۴ نقطه بحرانی است.

۲۵۴ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه معادله ناحیه انتگرال‌گیری نسبت به x و y متقارن است (یعنی با تبدیل x به y و بالعکس تغییری در معادله ناحیه انتگرال‌گیری ایجاد نمی‌شود) پس اگر این تغییر را هم در تابع زیر انتگرال ایجاد کنیم، انتگرال جدیدی به‌دست می‌آید که مقدار آن با مقدار انتگرال اولیه برابر است. پس داریم:

$$I=\iint_D \frac{x^2+xy+1}{(x+y)^2+2}\,dx\,dy$$

در این انتگرال اولیه به جای x قرار می‌دهیم y و برعکس و این انتگرال را هم I می‌نامیم.

$$I=\iint \frac{y^2+xy+1}{(y+x)^2+2}\,dy\,dx$$

با جمع‌کردن این دو انتگرال قدیم و جدید داریم:

$$I+I=\iint_D \frac{x^2+y^2+2xy+2}{(x+y)^2+2}\,dx\,dy=\iint_D \frac{(x+y)^2+2}{(x+y)^2+2}\,dx\,dy \Rightarrow$$

$$2I=\iint_D dx\,dy \Rightarrow 2I=(\text{مساحت ناحیه انتگرال‌گیری که مساحت دایره است}) \Rightarrow 2I=\pi(1)^2 \Rightarrow 2I=\pi \Rightarrow I=\frac{\pi}{2}$$

۲۵۵ـ گزینه «۲» با مشتق‌گیری از رابطه‌ی داده شده داریم:

$$f(x)=3x-\int_0^x t^4\cos(t^7)dt-2 \Rightarrow f'(x)=3-x^4\cos(x^7)$$

با توجه به اینکه $0\le x\le 1$ پس $0\le x^7\le 1$ و می‌دانیم که زاویه‌ی یک رادیان در ربع اول قرار دارد. پس $0\le \cos(x^7)\le 1$ و در نتیجه: $0\le x^4\cos(x^7)\le 1$ می‌باشد و در نتیجه $f'(x)>0$ و این یعنی تابع $f(x)$ صعودی است.

برای $f(0)$ و $f(1)$ داریم:

$$f(0)=0-2<0$$

$$f(1)=3-2-\int_0^1 t^4\cos(t^7)dt$$

با استفاده از خواص انتگرال معین داریم:

$$0\le t^4\cos(t^7)\le 1 \Rightarrow (0)(1-0)\le\int_0^1 t^4\cos(t^7)dt\le(1)(1-0) \Rightarrow 0\le\int_0^1 t^4\cos(t^7)dt\le 1 \Rightarrow 0\le f(1)\le 1$$

با توجه به اینکه $f(0)<0$ و $f(1)\ge 0$ می‌باشد و تابع $f(x)$ نیز صعودی است بنابراین تابع f تنها یک ریشه در بازه $[0,1]$ دارد و گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۲۵۶ـ گزینه «۳» حجم حاصل از دوران ناحیه محدود بین دو منحنی نامتقاطع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله‌ی $[a,b]$ حول محور $y=k$ که ناحیه را قطع نمی‌کند برابر است با:

$$V=\pi\int_a^b(|f(x)-k|^2-|g(x)-k|^2)dx$$

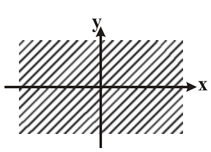
بنابراین برای $f(x)=\cos x$ و $g(x)=0$ و $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ و $y=-1$ داریم:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(\cos x+1)^2-(0-1)^2]dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2x+2\cos x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}+2\cos x\right)dx$$

$$=\pi\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+2\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(\frac{\pi}{4}+0+2\right)=2\pi\left(1+\frac{\pi}{8}\right)$$

۲۵۷ـ گزینه «۴» از تغییر متغیر قطبی استفاده می‌کنیم، لذا:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=r^2$$



برای کران‌های انتگرال‌گیری داریم:

$$\Rightarrow\begin{cases}0\le r\le\infty\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^2}\sin r^2\times r\,dr\,d\theta \qquad (*)$$

برای حل انتگرال فوق با استفاده از روش جزءبه جزء داریم:

مشتق ↓ u	dv ↓ انتگرال
$\sin r^2$	re^{-r^2}
$2r\cos r^2$ (+)	$-\frac{1}{2}e^{-r^2}$
(−)	$\int -\frac{1}{2}e^{-r^2}dr$

$$\Rightarrow I'=\int_0^{\infty}re^{-r^2}\sin r^2dr=-\frac{1}{2}e^{-r^2}\sin r^2+\int re^{-r^2}\cos r^2dr$$

بار دیگر استفاده از جزءبه‌جزء داریم:

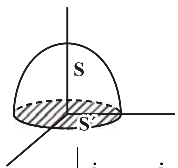
$$\begin{array}{c|c} u & dv \\ \hline \cos r^2 & re^{-r^2} \\ -2r\sin r^2 & -\frac{1}{2}e^{-r^2} \\ & \int -\frac{1}{2}e^{-r^2} \end{array} \Rightarrow I' = -\frac{1}{2}e^{-r^2}\sin r^2 - \frac{1}{2}e^{-r^2}\cos r^2 - \int re^{-r^2}\sin r^2 dr$$

$$\Rightarrow 2I' = -\frac{1}{2}e^{-r^2}\sin r^2 - \frac{1}{2}e^{-r^2}\cos r^2 = \frac{1}{2}e^{-r^2} \Rightarrow I' = \frac{1}{4}e^{-r^2}$$

با جایگذاری در رابطه‌ی (*) داریم:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}\right)d\theta = 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

۲۵۸ـ گزینه «۴» سطح S به شکل زیر است:



برای محاسبه انتگرال داده شده روی S می‌توان آن را بر روی سطح S' محاسبه کنیم زیرا مقادیر آنها یکسان می‌باشد:

$$\iint_S \text{curl}F.nds = \iint_{S'} \text{curl}F.n'ds'$$

$$\text{curl}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & -3xy & x^3y^3 \end{vmatrix} = (3y^3x^3, 2z - 3x^3y^3, -3y)$$

با توجه به سطح S' فوق مشخص است که:

$$\vec{n}' = -K, dS' = dA$$

$$\iint_S \text{curl}F.nds = \iint_{S'} (3y^3x^3, 2z - 3x^3y^3, -3y).(-\vec{k})dA$$

از طرفی برای سطح S' داریم:

$$S: z = 5 - x^2 - y^2 \xrightarrow{z=0} x^2 + y^2 = 5 \xrightarrow{\text{مختصات قطبی}} \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ 0 \le r \le \sqrt{5} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\iint_S \text{curl}F.nds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}} 3y dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}} 3r^2\sin\theta dr d\theta = (r^3\Big|_0^{\sqrt{5}}) \times (-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} = 5\sqrt{5} \times 0 = 0$$

۲۵۹ـ گزینه «۳» با استفاده از روش حل انتگرال جزءبه جزء داریم:

$$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx \Rightarrow du = \sinh x^2 dx$$
$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = \int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = f(1) - \int_0^1 x\sinh x^2 dx = 0 - \frac{1}{2}\cosh x^2\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(\cosh 1 - \cosh 0)$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^1 + e^{-1}}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e + \frac{1}{e}}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}\right)$$

۲۶۰ـ گزینه «۱»

روش اول: مقادیر $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ریشه‌های سوم واحد می‌باشند، یعنی در واقع از $z^3 - 1 = 0$ داریم $z = \sqrt[3]{1}$ پس برای این مقادیر قرار می‌دهیم.

$$\text{حاصل عبارت} = (\sqrt[3]{1})^{3n} + (\sqrt[3]{1})^{3n} = 1 + 1 = 2$$

روش دوم: باید حاصل مقادیر $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ و $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ را به‌دست آوریم.

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{\frac{i2\pi}{3}} \quad \text{و} \quad z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = e^{\frac{i4\pi}{3}}$$

اکنون قرار می‌دهیم:

$$\text{حاصل عبارت} = (e^{\frac{i2\pi}{3}})^{3n} + (e^{\frac{i4\pi}{3}})^{3n} = e^{i2n\pi} + e^{i4n\pi} = (\underbrace{\cos 2n\pi}_{1} + \underbrace{i\sin 2n\pi}_{0}) + (\underbrace{\cos 4n\pi}_{1} + \underbrace{i\sin 4n\pi}_{0}) = 1 + 1 = 2$$

۲۶۱ـ گزینه «۴» طبق راهنمایی داده شده در صورت سؤال، فرض می‌کنیم $\theta=\cot g^{-1}(\frac{a}{b})$ باشد. پس $\frac{a}{b}=\cot g\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ بنابراین با توجه به آن‌که $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ است و نسبت $\cos\theta$ به $\sin\theta$ مانند a به b است خواهیم داشت:

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\ \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

به عبارتی $\cos\theta=\frac{a}{A}$ و $\sin\theta=\frac{b}{A}$. با جایگذاری این نتایج در انتگرال داریم:

$$I=\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}=\int\frac{dx}{A\cos\theta\sin x+A\sin\theta\cos x}$$

ضریب ثابت A را فاکتور می‌گیریم و در مخرج کسر از فرمول مثلثاتی $\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x=\sin(x+\theta)$ استفاده می‌کنیم.

$$I=\frac{1}{A}\int\frac{dx}{\sin(x+\theta)}=\frac{1}{A}\int\csc(x+\theta)\,dx=\frac{1}{A}\mathrm{Ln}\left|\mathrm{tg}\frac{x+\theta}{2}\right|+c$$

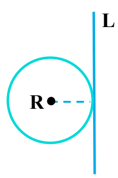
توضیح: جواب انتگرال $\int\csc t\,dt$ را به دو صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\int\csc t\,dt=-\mathrm{Ln}|\csc t+\mathrm{cotg} t|+c\\ \int\csc t\,dt=\mathrm{Ln}\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|+c\end{cases}$$

البته هر دو جواب با هم معادل هستند و با توجه به گزینه‌ها تصمیم می‌گیریم که از کدام‌یک استفاده کنیم.

۲۶۲ـ گزینه «۴» با استفاده از فرمول گلدن پاپیوس این حجم را به دست آوریم. طبق این فرمول اگر ناحیه R حول خط L که ناحیه R را قطع نمی‌کند دوران کند حجم حاصل از دوران برابر است با $V=2\pi Sd$ که S مساحت ناحیه R و d فاصله خط L از مرکز ناحیه R است.

در این مثال ناحیه R دایره‌ای به شعاع a است که مساحت آن $S=\pi a^2$ است و L بر دایره مماس است پس $d=a$.



$$V=2\pi Sd=2\pi(\pi a^2)(a)=2\pi^2a^3$$

۲۶۳ـ گزینه «۲» تساوی $\sum_{n=0}^{\infty}u^n=\frac{1}{1-u}$ برای $|u|<1$ برقرار است. بنابراین $y=\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n$ و این تساوی در ناحیه $|\frac{x}{2}|<1$ برقرار است. به عبارتی:

$$\frac{1}{2-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\quad ;\quad |x|<2$$

اکنون با مشتق‌گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{(2-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}}\quad ;\quad |x|<2$$

حال به این دقت کنیم که به ازای $n=0$ اولین جمله این مجموع صفر است بنابراین:

$$\frac{1}{(2-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}}\quad ;\quad |x|<2$$

اکنون با استفاده از ویژگی سری‌ها از اندیس سری یک واحد کم کرده و جملات داخل سری را یک واحد به جلو انتقال می‌دهیم:

$$\frac{1}{(2-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^{n+2}}\quad ;\quad |x|<2$$

۲۶۴ـ گزینه «۱» فرض کنیم $\alpha=a-x$ و $\beta=b-x$ باشد.

در این صورت خواهیم داشت $\alpha-\beta=a-b$ بنابراین: $\sin(a-b)=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

با ضرب و تقسیم در $\sin(a-b)$ و استفاده از فرمول بالا داریم:

$$\text{حاصل انتگرال}=I=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(a-b)}{\sin\alpha\sin\beta}dx=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}dx=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left(\frac{\cos(b-x)}{\sin(b-x)}-\frac{\cos(a-x)}{\sin(a-x)}\right)dx=\frac{1}{\sin(a-b)}[-\mathrm{Ln}|\sin(b-x)|+\mathrm{Ln}|\sin(a-x)|]=\frac{1}{\sin(a-b)}\mathrm{Ln}\left|\frac{\sin(a-x)}{\sin(b-x)}\right|+c$$

۲۶۵ـ گزینه «۱» ابتدا مجموع m جمله از این سری را به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{m}\log(\cos\frac{1}{2^n})=\log(\cos\frac{1}{2})+\log(\cos\frac{1}{2^2})+\cdots+\log(\cos\frac{1}{2^m})=\log(\underbrace{\cos\frac{1}{2}\times\cos\frac{1}{2^2}\times\cdots\times\cos\frac{1}{2^m}}_{A_m})$$

اکنون حاصل‌ضرب داخل پرانتز را محاسبه می‌کنیم. می‌خواهیم از فرمول مثلثاتی $\cos x.\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x$ استفاده کنیم. طبق این فرمول بـه جـای $\cos x$ می‌توانیم $\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\sin x}$ قرار بدهیم؛ مثلاً برای $m=3$ داریم:

$$A_3=\cos\frac{1}{2}\times\cos\frac{1}{2^2}\times\cos\frac{1}{2^3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\frac{\sin(1)}{\sin\frac{1}{2}}\times\frac{\sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2^2}}\times\frac{\sin\frac{1}{2^2}}{\sin\frac{1}{2^3}}=\frac{1}{2^3}\frac{\sin(1)}{\sin\frac{1}{2^3}}$$

به همین ترتیب برای هر m داریم:

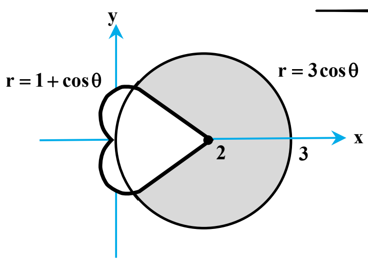
$$A_m=\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2^2}\cos\frac{1}{2^3}\cdots\cos\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^m}\frac{\sin(1)}{\sin\frac{1}{2^m}}$$

وقتی $m\to\infty$ با هم‌ارزی $\sin\frac{1}{2^m}\simeq\frac{1}{2^m}$ داریم:

$$\lim_{m\to\infty}A_m=\sin(1)$$

در نتیجه:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(\cos\frac{1}{2^n})=\log(\sin(1))$$



۲۶۶ـ گزینه «۳» ناحیه موردنظر را R بنامیم. منحنی $r=3\cos\theta$ دایره‌ای به قطر ۳ است که مرکز آن روی محور xهای مثبت قرار دارد. درواقع مرکز آن $(\frac{3}{2},0)$ است. منحنی $r=1+\cos\theta$ یک دلوار است. این دو منحنی را برخورد دهیم:

$$1+\cos\theta=3\cos\theta\ \Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{3}$$

مساحت ناحیه R برابر است با $\iint_R dy\,dx$. در دستگاه قطبی ناحیه R به شکل $-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ و $1+\cos\theta\le r\le 3\cos\theta$ بیان می‌شود.

$$R \text{ مساحت } \iint_R dy\,dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta}r\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{r^2}{2})\Big|_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}[(3\cos\theta)^2-(1+\cos\theta)^2]d\theta$$

۲۶۷ـ گزینه «۲» ابتدا مقدار انتگرال $I(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-kt^2}dt$ را برای مقدار ثابت $k>0$ به دست آوریم. طبق اطلاع داده شده می‌دانیم $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ است. در انتگرال $I(k)$ با تغییر متغیر $u=\sqrt{k}t$ داریم $dt=\frac{1}{\sqrt{k}}du$ و چون $-\infty<t<+\infty$ پس $-\infty<u<+\infty$.

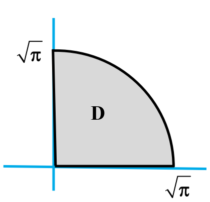
$$I(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-kt^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\frac{1}{\sqrt{k}}du=\frac{1}{\sqrt{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}$$

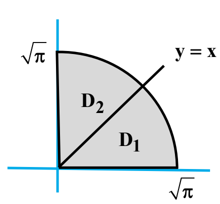
اکنون در انتگرال سه‌گانه داده شده داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2-2y^2-3z^2}dz\,dy\,dx=(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3z^2}dz)(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2y^2}dy)(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2}dx)$$

$$=I(3)I(2)I(1)=(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}})(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}})\sqrt{\pi}=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}$$

۲۶۸ـ گزینه «۲» ناحیه D بخشی از دایره $x^2+y^2=\pi$ است که در ربع اول قرار دارد. این ناحیه را در دسـتگاه قطبـی مـی‌تـوان بـه صـورت $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le r\le\sqrt{\pi}$ بیان کرد. اما قبل از حل انتگرال با کمی دقت محاسبه انتگرال را ساده‌تر کنیم.





خط $y=x$ ناحیه D را به دو بخش D_1 و D_2 تقسیم می‌کند که هم‌اندازه هستند و نسبت به خط $y=x$ تقارن دارند. در ناحیه D_1 داریم $0\le y\le x$ بنابراین $xy\sin(x^2-y^2)\ge 0$ است. در ناحیه D_2 داریـــم $0\le x\le y$ بنـــابراین $xy\sin(x^2-y^2)\le 0$ اســـت. دقـــت کنیـــد کـــه در $D_1: 0\le x^2-y^2\le\pi$ و در ناحیه $D_2: -\pi\le x^2-y^2\le 0$. به همین دلایل انتگرال این بخش از تابع صفر است:

$$\iint_D xy\sin(x^2-y^2)\,dx\,dy=0$$

کافیست انتگرال $\iint_D xy\cos(x^2+y^2)\,dy\,dx=0$ را به دست آوریم.

$$\text{جواب}=\iint_D xy\cos(x^2+y^2)\,dy\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\pi}} r\cos\theta\, r\sin\theta\cos(r^2)\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos\theta\sin\theta\, r^3\cos(r^2)\,dr\,d\theta$$

برای حل انتگرالِ اول نسبت به r از تغییر متغیر $t=r^2$ استفاده کنیم. در این صورت $r=\sqrt{t}$ پس $dr=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ همچنین $0\le r\le\sqrt{\pi}$ پس $0\le t\le\pi$.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} r^3\cos(r^2)\,dr=\int_0^{\sqrt{\pi}} t\sqrt{t}\cos(t)\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} t\cos(t)\xrightarrow[\text{به روش جدول}]{\text{جزء به جزء}}\frac{1}{2}(t\sin t+\cos t)\Big|_0^{\pi}$$

t	$\cos t$
1	$\sin t$
0	$-\cos t$

$$=\frac{1}{2}(-1-1)=-1$$

با جایگذاری جواب در انتگرال دوگانه داریم:

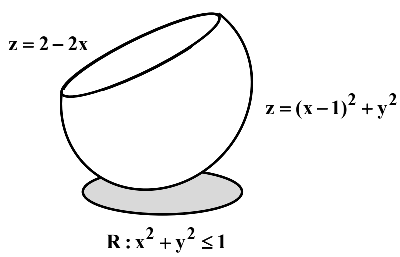
$$\text{جواب}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)\cos\theta\sin\theta\,d\theta=\frac{\cos^2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}$$

۲۶۹ـ گزینه «۱» اگر این ناحیه را D بنامیم، حجم آن برابر است با $V=\iiint_D dz\,dy\,dx$. کران‌های بالا و پائین z مشخص هستند: $z=(x-1)^2+y^2$ و $z=2-2x$. اما برای تعیین کران‌های x و y دو رویه داده شده را برخورد می‌دهیم: $(x-1)^2+y^2=2-2x$. با مرتب کردن جملات داریم:

$$x^2-2x+1+y^2=2-2x\Rightarrow x^2+y^2=1$$

دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدأ به دست می‌آید. مناسب‌تر است که از دستگاه استوانه‌ای استفاده کنیم. در این صورت داریم $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 1$ و کران‌های z نیز برحسب r و θ بیان می‌شوند: $z=2-2x=2-2r\cos\theta$ و $z=(x-1)^2+y^2=x^2+y^2-2x+1=r^2+1-2r\cos\theta$.

با داشتن این کران‌ها حجم D را به دست می‌آوریم:



$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2+1-2r\cos\theta}^{2-2r\cos\theta} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (rz)\Big|_{r^2+1-2r\cos\theta}^{2-2r\cos\theta}dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r[2-2r\cos\theta-r^2-1+2r\cos\theta]\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1(r-r^3)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

۲۷۰ـ گزینه «۲» بهتر است با تغییر دستگاه به صورت $u=x+2y$ و $v=2(x-y)$ معادله‌ی این بیضی را به معادله‌ی دایره‌ی $u^2+v^2=4$ در دستگاه uov تبدیل کنیم. ژاکوبی دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xy}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-2-4=-6\Rightarrow |J_{uv}|=\frac{1}{|J_{xy}|}=\frac{1}{6}$$

با استفاده از انتگرال دوگانه و نوشتن آن در دستگاه جدید خواهیم داشت:

$$S=\iint_D dydx=\iint_{D'}\frac{1}{6}dvdu=\frac{1}{6}\times(D'\ \text{مساحت})=\frac{1}{6}\times\pi\times 2^2=\frac{2\pi}{3}$$

۲۷۱ـ گزینه «۱»

روش اول: در تابع $\frac{1}{(\sin\theta+\cos\theta)^4}$ تبدیل $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به یکدیگر ضابطه‌ی تابع را تغییر نمی‌دهد بنابراین، طبق فرمول، داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{(\sin\theta+\cos\theta)^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$$

روش دوم: با تغییر متغیر $x=\frac{\pi}{2}-t$ داریم: $dx=-dt$. وقتی $x=0$ باشد داریم $t=\frac{\pi}{2}$ و به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ داریم $t=0$:

$$\begin{cases}\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos(-t)=\cos t\\ \cos x=-\sin(-t)=\sin t\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{(\sin x+\cos x)^4}=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)}{(\cos t+\sin t)^4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt}{(\cos t+\sin t)^4}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(\sin t+\cos t)^4}-I$$

$$\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(\sin t+\cos t)^4}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{(\sin t+\cos t)^4}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$$

۲۷۲ـ گزینه «۴» با استفاده از فرمول مجموع سری هندسی، برای $|u|<1$ داریم: $\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n$ به کمک تجزیه کسرها داریم:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-2)(x-1)}=f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-2(1-\frac{x}{2})}+\frac{1}{1-x}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-\frac{1}{2^{n+1}})$$

البته باید $|\frac{x}{2}|<1$ و $|x|<1$ باشد یعنی در ناحیه‌ی $|x|<1$ این بسط معتبر است.

۲۷۳ـ گزینه «۳» کار انجام شده توسط این میدان نیرو روی مسیر $C: y=ax^b$ را حساب می‌کنیم. پارامتری کردن این مسیر به صورت $x=t$ و $y=at^b$ انجام می‌شود. طبق صورت سؤال $0\le x\le 1$ پس $0\le t\le 1$. همچنین $dx=dt$ و $dy=abt^{b-1}$ به این ترتیب داریم:

$$\text{کار انجام شده}=I=\int_C cxydx+x^6y^2dy=\int_0^1[(ct)(at^b)+(t^6)(a^2t^{2b})(abt^{b-1})]dt=\int_0^1(act^{b+1}+a^3bt^{3b+5})dt$$

$$=[\frac{act^{b+2}}{b+2}+\frac{a^3bt^{3b+6}}{3b+6}]_0^1=\frac{ac}{b+2}+\frac{a^3b}{3b+6}=\frac{a}{b+2}(c+\frac{a^2b}{3})$$

حالا به دو روش می‌توانیم حل را به پایان برسانیم:

روش اول: برای آن‌که کار انجام شده مستقل از b باشد، باید مشتق I نسبت به b صفر شود:

$$\frac{\partial I}{\partial b}=-\frac{a}{(b+2)^2}(c+\frac{a^2b}{3})+\frac{a}{b+2}(\frac{a^2}{3})=0\Rightarrow\frac{a^3}{3(b+2)}=\frac{a}{(b+2)^2}(c+\frac{a^2b}{3})\Rightarrow\frac{a^3}{3}(b+2)=a(c+\frac{a^2b}{3})$$

$$\Rightarrow\frac{a^3b}{3}+\frac{2a^3}{3}=ac+\frac{a^3b}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}a^3=ac\Rightarrow a^2=\frac{3}{2}c\Rightarrow a=\sqrt{\frac{3c}{2}}$$

روش دوم: اگر I مستقل از b باشد، باید مقدار I به ازای $b=0$ و $b=1$ یکسان شود.

$$\begin{cases}b=0\Rightarrow I=\frac{a}{2}(c+0)\\ b=1\Rightarrow I=\frac{a}{3}(c+\frac{a^2}{3})\end{cases}\Rightarrow\frac{ac}{2}=\frac{a}{3}(c+\frac{a^2}{3})\Rightarrow\frac{c}{2}=\frac{c}{3}+\frac{a^2}{9}\Rightarrow a^2=\frac{3c}{2}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{3c}{2}}$$

۲۷۴ـ گزینه «۲»

روش اول: سعی می‌کنیم با استفاده از سری‌های شناخته شده، فرم سری داده شده را بسازیم. توجه داشته باشید که در سری صورت سوال، از فاکتوریل خبری نیست؛ پس شانس خود را با سری $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ امتحان می‌کنیم. برای به وجود آوردن توان $2n+1$ برای متغیر سری، ابتدا x^2 را جایگزین x می‌کنیم: $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\frac{1}{1-x^2}$ با توجه به وجود عامل $2n+1$ در مخرج، باید از دو طرف تساوی انتگرال بگیریم:

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\Rightarrow\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\int x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\frac{dx}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1})dx=\frac{1}{2}[Ln|x+1|-Ln|x-1|]=\frac{1}{2}Ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}Ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\to x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}Ln\left|\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}\right|\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}=\frac{1}{2}Ln\left|\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}\right|=\frac{1}{2}Ln3$$

روش دوم: سری داده شده بدون هیچ‌گونه تغییری، درواقع بسط تیلور تابع Arctghx است که داریم:

$$Arctghx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\to x=\frac{1}{2}\Rightarrow Arctgh\frac{1}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$$

اما گزینه‌ها به‌صورت تابع Ln هستند. در اینجاست که بد نیست فرم لگاریتمی تابع Arctghx را به خاطر سپرده باشید. داریم:

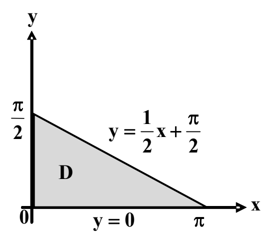
$$Arctghx=\frac{1}{2}Ln(\frac{1+x}{1-x})\ :\ |x|<1\Rightarrow Arctgh\frac{1}{2}=\frac{1}{2}Ln(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}Ln3$$

روش تستی: کافی است دو جمله اول سری را بنویسیم: $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$. بر اساس کتاب رد گزینه حاصل سری از $\frac{1}{2}$ بیشتر است، گزینه «۱» منفی است پس غلط است، گزینه «۴»، هم غلط است، چون داریم: $\operatorname{Ln}3-\operatorname{Ln}2=0/3$. از بین گزینه‌های ۲ و ۳ یکی جواب است. حاصل سری از $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8}$ کمتر است. پس جواب گزینه ۲ می‌شود.

۲۷۵ـ گزینه «۱» مرز C بسته است. بنابراین طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

که D ناحیه محصور توسط مرز C است. در این ناحیه داریم $0\le x\le\pi$ و $0\le y\le-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$.



$$\begin{cases}P=e^{-x}\cos y+xy\rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial y}=-e^{-x}\sin y+x\\[2mm] Q=e^{-x}\sin y+y^2\rightarrow\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-e^{-x}\sin y\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-x$$

$$\Rightarrow\int_C Pdx+Qdy=\int_0^{\pi}\int_0^{-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}}-xdydx=\int_0^{\pi}-x(-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}-0)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}x^2-\frac{\pi}{2}x)dx=\frac{x^3}{6}-\frac{\pi x^2}{4}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi^3}{4}=\pi^3(\frac{2-3}{12})=-\frac{\pi^3}{12}$$

۲۷۶ـ گزینه «۲» سطح S بسته نیست. مرز این سطح، دایره‌ی $x^2+z^2=1$ است.

با استفاده از قضیه استوکس می‌توانیم انتگرال روی سطح S را به انتگرال روی مرز C تبدیل کنیم:

$$I=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{N}ds=\int_C Pdx+Qdy+Rdz$$

که C دایره $x^2+z^2=1$ در صفحه xoz (یعنی صفحه‌ی $y=0$) است:

$$I=\int_C ydx+2xdy+xdz$$

با پارامتری کردن منحنی C داریم: $x=\cos t$، $z=\sin t$ و $y=0$، پس $dx=-\sin tdt$ و $dz=\cos tdt$ و $dy=0$. در نتیجه داریم:

$$I=\int_0^{2\pi}(\cos t)\cos tdt=\int_0^{2\pi}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}[t+\frac{1}{2}\sin 2t]_0^{2\pi}=\frac{1}{2}(2\pi)=\pi$$

توجه: از نتیجه قضیه استوکس هم می‌توان سؤال را حل کرد. برای تمرین انجام دهید.

۲۷۷ـ گزینه «۱» با محاسبه‌ی مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم به صورت زیر داریم:

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\alpha(2x)(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}\Rightarrow f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}+\alpha(\alpha-1)(4x^2)(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-2}$$

به طور مشابه داریم:

$$f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}+\alpha(\alpha-1)(4y^2)(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-2}$$

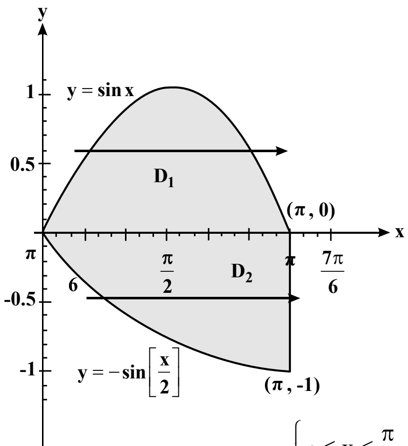
$$f_{zz}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}+\alpha(\alpha-1)(4z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-2}$$

$$\Rightarrow f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=6\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}+4\alpha(\alpha-1)(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}=0$$

$$\Rightarrow\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{\neq 0}{}^{\alpha-1}\left(6\alpha+4\alpha(\alpha-1)\right)=0\Rightarrow 4(\alpha)(\alpha-1)+6\alpha=0\xrightarrow{\div 4}\alpha^2-\alpha+\frac{3}{2}\alpha=0$$

$$\Rightarrow\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha=0\Rightarrow\alpha(\alpha+\frac{1}{2})=0\Rightarrow\alpha=0\ \text{یا}\ \alpha=\frac{-1}{2}$$

۲۷۸ـ گزینه «۳»



در حل این‌گونه سؤالات، رسم ناحیه انتگرال‌گیری، کمک شایانی به تعیین حدود، با ترتیب انتگرال‌گیری متفاوت، می‌کند. درنتیجه داریم:

با توجه به این‌که ناحیه انتگرال‌گیری، در راستای محور xها نامنظم است، انتگرال اولیه را به دو انتگرال در دو ناحیه منظم تبدیل می‌کنیم:

$$D_۱ : ۰ \le x \le \pi \,,\, ۰ \le y \le \sin x \Rightarrow \begin{cases} ۰ \le x \le \dfrac{\pi}{۲} \to y = \sin x \Rightarrow x = \text{Arcsin}\, y \\ \dfrac{\pi}{۲} \le x \le \pi \Rightarrow ۰ \le \pi - x \le \dfrac{\pi}{۲} \to y = \sin x = \sin(\pi - x) \Rightarrow \pi - x = \text{Arcsin}\, y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Arcsin}\, y \le x \le \pi - \text{Arcsin}\, y \\ ۰ \le y \le ۱ \end{cases}$$

$$D_۲ : ۰ \le x \le \pi \,,\, -\sin\frac{x}{۲} \le y \le ۰ \Rightarrow \begin{cases} -۱ \le y \le ۰ \\ y = -\sin\dfrac{x}{۲} \Rightarrow \text{Arcsin}(-y) = \dfrac{x}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲\,\text{Arcsin}\, y \le x \le \pi \\ -۱ \le y \le ۰ \end{cases}$$

$$I = \int_۰^{\pi}\int_{-\sin\frac{x}{۲}}^{\sin x} f(x,y)dydx = \int_۰^۱\int_{\text{Arcsin}\, y}^{\pi - \text{Arcsin}\, y} f(x,y)dxdy + \int_{-۱}^{۰}\int_{-۲\,\text{Arcsin}\, y}^{\pi} f(x,y)dxdy$$

۲۷۹ـ گزینه «۲» با جایگذاری $\cos\frac{۲\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$ و $\sin\frac{۲\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ داریم:

$$w = (۱ - \frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۱۲۰} = (\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۱۲۰}$$

فرض می‌کنیم $z = \frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، در این نقطه داریم:

$$\theta = tg^{-۱}(\frac{y}{x}) = tg^{-۱}(\sqrt{۳}) = \frac{\pi}{۳} \quad , \quad r = \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۴}} = ۱$$

در نتیجه $z = e^{i\frac{\pi}{۳}}$ و با جایگذاری نمایش قطبی آن در w داریم:

$$w = z^{۱۲۰} = (e^{i\frac{\pi}{۳}})^{۱۲۰} = e^{i۴۰\pi} = \cos(۴۰\pi) + i\sin(۴۰\pi) \Rightarrow w = ۱$$

۲۸۰ـ گزینه «۴» اعداد داده شده را به صورت توان‌دار می‌نویسیم. سپس توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\text{جواب} = \lim_{n\to\infty} ۲^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۴}} \times \cdots \times ۲^{\frac{۱}{۲^n}} = \lim_{n\to\infty} ۲^{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲^n}}$$

وقتی $n \to \infty$ توان این عبارت را می‌توان به صورت یک سری هندسی نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲^n}) = \sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲^k} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۱$$

برای محاسبه‌ی این سری از فرمول $\sum_{n=۱}^{\infty} x^n = \frac{x}{۱-x}$ استفاده کرده‌ایم. بنابراین با جایگذاری مقدار سری در توان عدد ۲ داریم:

$$\text{جواب} = ۲^۱ = ۲$$

۲۸۱ـ گزینه «۳»

روش اول: تابع $y_۱ = |x-۱|$ وقتی $x \to +\infty$ با خط $y = x - ۱$ و هنگامی که $x \to -\infty$ با خط $y = -x + ۱$ برابر است. اکنون تابع $y_۲ = \coth(x-۱)$ را در نظر می‌گیریم. طبق تعریف داریم:

$$y_۲ = \frac{e^{x-۱} + e^{-x+۱}}{e^{x-۱} - e^{-x+۱}}$$

هنگامی که $x \to +\infty$ میل می‌کند، خواهیم داشت $\lim_{x\to+\infty} e^{-x+۱} = e^{-\infty} = ۰$ و در نتیجه $\lim_{x\to+\infty} y_۲ = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-۱}}{e^{x-۱}} = ۱$ و هنگامی که $x \to -\infty$ میل می‌کند، خواهیم داشت $\lim_{x\to-\infty} e^{x-۱} = e^{-\infty} = ۰$ و در نتیجه $\lim_{x\to-\infty} y_۲ = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x+۱}}{-e^{-x+۱}} = -۱$. بنابراین مجانب‌های مایل تابع $y = y_۱ + y_۲$ به این صورت مشخص می‌شوند:

$$\begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow y \simeq (x-۱) + ۱ = x \\ x \to -\infty \Rightarrow y \simeq (-x+۱) - ۱ = -x \end{cases}$$

علاوه بر این‌ها، تابع $y_۲$ یک مجانب قائم دارد که همان ریشه‌ی مخرج است:

$$e^{x-۱} - e^{-x+۱} = ۰ \Rightarrow x - ۱ = -x + ۱ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

بنابراین خطوط $y = x$ ، $y = -x$ و $x = ۱$ مجانب‌های تابع y هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

با توجه به این‌که در سایر گزینه‌ها اکسترمم‌های نسبی تابع عنوان شده است، باید ابتدا تابع را به فرم نهایی بنویسیم و سپس از آن مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم.

$$x>1 \Rightarrow y=x-1+\frac{e^{x-1}+e^{-x+1}}{e^{x-1}-e^{-x+1}}=x+\frac{2e^{-x+1}}{e^{x-1}-e^{-x+1}} \Rightarrow y'=1+\frac{-2e^{-x+1}(e^{x-1}-e^{-x+1})-(e^{x-1}+e^{-x+1})(2e^{-x+1})}{(e^{x+1}-e^{-x+1})^2}=0$$

$$\Rightarrow y'=1-\frac{4}{(e^{x-1}-e^{-x+1})^2}=0 \Rightarrow (e^{x-1}-e^{-x+1})=\pm 2 \Rightarrow \frac{e^{x-1}-e^{-x+1}}{2}=\pm 1 \Rightarrow \sinh(x-1)=\pm 1 \Rightarrow x-1=\sin^{-1}h(\pm 1)$$

با توجه به این‌که $\sin^{-1}hx=\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})$ می‌باشد، داریم: $x_1=1+\mathrm{Ln}(1+\sqrt{2})$ و $x_2=1+\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{2})$

با توجه به این‌که طبق شرط اولیه باید $x>1$ باشد، پس فقط x_1 قابل قبول می‌باشد و با توجه به این‌که این ریشه، ریشه‌ی ساده مشتق اول می‌باشد پس حتماً طول اکسترمم نسبی تابع می‌باشد. اکنون به‌ازای $x<1$ داریم:

$$x<1 \Rightarrow y=-x+1+\frac{e^{x-1}+e^{-x+1}}{e^{x-1}-e^{-x+1}} \Rightarrow y=-x+\frac{2e^{x-1}}{e^{x-1}-e^{-x+1}} \Rightarrow y'=-1+\frac{2e^{x-1}(e^{x-1}+e^{-x+1})-(e^{x-1}+e^{-x+1})(2e^{x-1})}{(e^{x-1}-e^{-x+1})^2}$$

$$=-1-\frac{4}{(e^{x-1}-e^{-x+1})^2}\neq 0$$

ملاحظه می‌کنید که به‌ازای $x<1$ مشتق تابع ریشه ندارد پس این تابع فقط یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی دارد.

روش دوم: با استفاده از تغییر متغیر $x-1=t$ داریم: $y=|t|+\coth(t)$

اگر $t>0 \Rightarrow y=t+\coth(t) \Rightarrow y'=1+1-\cot^2h(t)=0 \Rightarrow \cot^2h(t)=2 \Rightarrow \coth(t)=\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow t=\cot^{-1}h(\pm\sqrt{2})$ فقط $\sqrt{2}$ قابل قبول است.

با توجه به این‌که $\cot^{-1}hx=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(\frac{x+1}{x-1})$ می‌باشد، داریم: $t=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1})=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(\sqrt{2}+1)^2=\mathrm{Ln}(\sqrt{2}+1)$

پس چون $x-1=\mathrm{Ln}(\sqrt{2}+1)$ شد، پس $x=1+\mathrm{Ln}(\sqrt{2}+1)$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع می‌باشد.

اگر $t<0 \Rightarrow y=-1+\coth(t) \Rightarrow y'=-1+1-\cot^2ht=0 \Rightarrow \coth t=0$

این معادله ریشه ندارد پس تابع y فقط یک اکسترمم نسبی دارد.

۲۸۲ـ گزینه «۱» تابع f مشتق‌پذیر و نزولی است، پس $f'(x)\leq 0$ در نتیجه $|f'(x)|=-f'(x)$ است. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$I=\int_a^b|f'(x)|f(x)dx=-\int_a^b f'(x)f(x)dx$$

همان‌طور که می‌دانید، دیفرانسیل f برابر است با $df(x)=f'(x)dx$، در نتیجه داریم:

$$I=-\int_a^b f(x)df(x)=-\frac{f^2(x)}{2}\Big|_a^b=-\frac{1}{2}(f^2(b)-f^2(a))$$

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$I=-\frac{1}{2}(f(b)-f(a))(f(b)+f(a))$$

طبق صورت سؤال $f(a)-f(b)=1$، پس $f(b)-f(a)=-1$ است. در نتیجه داریم:

$$I=-\frac{1}{2}(-1)(f(b)+f(a))=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

از صورت سؤال خواهیم داشت: $f(b)=f(a)-1$، بنابراین با جایگذاری در I داریم:

$$I=\frac{f(a)+f(a)-1}{2}=f(a)-\frac{1}{2}$$

۲۸۳ــ گزینه «۱» اگر به ضرایب t در معادله‌ی پارامتری اولین خط توجه کنیم، بردار هادی آن به‌صورت $\vec{V}_1 = \vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ به‌دست می‌آید. همچنین با توجه به ضرایب s در معادله‌ی پارامتری دومین خط، بردار هادی آن به‌صورت $\vec{V}_2 = 2\vec{i} + 15\vec{j} + 6\vec{k}$ معلوم می‌شود. حالا با جایگذاری $t=0$ و $s=0$ در معادلات پارامتری داده‌شده، نقاط $P_1(1,1,0)$ و $P_2(1,5,-2)$ از این خطوط را به‌دست می‌آوریم. طبق فرمول فاصله‌ی دو خط از یکدیگر داریم:

$$\text{فاصله‌ی دو خط از یکدیگر} = \text{طول عمود مشترک} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)|}{|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2|}$$

با توجه به مختصات P_1 و P_2، داریم:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1-1, 5-1, -2-0) = (0, 4, -2)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 15 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 4(6-4) - 2(15-12) = -14$$

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 15 & 6 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow |\vec{V}_1 \times \vec{V}_2| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$$

با جایگذاری این نتایج در فرمول فاصله‌ی دو خط از یکدیگر داریم:

$$\text{فاصله‌ی دو خط از یکدیگر} = \frac{|-14|}{7} = 2$$

۲۸۴ــ گزینه «۳» آهنگ تغییر دما یعنی همان $\frac{dT}{dt}$ و برای محاسبه‌ی آن کافی است ضابطه‌ی T را برحسب متغیر t نوشته و از آن مشتق بگیریم:

$$T = \frac{xy}{1+z}(1+t) = \frac{t \times 2t}{1+t-t^2}(1+t) \Rightarrow T = \frac{2t^2 + 2t^3}{1+t-t^2}$$

با مشتق‌گیری نسبت به t داریم:

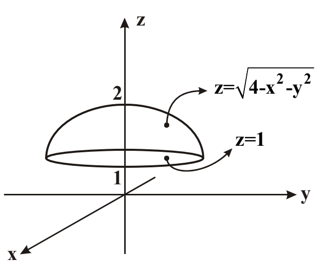
$$\frac{dT}{dt} = \frac{(4t+6t^2)(1+t-t^2) - (1-2t)(2t^2+2t^3)}{(1+t-t^2)^2} \xrightarrow{t=1} \frac{dT}{dt} = \frac{10+4}{1} = 14$$

توضیح: می‌توانستیم به‌جای جایگذاری x، y و z در ضابطه‌ی T، از قاعده‌ی زنجیره‌ای استفاده کنیم اما حجم محاسبات بیشتر می‌شد.

۲۸۵ــ گزینه «۱» ما ابتدا حجم ناحیه کوچکتر که در بالای صفحهِ $z=1$ و زیر کره $x^2+y^2+z^2=4$ قرار دارد را که یک عرقچین می‌باشد، محاسبه می‌کنیم و سپس حاصل را از حجم کل کره کم می‌کنیم. با توجه به مثبت بودن z در این ناحیه، با توجه به معادله کره داریم: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$
که در مختصات استوانه‌ای به‌صورت $z=\sqrt{4-r^2}$ می‌شود.

از برخورد صفحه $z=1$ و کره $x^2+y^2+z^2=4$ به دایره $x^2+y^2=3$ می‌رسیم که در این دایره $0 \le r \le \sqrt{3}$ و $0 \le \theta \le 2\pi$ می‌باشد.

اکنون حجم ناحیه کوچکتر را با استفاده از مختصات استوانه‌ای به‌دست می‌آوریم:



$$V_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (z)\Big|_1^{\sqrt{4-r^2}} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-r^2}-1)\,r\,dr\,d\theta$$

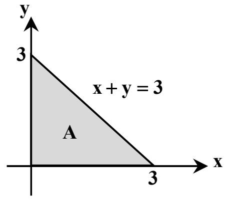
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (r\sqrt{4-r^2}-r)\,dr\,d\theta \xrightarrow[-2rdr=du]{4-r^2=u} \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right)d\theta = \left(\frac{-11}{6} + \frac{8}{3}\right)(2\pi) = \frac{5}{6}2\pi = \frac{5\pi}{3}$$

حجم کره‌ای به شعاع ۲ برابر است با $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32\pi}{3}$، پس در انتها داریم:

$$V = \frac{32\pi}{3} - V_1 = \frac{32\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} = \frac{27\pi}{3} = 9\pi$$

۲۸۶ـ گزینه «۴» معادله‌ی سطح S به صورت $g(x,y,z)=x+y+\frac{۱}{۲}z=۳$ داده شده است. در این صورت خواهیم داشت:



$$\vec{n}ds=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|}\cdot\frac{|\vec{\nabla}g|}{|g_z|}=\frac{\vec{\nabla}g}{|g_z|}=\frac{(۱,۱,\frac{۱}{۲})}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow \vec{n}ds=(۲,۲,۱)$$

با ضرب داخلی این بردار در $\vec{F}$ داریم: $\vec{F}.\vec{n}ds=۲x-۲x^۲+x+z$

البته z را برحسب x و y جایگزین می‌کنیم: $x+y+\frac{۱}{۲}z=۳\Rightarrow z=۶-۲x-۲y\Rightarrow \vec{F}.\vec{n}ds=۲x-۲x^۲+x+۶-۲x-۲y=۶+x-۲y-۲x^۲$

ناحیه‌ی A یعنی تصویر S بر صفحه‌ی xoy را مشخص می‌کنیم. از برخورد صفحه‌ی $x+y+\frac{۱}{۲}z=۳$ و صفحه‌ی $z=۰$ به خط $x+y=۳$ می‌رسیم.

در $\frac{۱}{۸}$ اول داریم $x\ge ۰$ و $y\ge ۰$، بنابراین ناحیه‌ی A به محورهای مختصات و خط $x+y=۳$ محدود می‌شود.

$$I=\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\int_۰^۳\int_۰^{۳-x}(۶+x-۲y-۲x^۲)dydx=\int_۰^۳[۶y+xy-۲x^۲y-y^۲]_۰^{۳-x}dx=\int_۰^۳[۶(۳-x)+x(۳-x)-۲x^۲(۳-x)-(۳-x)^۲]dx$$

$$=\int_۰^۳(۹+۳x-۸x^۲+۲x^۳)dx=[۹x+\frac{۳x^۲}{۲}-\frac{۸x^۳}{۳}+\frac{۲x^۴}{۴}]_۰^۳=۹$$

۲۸۷ـ گزینه «۱» با توجه به این‌که سری داده شده، از نوع تابعی است، با استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(x,n)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{۱+x^n}}=\begin{cases}|x| \ ; \ |x|<۱\\ ۱ \ ; \ |x|=۱\\ ۱ \ ; \ |x|>۱\end{cases}$$

در مورد چگونگی تساوی‌های بالا، دقت کنید؛ وقتی $|x|<۱$ باشد، آنگاه در مخرج کسر مقدار x^n، در بی‌نهایت کوچک‌تر از ۱ می‌شود و لذا حد هم‌ارز با $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{۱}}$ است و درنتیجه حاصل حد برابر با $|x|$ می‌شود. از طرفی وقتی $|x|>۱$، آنگاه در مخرج کسر رشد x^n بسیار بیشتر از ۱ می‌شود و بنابراین حد هم‌ارز با $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{x^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{۱}$ است و درنتیجه حاصل حد برابر با ۱ می‌شود و بالاخره اگر $|x|=۱$، آنگاه حاصل حد برابر با ۱ می‌شود.

بنابراین سری در حالت $|x|<۱$ همگراست (چون حاصل حد نیز همان $|x|$است که کوچک‌تر از یک است). اما در مورد حالت $|x|>۱$توجه کنید که در این حالت حد جمله عمومی مخالف صفر است ($\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{۱+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^n}=۱$) و چون سری شرط لازم همگرایی را ندارد، پس واگراست. در مورد $|x|=۱$ نیز سری به‌صورت مقابل می‌شود:

$$x=۱\Rightarrow S=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱^n}{۱+۱^n}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲} \quad ; \quad x=-۱\Rightarrow S=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۱+(-۱)^n}$$

که در هر دو حالت، حد جمله عمومی مخالف صفر است، پس سری واگراست.

۲۸۸ـ گزینه «۳» با توجه به شکل تابع زیر انتگرال، واضح است که باید از تغییر متغیر $t=\sqrt{x}$ کمک بگیریم. درنتیجه داریم:

$$t=\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}dt=\frac{dx}{۲\sqrt{x}}\\ x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow t=\frac{۱}{۲}\Rightarrow I=\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}(\sin t+\cos t)e^{-t}dt\\ x=۱\Rightarrow t=۱\end{cases}$$

برای حل انتگرال جدید، از روش جزء‌به‌جزء به‌صورت تشکیل جدول کمک می‌گیریم:

$(\sin t+\cos t)$	$+$	e^{-t}
$(\cos t-\sin t)$	$-$	$-e^{-t}$
$-(\sin t+\cos t)$	$+$	e^{-t}

$$I=-(\sin t+\cos t)e^{-t}\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱}-(\cos t-\sin t)e^{-t}\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱}-\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}(\sin t+\cos t)e^{-t}dt$$

$$=-[(\sin ۱+\cos ۱)e^{-۱}-(\sin\frac{۱}{۲}+\cos\frac{۱}{۲})e^{-\frac{۱}{۲}}]-[(\cos ۱-\sin ۱)e^{-۱}-(\cos\frac{۱}{۲}-\sin\frac{۱}{۲})e^{-\frac{۱}{۲}}]-I$$

$$\Rightarrow ۲I=(-\sin ۱-\cos ۱-\cos ۱+\sin ۱)e^{-۱}+(\sin\frac{۱}{۲}+\cos\frac{۱}{۲}+\cos\frac{۱}{۲}-\sin\frac{۱}{۲})e^{-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow I=\frac{۱}{۲}(-۲e^{-۱}\cos ۱+۲e^{-\frac{۱}{۲}}\cos\frac{۱}{۲})=\frac{\cos\frac{۱}{۲}}{\sqrt{e}}-\frac{\cos ۱}{e}$$

۲۸۹ـ گزینه «۳» ابتدا با استفاده از آزمون مشتق، نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم. سپس مقدار تابع را در مجموعه‌ای از آن نقاط که در ناحیه‌ی داده شده قرار دارند، به‌علاوه مقدار تابع بر روی مرز ناحیه را محاسبه می‌کنیم تا مینیمم و ماکزیمم آن به‌دست آید:

$$\begin{cases} f_x = 6x^2+2y^2-1=0 \\ f_y = 4xy-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = 6x^2+2y^2=1 \\ f_y = 2y(2x-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} ; \quad \begin{matrix} x=\frac{1}{2} \\ y^2=-\frac{1}{4} \end{matrix}$$

پس فقط دونقطه $(\pm\frac{1}{\sqrt{6}},0)$ تعریف می‌شوند (به ازای $x=\frac{1}{2}$ به معادله $6(\frac{1}{2})^2+2y^2=\frac{6}{4}+2y^2=1$ می‌رسیم که نتیجه می‌دهد $y^2=-\frac{1}{4}$ که غیرقابل قبول است) و با توجه به این‌که روی بیضی $\frac{x^2}{\frac{1}{6}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$ قرار دارند، و این بیضی درون دایره به شعاع ۱ قرار می‌گیرد، پس هر دونقطه به‌دست‌آمده قابل قبول هستند. حالا داریم:

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-x^2 \Rightarrow f(x,y)\big|_{y^2=1-x^2} = f(x) = 2x^3+2x(1-x^2)-x-(1-x^2) = x^2+x-1$$

$$\Rightarrow f'(x)=2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-(-\frac{1}{2})^2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(-\frac{1}{2})^3+2(-\frac{1}{2})(\frac{3}{4})+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{5}{4}$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{6}},0)=2(\frac{1}{\sqrt{6}})^3+2(\frac{1}{\sqrt{6}})(0)-\frac{1}{\sqrt{6}}-0=\frac{-2}{3\sqrt{6}}=-\frac{2}{3\sqrt{2}\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3\times 2\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$f(-\frac{1}{\sqrt{6}},0)=2(-\frac{1}{\sqrt{6}})^3+2(-\frac{1}{\sqrt{6}})(0)+\frac{1}{\sqrt{6}}-0=\frac{+2}{3\sqrt{6}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow f_{max}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \quad , \quad f_{min}=-\frac{5}{4}$$

۲۹۰- گزینه «۳» به طور کلی هرگاه $n\to\infty$ ، داریم $\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\cdots+\lfloor nx\rfloor \sim \frac{n^2}{2}x$، بنابراین داریم:

$$\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor 2\sqrt{2}\rfloor+\cdots+\lfloor n\sqrt{2}\rfloor \sim \frac{n^2}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2}\sqrt{2}}{n^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

اثبات هم‌ارزی:

$$x-1<\lfloor x\rfloor\le x \Rightarrow kx-1<\lfloor kx\rfloor\le kx \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(kx-1)<\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor\le\sum_{k=1}^{n}kx \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}x-n<\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor\le\frac{n(n+1)}{2}x$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}[\frac{n(n+1)}{2}x-n]<\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor\le\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}x \Rightarrow \frac{n^2}{2}x<\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor\le\frac{n^2}{2}x$$

۲۹۱ـ گزینه «۲»

روش اول: سری داده شده را به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-Lnx}}$ می‌نویسیم تا بتوانیم آن را به صورت یک سری P در نظر بگیریم، یعنی به فرم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$ و این سری با شرط $P>1$ یک سری همگراست، پس داریم: $\Rightarrow -Lnx>1 \Rightarrow Lnx<-1 \Rightarrow x<e^{-1}$ باید

برای آن که Ln تعریف شده باشد باید $x>0$ باشد، پس حدود x برای همگرایی سری بازه‌ی $(0,e^{-1})$ می‌باشد.

روش دوم: از آزمون رابه استفاده می‌کنیم و حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})$ را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-\frac{(n+1)^{Lnx}}{n^{Lnx}})=\lim_{n\to+\infty} n(1-(\frac{n+1}{n})^{Lnx})=\infty\times 0$$

برای رفع ابهام از این حالت عکس عامل بی‌نهایت‌کننده را در مخرج کسر قرار می‌دهیم و سپس از هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-(1+\frac{1}{n})^{Lnx}}{\frac{1}{n}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\frac{-(Lnx)(1+\frac{1}{n})^{Lnx-1}\times(-\frac{1}{n^2})}{-\frac{1}{n^2}}=(-Lnx)(1+0)^{Lnx-1}=-Lnx$$

طبق آزمون رابه شرط همگرایی این است که حاصل حد یعنی $(-Lnx)$ بزرگ‌تر از ۱ باشد، یعنی داشته باشیم $-Lnx>1 \Rightarrow Lnx<-1 \Rightarrow x<e^{-1}$
همچنین برای آن که Ln تعریف شده باید باشد $x>0$ باشد، پس بازه همگرایی سری $(0,e^{-1})$ می‌باشد.

۲۹۲- گزینه «۴» قبل از هرگونه محاسبه‌ای ابتدا دامنه تابع را محاسبه کنیم.

$$۸x - x^۲ > ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۸$$

حال نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = Ln(۸x - x^۲) \Rightarrow f'(x) = \frac{۸ - ۲x}{۸x - x^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

توجه داشته باشید این نقطه تنها نقطه بحرانی تابع است. زیرا تابع در صفرهای مخرج تعریف نشده است. برای محاسبه مجانب تابع نیز، نقاطی را که به ازای آن‌ها تابع درون Ln برابر صفر است به دست می‌آوریم:

$$۸x - x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ , \ x = ۸$$

هر دو خط $x = ۸ \ , \ x = ۰$ مجانب عمودی تابع است و فاصله نقطه $(۴, Ln۱۶)$ از هر دو خط برابر ۴ است.

۲۹۳- گزینه «۲» انتگرال I فقط در بی‌نهایت ناسره است. برای بررسی همگرایی این انتگرال از هم‌ارزی در بی‌نهایت استفاده می‌کنیم:

$$I = \int_۱^\infty \frac{dx}{xe^x + ۴e^{-x}} \sim \int_۱^\infty \frac{dx}{xe^x}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^۲(\frac{۱}{xe^x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = ۰ \Rightarrow p = ۲ > ۱ , A = ۰ \Rightarrow \text{همگراست } I$$

انتگرال J نیز فقط در بی‌نهایت ناسره است. برای بررسی همگرایی این انتگرال ابتدا از تغییر متغیر $Lnx = t$ استفاده می‌کنیم:

$$Lnx = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \ , \ \begin{cases} x = e^۲ \Rightarrow t = ۲ \\ x \to \infty \Rightarrow t \to \infty \end{cases}$$

$$J = \int_{e^۲}^\infty \frac{dx}{xLn(Lnx)} = \int_۲^\infty \frac{dt}{Lnt}$$

$$\lim_{t\to\infty} t(\frac{۱}{Lnt}) = \infty \Rightarrow p = ۱ \le ۱ , A \ne ۰ \Rightarrow \text{واگراست } J$$

۲۹۴- گزینه «۲» در این سؤال با توجه به موجود عامل $tg^۲\frac{\theta}{۲}$، استفاده از فرمول انحنای منحنی قطبی توصیه نمی‌شود. در این حالت سعی می‌کنیم معادله را به فرم استاندارد دکارتی تبدیل کنیم. فقط توجه داشته باشید که باید نقطه متناظر با $\theta = \frac{۲\pi}{۳}$ را نیز محاسبه کنیم:

$$r = \frac{۱}{۱۶}(tg^۲\frac{\theta}{۲} + ۱) \xrightarrow{\theta = \frac{۲\pi}{۳}} r = \frac{۱}{۱۶}(tg^۲\frac{\pi}{۳} + ۱) = \frac{۱}{۱۶} \times ۴ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = r\cos\theta = -\frac{۱}{۸} \ , \ y = r\sin\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۸}$$

$$r = \frac{۱}{۱۶}(۱ + tg^۲\frac{\theta}{۲}) = \frac{۱}{۱۶\cos^۲\frac{\theta}{۲}} \Rightarrow r\cos^۲\frac{\theta}{۲} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow r(\frac{۱+\cos\theta}{۲}) = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow r + r\cos\theta = \frac{۱}{۸} \Rightarrow r = \frac{۱}{۸} - r\cos\theta$$

$$\Rightarrow r^۲ = (\frac{۱}{۸} - r\cos\theta)^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = (\frac{۱}{۸} - x)^۲ = \frac{۱}{۶۴} - \frac{۱}{۴}x + x^۲ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴} - ۴y^۲$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{|x''_y|}{[۱ + x'^۲_y]^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{|-۸|}{[۱ + (-۸y)^۲]^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۸}{[۱ + (-\sqrt{۳})^۲]^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۸}{۸} = ۱$$

۲۹۵- گزینه «۱» سؤالی بسیار ساده از به کارگیری فرمول مساحت محصور توسط منحنی قطبی که داریم:

$$S = \frac{۱}{۲}\int_a^b r^۲ d\theta = \frac{۱}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (۴ - ۴\sin\theta\cos\theta) d\theta = \frac{۱}{۲}(۴\theta - ۲\sin^۲\theta)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۲}[(۴\frac{\pi}{۲} - ۲\sin^۲\frac{\pi}{۲}) - (۰ - ۰)] = \pi - ۱$$

توجه داشته باشید که در ربع اول، تابع $(۴ - ۴\sin\theta\cos\theta)^{\frac{۱}{۲}}$ در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود. به همین خاطر مقدار این انتگرال با مقدار مساحت برابر است و نیازی به شکستن انتگرال نیست.

۲۹۶- گزینه «۱» با کمک گرفتن از رابطه مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$r = 3u - 2v - w \ , \ s = -v + w \ , \ t = 2u + 2v - 4w$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} = 3\frac{\partial z}{\partial r} + 0 + 2\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v} = -2\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial s} + 2\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial w} = -\frac{\partial z}{\partial r} + 1\frac{\partial z}{\partial s} - 4\frac{\partial z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w} = 0$$

۲۹۷- گزینه «۱» ابتدا با مساوی قرار دادن معادله‌ی دو رویه ناحیه‌ی تصویر را بر روی صفحه‌ی xy به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} z = 1 + x^2 + y^2 \\ z = 4 - 2x^2 - 11y^2 \end{cases} \Rightarrow 1 + x^2 + y^2 = 4 - 2x^2 - 11y^2 \Rightarrow 12y^2 + 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

ناحیه‌ی تصویر یک بیضی است که در این معادله‌ی بیضی $a = 1$ و $b = \frac{1}{2}$ می‌باشد. اکنون حجم محدود به دو رویه را با استفاده از انتگرال دوگانه به دست می‌آوریم.

$$V = \iint_D (z_2 - z_1)dydx \Rightarrow V = \iint_D ((4 - 2x^2 - 11y^2) - (1 + x^2 + y^2))dydx = \iint_D (3 - 3x^2 - 12y^2)dydx$$

با توجه به این ناحیه‌ی انتگرال‌گیری تصویر آن بر روی صفحه‌ی xy یک بیضی است، از مختصات بیضوی استفاده می‌کنیم که باید از تغییر متغیرهای زیر استفاده کنیم.

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}r\sin\theta \end{cases} , \ dxdy = abrdrd\theta = \frac{1}{2}rdrd\theta$$

$$0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le 1$$

پس داریم:

$$\text{حجم} \ \ V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3 - 3(r^2\cos^2\theta) - 12(\frac{r^2}{4}\sin^2\theta))(\frac{1}{2}rdrd\theta) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3 - 3r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta))(\frac{1}{2}rdrd\theta)$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{3}{2}(r - r^3)drd\theta = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4})\Big|_0^1 d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})d\theta = \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}(\theta)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{8} \times 2\pi = \frac{3\pi}{4}$$

۲۹۸ـ گزینه «۴»

روش اول: منظور از گویا بودن جملات یک بسط یعنی صحیح بودن توان‌های جملات آن. طبق فرمول جمله‌ی $(k+1)$اُم در بسط دو جمله‌ای نیوتن $(a+b)^n$ داریم:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^{20} \Rightarrow T_{k+1} = \binom{20}{k}(\sqrt{3})^{20-k}(\sqrt[3]{2})^k = \binom{20}{k}(3)^{\frac{20-k}{2}}(2)^{\frac{k}{3}}$$

به ازای $k = 0, 6, 12, 18$ توان‌های هر دو جمله یک عدد صحیح می‌شود. پس این بسط ۴ جمله‌ی گویا دارد.

روش دوم (روش تستی): ابتدا مضارب فرجه‌ی رادیکال‌ها را می‌نویسیم. یعنی:

$$\begin{cases} 2k = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 \\ 3k = 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18 \end{cases}$$

به تعداد جفت اعدادی که جمع آن‌ها برابر ۲۰ می‌باشد، جمله‌ی گویا داریم، یعنی:

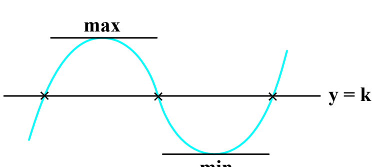
$$(2, 18), (8, 12), (14, 6), (20, 0)$$

پس این بسط دارای ۴ جمله‌ی گویا است.

۲۹۹ـ گزینه «۲» برای آنکه خط $y = k$ نمودار تابع درجه سوم $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ را در سه نقطه قطع کند، باید مقدار k بین مقادیر مینیمم و ماکسیمم این تابع باشد.

یعنی فقط به حالت روبه‌رو باشد، تا خط $y = k$ نمودار تابع را در سه نقطه قطع کند.

پس فقط کافی است مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع را بدست بیاوریم.



$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 , x = -1$$

$$f(1) = 2 - 6 + 1 = -3 \ , \ f(-1) = -2 + 6 + 1 = 5$$

پس باید $-3 < k < 5$ باشد.

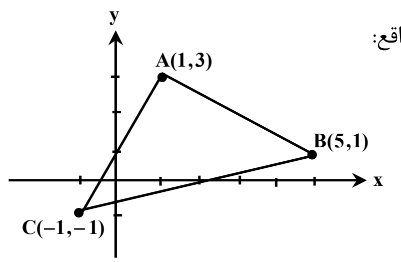
۳۰۰ـ گزینه «۳» محل‌های برخورد هر جفت از خطوط $L_۱: x+۲y=۷$ و $L_۲: y-۲x=۱$ و $L_۳: ۳y-x=-۲$ را بدست می‌آوریم تا رئوس مثلث مشخص شود.

$$A:\begin{cases} x+۲y=۷ \\ y-۲x=۱ \end{cases} \longrightarrow ۵y=۱۵ \Rightarrow y=۳ \Rightarrow x=۱$$

$$B:\begin{cases} x+۲y=۷ \\ ۳y-x=-۲ \end{cases} \longrightarrow ۵y=۵ \Rightarrow y=۱ \Rightarrow x=۵$$

$$C:\begin{cases} y-۲x=۱ \\ ۳y-x=-۲ \end{cases} \longrightarrow ۵y=-۵ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow x=-۱$$

رئوس مثلث عبارتند از نقاط $A(۱,۳)$ و $B(۵,۱)$ و $C(-۱,-۱)$.



فرض کنیم $M(x,y)$ مرکز دایره محیطی باشد. این نقطه از هر ۳ رأس مثلث به یک فاصله است. در واقع:

$$\text{شعاع دایره} = R = |AM| = |BM| = |CM|$$

$$\Rightarrow R^۲ = (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = (x-۵)^۲ + (y-۱)^۲ = (x+۱)^۲ + (y+۱)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y + ۱۰ = x^۲ + y^۲ - ۱۰x - ۲y + ۲۶ = x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y + ۲$$

$$\Rightarrow -۲x - ۶y + ۱۰ = -۱۰x - ۲y + ۲۶ = ۲x + ۲y + ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۸x - ۴y = ۱۶ \\ ۱۲x + ۴y = ۲۴ \end{cases} \Rightarrow ۲۰x = ۴۰ \Rightarrow x = ۲, y = ۰$$

مرکز دایره نقطه $M(۲,۰)$ است.
$$\text{شعاع دایره} = R = |AM| = \sqrt{(۲-۱)^۲ + (۰-۳)^۲} = \sqrt{۱۰}$$

۳۰۱ـ گزینه «۲» برای تعیین دامنه‌ی z ابتدا شرط نامنفی بودن زیر رادیکال را می‌نویسیم:

$$z = \sqrt{x^۲ + ۴y^۲ - ۱۶y + ۱۲}$$
$$x^۲ + ۴y^۲ - ۱۶y + ۱۲ \ge ۰$$

با ایجاد مربع‌های کامل معادله استاندارد بیضی (یا دایره) را ایجاد می‌کنیم:

$$x^۲ + ۴y^۲ - ۱۶y + ۱۲ = x^۲ + ۴[y^۲ - ۴y + ۳] = x^۲ + ۴[(y-۲)^۲ - ۱] = x^۲ + ۴(y-۲)^۲ - ۴$$

بنابراین در دامنه‌ی z داریم:

$$x^۲ + ۴(y-۲)^۲ - ۴ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ + ۴(y-۲)^۲ \ge ۴$$
$$\frac{x^۲}{۴} + (y-۲)^۲ \ge ۱$$

نقاط خارج و روی بیضی به مرکز $(۰,۲)$ و شعاع افقی ۲ و شعاع عمودی یک، دامنه z را تشکیل می‌دهند.

روش کوتاه: در تابع $z = \sqrt{x^۲ + ۴y^۲ - ۱۶y + ۱۲}$ از این که ضریب $x^۲$ و $y^۲$ هم‌علامت است اما برابر نیست متوجه می‌شویم که دامنه به یک بیضی مربوط است. این که $x^۲$ و $y^۲$ با ضریب مثبت آمده‌اند نشان می‌دهد که نقاط روی و خارج بیضی در دامنه قرار دارد.

۳۰۲ـ گزینه «۳» با استفاده از اصل ضرب، دو حالت را بررسی می‌کنیم:

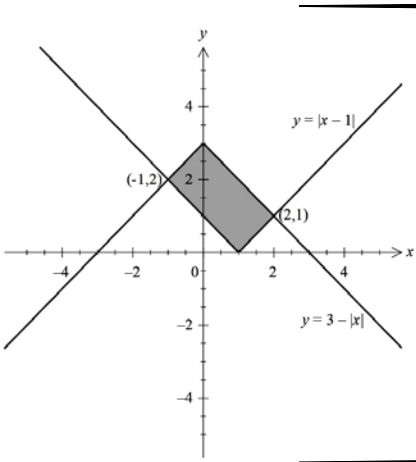
از هر حرف حداکثر یک بار استفاده شود
$$\binom{۷}{۳} \times ۳! = ۲۱۰$$

۲ حرف از حروف تکراری و یک حرف از حروف غیرتکراری انتخاب شود
$$\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۲}\frac{۳!}{۲!} = ۵۴$$

تعداد کل حالات
$$\Rightarrow ۲۱۰ + ۵۴ = ۲۶۴$$

۳۰۳ـ گزینه «۲» به راحتی با رسم دو نمودار خواهید دید که دو نقطه تقاطع دارند؛ یکی در $x > ۱$ و دیگری در $x < ۰$. برای به دست آوردن این دو نقطه داریم:

$$x < ۰ \Rightarrow ۳ - (-x) = -(x-۱) \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow y = ۲$$
$$x > ۱ \Rightarrow ۳ - x = x - ۱ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow y = ۱$$



حال می‌توان با تغییر متغیرهای $u = x + y$ و $v = x - y$ مساحت ناحیه محدود بین این دو منحنی را محاسبه کرد، اما راه حل ساده‌تر این است که اگر توجه کنید، شکل حاصل از تقاطع دو منحنی یک مستطیل به اضلاع $\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۲}$ است. پس مساحت ناحیه برابر $۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۴$ است.

۳۰۴- گزینه «۳» نقاط بحرانی توابع قدر مطلق، نقاطی است که تابع داخل قدر مطلق صفر می‌شود. یعنی:

$$f(x)=|x^2-3x+1|+|x^2-3x-4|=|(x^2-3x-4)+5|+|x^2-3x-4|$$

$$x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow f(-1)=|1+3+1|+|1+3-4|=5 \\ x=4 \Rightarrow f(4)=|16-12+1|+|16-12-4|=5 \end{cases}$$

$$x^2-3x+1=0 \Rightarrow x=x_1,x_2 \Rightarrow x^2-3x-4=-5 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)=|0|+|-5|=5$$

۳۰۵- گزینه «۲» ابتدا در نظر داشته باشید که کلمه داده شده از ۷ حرف که فقط ۴ حرف آن متمایزند تشکیل شده است. برای حل این سؤال، سه حالت را باید در نظر بگیریم:

۱) انتخاب چهار حرف رمز از چهار حرف متمایز ضرب‌در تعداد جایگشت‌هایشان: $\binom{4}{4}4!=24$

۲) حالتی که دو حرف از چهار حرف رمز را از دو حرف تکراری انتخاب کنیم و دو حرف باقیمانده را از ۳ حرف دیگر. در این حالت نصف جایگشت‌ها تکراری است، بنابراین باید تعداد کل جایگشت‌های چهار حرف را تقسیم بر دو کنیم: $\binom{2}{1}\binom{3}{2}\frac{4!}{2}=72$

۳) حالتی که ۳ حرف رمز عبور را A قرار دهیم و یک حرف باقیمانده را از بین ۳ حرف دیگر انتخاب کنیم. در این حالت فقط جایگشت این یک حرف مهم است، زیرا با جابجایی حروف دیگر، کلمه جدیدی ساخته نمی‌شود. پس تعداد جایگشت‌های این انتخاب، برابر تعداد حالت‌های قرارگیری یک حرف متمایز در یک کلمه چهارحرفی است که برابر ۴ خواهد بود. پس داریم: $\binom{1}{1}\binom{3}{1}\times 4=12$

مجموع این سه حالت برابر ۱۰۸ است.

۳۰۶- گزینه «۳» باید مساحت مثلث OAB را برحسب پارامتری بنویسیم که با سرعت جابجایی نقطه B ارتباط داشته باشد. در نتیجه:

$$A(x,y)\ ,\ B(0,y)$$

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times x\times y=\frac{x}{2}(1+\frac{x^2}{2})=\frac{x}{2}+\frac{x^3}{4} \Rightarrow \frac{dS}{dt}=(\frac{1}{2}+\frac{3x^2}{4})\frac{dx}{dt}$$

$$y=vt+y_0 \Rightarrow y_{12}=\frac{3}{2}\times 12+1=19 \Rightarrow 1+\frac{x^2}{2}=19 \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=6$$

$$y=1+\frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=x\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{3}{2}=6\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{dS}{dt}=(\frac{1}{2}+\frac{3\times 36}{4})\frac{1}{4}=\frac{55}{8}$$

۳۰۷ـ گزینه «۴»

روش اول: با استفاده از هم‌ارزی $\frac{n^{k+1}}{k+1}\simeq 1^k+2^k+3^k+\dots+n^k$ و هم‌ارزی $\sin\frac{1}{n}\simeq\frac{1}{n}$ می‌توان چنین نوشت:

$$\lim_{n\to+\infty}\sin(\frac{1}{n})(\frac{1+2^{1390}+\dots+n^{1390}}{n^{1390}})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\frac{n^{1391}}{1391n^{1390}})=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})(\frac{n}{1391})=\frac{1}{1391}$$

روش دوم: وقتی $n\to\infty$ داریم $\frac{1}{n}\to 0$ پس، از هم‌ارزی $\sin\frac{1}{n}\simeq\frac{1}{n}$ استفاده می‌کنیم. عبارت داخل پرانتز را به مجموع n جمله تبدیل می‌کنیم:

$$\text{مقدار حد}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n^{1390}}+\frac{2^{1390}}{n^{1390}}+\dots+\frac{n^{1390}}{n^{1390}})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(\frac{1}{n})^{1390}+(\frac{2}{n})^{1390}+\dots+(\frac{n}{n})^{1390}\right]$$

یک حد مجموع ریمانی داریم که در آن $f(\frac{k}{n})=(\frac{k}{n})^{1390}$ است پس، $f(x)=x^{1390}$ و خواهیم داشت:

$$\text{جواب حد}=\int_0^1 x^{1390}dx=\left[\frac{x^{1391}}{1391}\right]_0^1=\frac{1}{1391}$$

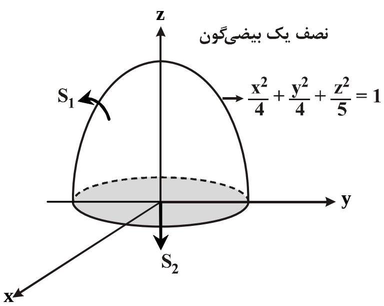
۳۰۸ـ گزینه «۴» انتگرال داده شده را با استفاده از روش جزء به جزء به فرمی تبدیل می‌کنیم که اطلاعات آن در صورت سؤال داده شده است:

$$I=\int_{\pi}^{۲\pi}xF(x)\,dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{array}{c|c} F(x) & x\,dx \\ \hline F'(x) & \dfrac{x^{۲}}{۲} \\ & \int \dfrac{x^{۲}}{۲}dx \end{array}$$

$$\Rightarrow I=F(x)\times\frac{x^{۲}}{۲}\Big|_{\pi}^{۲\pi}-\int\frac{x^{۲}}{۲}\times F'(x)\,dx \Rightarrow I=۲\pi^{۲}F(۲\pi)-\frac{\pi^{۲}}{۲}F(\pi)-\int_{\pi}^{۲\pi}\frac{x^{۲}}{۲}\times\frac{\sin x}{x^{۲}}dx \Rightarrow I=۲\pi^{۲}\times A-\int_{\pi}^{۲\pi}\frac{\sin x}{۲}dx$$

$$\Rightarrow I=۲\pi^{۲}A+\frac{\cos x}{۲}\Big|_{\pi}^{۲\pi} \Rightarrow I=۲\pi^{۲}A+۱$$

۳۰۹ـ گزینه «۱» شار گذرنده میدان $\vec{F}$ از سطح $S_۱$ برابر است با: $\text{شار}=\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds$



سطح $S_۱$ بسته نیست. با اضافه‌کردن $z=۰$ به آن یک سطح بسته ایجاد می‌کنیم.

این سطح از دو بخش $S_۱$ و $S_۲$ تشکیل می‌شود. از آنجایی که سطح $S=S_۱+S_۲$ بسته است،

با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_R \operatorname{div}\vec{F}\,dv=\iiint_R ۰\,dv=۰$$

بنابراین داریم: $$۰=\iint_{S_۱}\vec{F}.\vec{n}_۱ds+\iint_{S_۲}\vec{F}.\vec{n}_۲ds \Rightarrow \iint_{S_۱}\vec{F}.\vec{n}_۱ds=-\iint_{S_۲}\vec{F}.\vec{n}_۲ds$$

بردار قائم برونسو برای سطح $S_۲$ بردار $\vec{n}_۲=-\vec{k}$ می‌باشد، لذا: $\iint_{S_۲}\vec{F}.\vec{n}ds=\iint_D -\sin(x^{۲}+y^{۲})\,dA$

با استفاده از مختصات قطبی داریم: $$\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{y^{۲}}{۴}+\frac{z^{۲}}{۵}=۱ \xrightarrow{z=۰} x^{۲}+y^{۲}=۴ \Rightarrow \begin{cases} ۰\le r\le ۲ \\ ۰\le\theta\le ۲\pi \end{cases}$$

با جایگذاری عبارات و کران‌های فوق در انتگرال داریم: $$\iint_{S_۲}\vec{F}.\vec{n}ds=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}-r\sin r^{۲}dr\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}\frac{۱}{۲}\cos r^{۲}\Big|_۰^{۲}d\theta=۲\pi\times\frac{۱}{۲}(\cos۴-۱)=\pi(\cos۴-۱)$$

با جایگذاری مقدار فوق در رابطه‌ی قبل داریم: $$\iint_{S_۱}\vec{F}.\vec{n}\,ds=-\pi(\cos۴-۱)=\pi(۱-\cos۴)$$

۳۱۰ـ گزینه «۲» دنباله‌های $\sqrt[n]{|a_n|}$ و $\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|$ حد برابری دارند به عبارتی: $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

پس $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=۱۰$ است. همچنین $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=۱$ است. اکنون شعاع همگرایی سریِ توانی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{na_n}{۲^n}x^n$ برابر است با:

$$R=\frac{۱}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n|a_n|}{۲^n}}}=\frac{۱}{\dfrac{(۱۰)(۱)}{۲}}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$$

۳۱۱ـ گزینه «۳» ابتدا یادآوری کنیم که: $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}f(\frac{k}{n})=\int_۰^۱ f(x)dx$. در این سؤال ابتدا از دنباله Ln می‌گیریم تا حالت مجموع را پیدا کند:

$$a_n=\left(\cos(\frac{۱}{n})\cos(\frac{۲}{n})\cdots\cos(\frac{n}{n})\right)^{\frac{۱}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\operatorname{Ln}(a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}[\operatorname{Ln}(\cos\frac{۱}{n})+\operatorname{Ln}(\cos\frac{۲}{n})+\cdots+\operatorname{Ln}\cos(\frac{n}{n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\operatorname{Ln}(\cos(\frac{k}{n}))=\int_۰^۱\operatorname{Ln}(\cos(x))dx=A$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty}a_n=e^A$.

۳۱۲ـ گزینه «۳» نقاط بحرانی تابع $f(x,y,z)=x^۲+y+z$ را تحت دو قید (شرط) $g(x,y,z)=x^۲-y^۲+z^۲=۳$ و $h(x,y,z)=x+y+z=۱$ می‌خواهیم. برای کم‌تر شدن حجم محاسبات بهتر است از معادله‌ی شرط h مقدار $y+z$ را برحسب x یافته و در f قرار دهیم. به این ترتیب خواهیم داشت: $y+z=۱-x$ پس $f(x,y,z)=x^۲+۱-x$ و اکنون کافیست نقاط بحرانی f را با داشتن شرط g مشخص کنیم. هرگاه λ ضریب لاگرانژ باشد داریم:

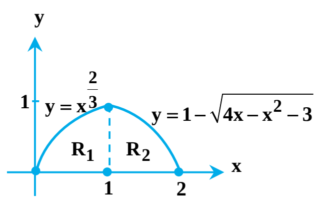
$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z}\ ;\ \lambda=\frac{۲x-۱}{۲x}=\frac{۰}{-۲y}=\frac{۰}{۲z}$$

اگر y و z مخالف صفر باشند داریم: $(۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲})$

و اگر y و z صفر باشند با استفاده از معادله‌ی g داریم $x^۲=۳$ پس $x=\pm\sqrt{۳}$. مقادیر بحرانی $f(x)$ عبارتند از $f(\frac{۱}{۲})$ و $f(\frac{۱}{\sqrt{۳}})$ و $f(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})$

$$\left.\begin{array}{l}f(\frac{۱}{۲})=(\frac{۱}{۲})^۲+۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}\\ f(\frac{۱}{\sqrt{۳}})=(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲+۱-\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\\ f(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})=(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲+۱+\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{۴}{۳}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\end{array}\right\}\Rightarrow \min f=\frac{۳}{۴}$$

۳۱۳ـ گزینه «۴» لازم است با توجه به کران‌های بالا و پایین داده شده، ناحیه انتگرال‌گیری را تشخیص دهیم. در اولین انتگرال داریم $۰\le y\le x^{\frac{۲}{۳}}$ و $۰\le x\le ۱$. خط $y=۰$ و منحنی $y=x^{\frac{۲}{۳}}$ مرزهای این ناحیه هستند این ناحیه را $R_۱$ بنامیم.
در دومین انتگرال خط $y=۰$ و منحنی $y=۱-\sqrt{۴x-x^۲-۳}$ مرزهای بالا و پایین را تعیین می‌کنند و $۱\le x\le ۲$ است. این ناحیه را $R_۲$ بنامیم دقت کنید که رسم تقریبی ایم منحنی‌ها کافی است و رعایت کردن طول و عرض نقاطِ مهم برای ما اهمیت دارد.



اکنون می‌خواهیم با عوض کردن ترتیب متغیرها ابتدا کران‌های y را به‌صورت دو عدد ثابت نوشته آنگاه کران‌های x را برحسب y به‌دست آوریم.

به سادگی می‌توان دید در این ناحیه $۰\le y\le ۱$ است. اگر در جهت محور xها از ناحیه $R_۱\cup R_۲$ بگذاریم مرز ورودی $y=x^{\frac{۲}{۳}}$ است: $x=y^{\frac{۲}{۳}}\Leftarrow y=x^{\frac{۲}{۳}}$
و مرز خروجی $y=۱-\sqrt{۴x-x^۲-۳}$ است:

$$y=۱-\sqrt{۴x-x^۲-۳}\Rightarrow\sqrt{۴x-x^۲-۳}=۱-y\Rightarrow\sqrt{۱-(x-۲)^۲}=۱-y\Rightarrow ۱-(x-۲)^۲=(۱-y)^۲\Rightarrow(x-۲)^۲=۱-(۱-y)^۲$$

$$\Rightarrow|x-۲|=\sqrt{۱-(۱-y)^۲}\Rightarrow|x-۲|=\sqrt{۲y-y^۲}$$

می‌دانیم که در ناحیه مورد نظر $x\le ۲$ است پس $x-۲\le ۰$ بنابراین $|x-۲|=-x+۲$ پس $-x+۲=\sqrt{۲y-y^۲}$ و از این‌جا کران بالای x به صورتِ $x=۲-\sqrt{۲y-y^۲}$ به‌دست می‌آید.

$$\text{جواب}=\int_۰^۱\int_{y^{\frac{۳}{۲}}}^{۲-\sqrt{۲y-y^۲}}f(x,y)\,dx\,dy$$

۳۱۴ـ گزینه «۲» با تغییرِ متغیر $\frac{x-m}{s}=u$ و $\frac{۱}{s}dx=du$ داریم $m\le x<\infty$ پس $۰\le u<\infty$:

$$\int_m^{\infty}e^{-(\frac{x-m}{s})^۲}dx=\int_۰^{\infty}e^{-u^۲}du$$

و با توجه به فرض مسأله که $\int_۰^{+\infty}e^{-x^۲}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$، پس:

$$\int_m^{+\infty}e^{-(\frac{x-m}{s})^۲}dx=s\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

۳۱۵ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۲n+۱}=\frac{-۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۱}+\cdots$ می‌باشد و با توجه به بسط سری توانی $\tan^{-۱}x$ داریم:

$$\tan^{-۱}x=x-\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}-\cdots\xrightarrow{x=۱}\frac{\pi}{۴}=\tan^{-۱}(۱)=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\cdots\Rightarrow\frac{\pi}{۴}-۱=-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\cdots=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۲n+۱}$$

۳۱۶ـ گزینه «۱» تابع $w = U(x, y, z)$ را همگن از درجهٔ n گوییم هرگاه به ازای هر $\lambda > 0$ داشته باشیم $U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n U(x, y, z)$.
نشان می‌دهیم که تابع U داده شده در صورت سؤال همگن از درجه‌ی صفر است:

$$U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \sinh(\cosh(\sqrt[5]{\frac{\lambda x \lambda y \lambda z}{\lambda^3 x^3 + 2\lambda^3 y^3 + 7\lambda^3 z^3}})) = \underbrace{\lambda^0}_{1} U(x, y, z)$$

بنا بر قضیه‌ی اویلر برای توابع همگن داریم: $xU_x + yU_y + zU_z = nU$ و چون تابع U همگن از درجه‌ی صفر است، داریم: $xU_x + yU_y + zU_z = 0$

توضیح: با توجه به آن‌که درجه‌ی صورت و مخرج در این کسر برابر است، واضح بود که همگن از مرتبه‌ی صفر است.

۳۱۷ـ گزینه «۱» حد مجموع داده شده را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}}$$

با فاکتورگیری از n^2 در عبارات زیر رادیکال می‌توانیم $\frac{1}{n}$ را از مجموع فاکتور بگیریم و در این صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{2}{n})^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}}\right)$$

بنابراین در حد مجموع داده شده داریم $f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{k}{n})^2}}$. پس $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ و طبق فرمول حد مجموع ریمانی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

۳۱۸ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که $Ln(2^n) = nLn2$ و ضریب ثابت $Ln2$ را می‌توان از سری خارج کرد. بنابراین کافیست حاصل سری $Ln2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$ را حساب کنیم. هرگاه $|x|<1$ باشد، خواهیم داشت: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. حالا با مشتق‌گیری از طرفین تساوی، ضریب n را در سری ایجاد می‌کنیم: $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

با ضرب طرفین در x می‌توانیم x^n را در سری ایجاد کنیم. در ضمن به ازای $n = 0$ اولین جمله‌ی سری صفر می‌شود، پس می‌توان سری را از $n = 1$ آغاز کرد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

حالا با جایگذاری $x = \frac{1}{e}$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n} = \frac{\frac{1}{e}}{(1-\frac{1}{e})^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n} = \frac{e}{(e-1)^2}$$

با در نظر گرفتن ضریب ثابت $Ln2$، حاصل سری داده شده به دست می‌آید:

$$Ln2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n} = \frac{eLn2}{(e-1)^2}$$

۳۱۹ـ گزینه «۲» با آوردن جملات به یک طرف تساوی، به معادله‌ی $f(x) = tgx - \sin x - 1 = 0$ می‌رسیم. اکنون به دو مطلب توجه کنید:

هرگاه $x \to (-\frac{\pi}{2})^+$ داریم: $f(x) \to -\infty$ و هرگاه $x \to (\frac{\pi}{2})^-$ داریم: $f(x) \to +\infty$. بنابراین تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ تغییر علامت می‌دهد.
در ضمن $f(x)$ در این بازه پیوسته است. پس طبق قضیه‌ی مقدار میانی حداقل یک ریشه در این بازه دارد.

از طرفی با محاسبه‌ی $f'(x)$ داریم: $f'(x) = tg^2 x + 1 - \cos x \geq 0$

پس تابع $f(x)$ در این بازه صعودی است. در نتیجه فقط یک ریشه در این بازه خواهد داشت.

۳۲۰ـ گزینه «۳» طبق صورت سؤال، A و B کران‌های ρ در مختصات کروی هستند. کافیست روی کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و صفحه‌ی $z = 1$ مقادیر ρ را به دست آوریم. از معادله‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ داریم $\rho^2 = 2$ در نتیجه $\rho = \sqrt{2}$.

روی صفحه‌ی $z = 1$ خواهیم داشت:

$$z = 1 \Rightarrow \rho\cos\phi = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos\phi} \Rightarrow \rho = \sec\phi$$

ناحیه‌ی مورد نظر بالای صفحه‌ی $z = 1$ و درون کره قرار دارد، پس $\rho = \sec\phi$ کران پایین و $\rho = \sqrt{2}$ کران بالای ρ خواهد بود.

$$\sec\phi \leq \rho \leq \sqrt{2} \Rightarrow A = \sec\phi,\ B = \sqrt{2}$$

۳۲۱ــ گزینه «۳» با توجه به این که ریشه‌های پنجم واحد از رابطه روبرو به دست می‌آیند، داریم: $z^5=1 \Rightarrow z=e^{i\frac{2k\pi}{5}} \ , \ k=0,1,2,3,4$

از طرفی طبق سؤال، ریشه‌های مورد اشاره، غیر حقیقی هستند؛ پس در رابطه بالا $k\neq 0$ است. حال خواسته سؤال را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$S=\sum_{k=1}^{4} w_k^3=\sum_{k=1}^{4}\left(e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right)^3=\sum_{k=1}^{4} e^{i\frac{6k\pi}{5}}$$

این سری، یک سری هندسی ۴ جمله‌ای با جمله اول $e^{i\frac{6\pi}{5}}$ و قدر نسبت $e^{i\frac{6\pi}{5}}$ است. در نتیجه داریم:

$$S=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{e^{i\frac{6\pi}{5}}\left(1-\left(e^{i\frac{6\pi}{5}}\right)^4\right)}{1-e^{i\frac{6\pi}{5}}}=\frac{e^{i\frac{6\pi}{5}}\left(1-e^{i\frac{24\pi}{5}}\right)}{1-e^{i\frac{6\pi}{5}}}=\frac{e^{i\frac{6\pi}{5}}-e^{i\frac{30\pi}{5}}}{1-e^{i\frac{6\pi}{5}}}=\frac{e^{i\frac{6\pi}{5}}-e^{i6\pi}}{1-e^{i\frac{6\pi}{5}}}=\frac{e^{i\frac{6\pi}{5}}-1}{1-e^{i\frac{6\pi}{5}}}=-1$$

۳۲۲ــ گزینه «۳» با توجه به این که در همسایگی مبدأ مختصات $\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}\sim\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ و در این تابع تنها ریشه مخرج مبدأ مختصات است و هر دو جمله مخرج توان ۲ بوده و درجه صورت از مخرج یک درجه بیشتر است، پس حد تابع در مبدأ برابر صفر است؛ در نتیجه تابع در این نقطه پیوسته است.

برای بررسی مشتق‌پذیری در مبدأ ابتدا مشتقات جزئی تابع در مبدأ را به دست می‌آوریم:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(h\times 0^2)}{h^2+0}-0}{h}=0 \quad , \quad f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(0\times h^2)}{0+h^2}-0}{h}=0$$

برای مشتق‌پذیری تابع در مبدأ باید حد زیر برابر صفر باشد:

$$L=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{\sin(hk^2)}{h^2+k^2}-0-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sin(hk^2)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\sim\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

در حد اخیر درجه صورت و مخرج با هم برابر است، پس حد وجود ندارد، یعنی f در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۳۲۳ــ گزینه «۴» منحنی C در واقع از چهار پاره‌خط تشکیل شده است. با پارامتری‌سازی این چهار پاره‌خط داریم:

$$C_1:(0,0,0)+(1,0,0)t=(t,0,0) \qquad 0\le t\le 1$$
$$C_2:(1,0,0)+(0,1,1)t=(1,t,t) \qquad 0\le t\le 1$$
$$C_3:(1,1,1)+(-1,0,0)t=(1-t,1,1) \qquad 0\le t\le 1$$
$$C_4:(0,1,1)+(0,-1,-1)t=(0,1-t,1-t) \qquad 0\le t\le 1$$

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=\oint_{C_1}\vec{F}.d\vec{r}+\oint_{C_2}\vec{F}.d\vec{r}+\oint_{C_3}\vec{F}.d\vec{r}+\oint_{C_4}\vec{F}.d\vec{r}$$

$$=\int_0^1(\sin t^2+t^4)dt+\int_0^1(t^2+t^4)dt+(t^2+\cos t^2)dt+\int_0^1(\sin(1-t)^2+(1-t)^4)(-dt)+\int_0^1(1-t)^4(-dt)+\cos(1-t)^2(-dt)$$

$$=\underbrace{\int_0^1(\sin t^2+t^4)dt}_{I_1}+\int_0^1 2t^2dt+\underbrace{\int_0^1(t^4+\cos t^2)dt}_{I_2}-\underbrace{\int_0^1(\sin(1-t)^2+(1-t)^4)dt}_{I_3}-\underbrace{\int_0^1[(1-t)^4+\cos(1-t)^2]dt}_{I_4}$$

با توجه به این‌که به طور کلی $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$، پس $I_1=I_3 \ , \ I_2=I_4$ و داریم:

$$I=I_1+\int_0^1 2t^2dt+I_2-I_1-I_2=\int_0^1 2t^2dt=\left.\frac{2t^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}$$

۳۲۴ـ گزینه «۲» از تغییر متغیر $t = Lnx$ استفاده می‌کنیم. پس داریم $x = e^{t}$ و $dx = e^{t}dt$. به ازای $x = e$ داریم $t = ۱$ و به ازای $x = ۱$ داریم $t = ۰$.

$$I = \int_{۱}^{e} (xLnx)^{۲} dx = \int_{۰}^{۱} (te^{t})^{۲} e^{t} dt = \int_{۰}^{۱} t^{۲} e^{۳t} dt$$

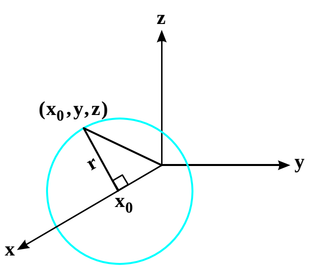
حالا از جدول جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$t^{۲}$	$e^{۳t}$
$۲t$	$\frac{۱}{۳}e^{۳t}$
۲	$\frac{۱}{۹}e^{۳t}$
۰	$\frac{۱}{۲۷}e^{۳t}$

$$\Rightarrow \quad I = e^{۳t}\left(\frac{t^{۲}}{۳} - \frac{۲t}{۹} + \frac{۲}{۲۷}\right)\Big|_{۰}^{۱} = e^{۳}\left(\frac{۱}{۳} - \frac{۲}{۹} + \frac{۲}{۲۷}\right) - \frac{۲}{۲۷} = \frac{۵}{۲۷}e^{۳} - \frac{۲}{۲۷} = \frac{۱}{۲۷}(۵e^{۳} - ۲)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۲۵ـ گزینه «۳» از دوران یک خط حول محور xها رویه‌ای به فرم کلی $x = f(y^{۲} + z^{۲})$ حاصل می‌شود که این رویه در واقع یک مخروط است و مقطع آن یک دایره به شعاع r می‌باشد که این مقدار r همان مقدار $x_{۰}$ بر روی محور x هاست. یعنی اگر نقطه‌ی $(x_{۰}, y, z)$ نقطه‌ای از مخروط باشد، داریم:



$$y^{۲} + z^{۲} = r^{۲}$$

حال با توجه به خط $\frac{x}{۱} = \frac{y}{۲} = \frac{z}{۳}$ داریم:

$$۲x = y \ , \ z = ۳x$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(۲x)^{۲} + (۳x)^{۲} = ۴x^{۲} + ۹x^{۲} = ۱۳x^{۲}$$

و این یعنی $r = x\sqrt{۱۳}$ می‌باشد و معادله‌ی این مخروط به‌صورت $y^{۲} + z^{۲} = ۱۳x^{۲}$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۲۶ـ گزینه «۱» ابتدا تغییر متغیر $x = \pi - u$ را در نظر می‌گیریم، لذا کران‌های انتگرال جدید عبارتند از:

$$\begin{cases} x = ۰ \ \to u = \pi \\ x = \pi \ \to u = ۰ \end{cases} \Rightarrow I = \int_{۰}^{\pi} \frac{\sin(۱۳۹۲x)}{\sin x} dx = \int_{\pi}^{۰} \frac{\sin(۱۳۹۲\pi - ۱۳۹۲u)}{\sin(\pi - u)} (-du)$$

با توجه به اینکه $\sin(x + ۲n\pi) = \sin x$ و $\sin(\pi + x) = -\sin x$ می‌باشد، داریم:

$$I = \int_{\pi}^{۰} -\frac{\sin(-۱۳۹۲u)}{-\sin(-u)} du = \int_{\pi}^{۰} \frac{\sin(۱۳۹۲u)}{\sin u} du \quad (*)$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\int_{\pi}^{۰} \frac{\sin(۱۳۹۲u)}{\sin u} du = -\int_{۰}^{\pi} \frac{\sin(۱۳۹۲u)}{\sin u} du = -I$$

و با جایگذاری در رابطه (*) داریم:

$$I = -I \ \Rightarrow ۲I = ۰ \ \Rightarrow I = ۰$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۲۷ـ گزینه «۲» می‌توانیم عبارت داخل سری را به صورت تلسکوپی بنویسیم. می‌دانیم که $tg^{-۱}\alpha - tg^{-۱}\beta = tg^{-۱}\frac{\alpha - \beta}{۱ + \alpha\beta}$.

در نتیجه داریم:

$$tg^{-۱}(n + ۱) - tg^{-۱}(n) = tg^{-۱}\left(\frac{(n + ۱) - (n)}{۱ + (n + ۱)(n)}\right) = tg^{-۱}\left(\frac{۱}{۱ + (n + ۱)n}\right)$$

عبارت سمت راست همان عبارت داخل سری داده شده می‌باشد، لذا:

$$\sum_{n=۱}^{+\infty} tg^{-۱}\left(\frac{۱}{۱ + (n + ۱)n}\right) = \sum_{n=۱}^{\infty} tg^{-۱}(n + ۱) - tg^{-۱}(n)$$

سری فوق یک سری تلسکوپی می‌باشد، بنابراین مقدار سری برابر است با:

$$\sum_{n=۱}^{+\infty} tg^{-۱}\left(\frac{۱}{۱ + n(n + ۱)}\right) = tg^{-۱}(n + ۱)\big|_{n=\infty} - tg^{-۱}(n)\big|_{n=۱} = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۴}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۲۸ـ گزینه «۱» ابتدا هر یک از عبارات دو طرف تساوی را محاسبه می‌کنیم:

طرف اول تساوی:

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}=t^n\times\frac{-2r}{4t}e^{-\frac{r^2}{4t}}=\frac{-t^{n-1}r}{2}e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

عبارت فوق را در r^2 ضرب می‌کنیم و سپس نسبت به r دوباره مشتق می‌گیریم:

$$r^2\frac{\partial\theta}{\partial r}=\frac{-t^{n-1}r^3}{2}e^{-\frac{r^2}{4t}}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r})=-\frac{3r^2t^{n-1}}{2}e^{-\frac{r^2}{4t}}+\frac{t^{n-1}r^3}{2}\times\frac{2r}{4t}e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r})=-\frac{3}{2}r^2t^{n-1}e^{-\frac{r^2}{4t}}+t^{n-2}\times\frac{r^4}{4}e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

عبارت فوق را در $\frac{1}{r^2}$ ضرب می‌کنیم تا طرف اول تساوی محاسبه شود:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r})=-\frac{3}{2}t^{n-1}e^{-\frac{r^2}{4t}}+\frac{t^{n-2}r^2}{4}e^{-\frac{r^2}{4t}}\quad(*)$$

با مشتق‌گیری نسبت به t طرف دوم تساوی را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=nt^{n-1}\times e^{-\frac{r^2}{4t}}+t^n\times\frac{4r^2}{16t^2}e^{-\frac{r^2}{4t}}=nt^{n-1}e^{-\frac{r^2}{4t}}+\frac{t^{n-2}r^2}{4}e^{-\frac{r^2}{4t}}\quad(**)$$

با مساوی قرار دادن (*) و (**) نتیجه می‌گیریم:

$$n=-\frac{3}{2}$$

۳۲۹ـ گزینه «۳» سطح S بسته است پس با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds=\iiint_R\operatorname{div}\vec{F}dv$$

دیورژانس $\vec{F}$ را حساب می‌کنیم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial(y(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})}{\partial x}+\frac{\partial(-x(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})}{\partial y}+\frac{\partial(2z-1)}{\partial z}=3xy\sqrt{x^2+y^2}-3xy\sqrt{x^2+y^2}+2=2$$

بنابراین مقدار انتگرال $\iint_S\vec{F}.\vec{n}ds$ برابر است با:

$$I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}\,ds=\iiint_R 2dv$$

حدود z عبارتند از $z=5$ و $z=9-x^2-y^2$ که در دستگاه استوانه‌ای به‌صورت $z=9-r^2$ نوشته می‌شود. از برخورد حدود z با هم دایره‌ی $x^2+y^2=4$ به دست می‌آید پس $0\le\theta\le2\pi$ و $0\le r\le2$ است.

$$I=2\iiint_R dzdydx=2\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_5^{9-r^2}rdzdrd\theta=2\int_0^{2\pi}\int_0^2(4-r^2)r\,drd\theta=2(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^2(4r-r^3)dr)$$

$$I=2\times2\pi\times(2r^2-\frac{r^4}{4})\Big|_0^2=4\pi\times(8-4)=16\pi$$

۳۳۰ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم S سطح مکعب باشد. این سطح بسته است پس، از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\text{شار}=\iint_S\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_D\operatorname{div}\vec{F}dv=\iiint_D(y+z+x)dv$$

و چون توان همه‌ی جملات یکسان است برای محاسبه ساده‌تر این انتگرال می‌نویسیم: $I=(\bar{y}+\bar{z}+\bar{x})\times(\text{حجم } D)$. حجم مکعب برابر یک و مرکز هندسی آن $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$است. (دقت کنید که در این مکعب $0\le x\le1$ و $0\le y\le1$ و $0\le z\le1$ است. مرکز آن $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ خواهد بود. پس:

$$\text{شار}\ I=\iiint_D(x+y+z)dV=\bar{x}\times\text{حجم}+\bar{y}\times\text{حجم}+\bar{z}\times\text{حجم}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۳۳۱ـ گزینه «۱» ابتدا توضیحی درباره‌ی معادله‌ی داده شده لازم است.

فرض می‌کنیم $a+b=1$ باشد. اگر داشته باشیم $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$، آنگاه تابع $f(x)$ یک خط است یعنی $f(x)=mx+h$.

از شرط $f'(0)=-1$ متوجه می‌شویم که $m=-1$ و از شرط $f(0)=1$ متوجه می‌شویم $h=1$ است.

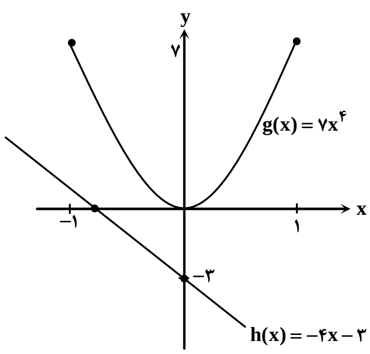
پس داریم $f(x)=-x+1$. حالا با جایگذاری $x=2$ خواهیم داشت:

$$f(2)=-2+1=-1$$

۳۳۲ـ گزینه «۱» واضح است که $x=-1$ یک ریشه‌ی حقیقی معادله داده شده است، چرا که: $(-1)^7+(-1)^4+(-1)^3+1=-1+1-1+1=0$. از طرفی بنا به نتیجه‌ی قضیه‌ی رُل می‌دانیم که اگر معادلهٔ $f'(x)=0$ دارای n ریشه‌ی حقیقی باشد، آنگاه $f(x)=0$ حداکثر $(n+1)$ ریشه حقیقی دارد. با فرض $f(x)=x^7+x^4+x^3+1$ داریم:

$$f'(x)=7x^6+4x^3+3x^2=x^2(7x^4+4x+3)=0$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید $f'(0)=0$. در ادامه نشان می‌دهیم که $7x^4+4x+3=0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد، برای این‌کار ابتدا معادله را به صورت $\underbrace{7x^4}_{g(x)}=\underbrace{-4x-3}_{h(x)}$ بازنویسی می‌کنیم. تعداد تقاطع‌های g و h برابر با تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $7x^4+4x+3=0$ می‌باشد.



همان‌طور که از شکل پیداست، نمودارهای g و h تلاقی ندارند و این بدین معناست که معادلهٔ $7x^4+4x+3=0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

حال جدول تغییرات تابع f را که در زیر آمده مورد توجه قرار دهید:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)=7x^6+4x^3+3x^2$			$+$		0	$+$	
$f(x)=x^7+x^4+x^3+1$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

مشتق f همواره مثبت است پس تابع f صعودی اکید است، بنابراین نمی‌تواند بیش از یک ریشه‌ی حقیقی داشته باشد و چون $f(-1)=0$، پس دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

۳۳۳ـ گزینه «۳» فرض کنید $\vec a=\alpha\vec i+\beta\vec j+\gamma\vec k$ برداری ناصفر باشد. همچنین θ_1، θ_2 و θ_3 به ترتیب زوایای بین $\vec a$ و بردارهای یکهٔ $\vec i$، $\vec j$ و $\vec k$ باشند. در این صورت داریم:

$$\cos\theta_1=\frac{\alpha}{|\vec a|} \quad \text{و} \quad \cos\theta_2=\frac{\beta}{|\vec a|} \quad \text{و} \quad \cos\theta_3=\frac{\gamma}{|\vec a|}$$

با توجه به بردار هادی خطوط در هر یک از گزینه‌ها داریم:

$$\begin{cases}\text{(1) گزینه}: \vec a=(1,2,-1)\ ,\ |\vec a|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt6 \Rightarrow \cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt6}\neq\cos\theta_2=\frac{2}{\sqrt6}\\ \text{(2) گزینه}: \vec a=(2,1,-1)\ ,\ |\vec a|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt6 \Rightarrow \cos\theta_1=\frac{2}{\sqrt6}\neq\cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt6}\\ \text{(3) گزینه}: \vec a=(1,1,1)\ ,\ |\vec a|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt3 \Rightarrow \cos\theta_1=\cos\theta_2=\cos\theta_3=\frac{1}{\sqrt3}\\ \text{(4) گزینه}: \vec a=(2,1,1)\ ,\ |\vec a|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt6 \Rightarrow \cos\theta_1=\frac{2}{\sqrt6}\neq\cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt6}\end{cases}$$

بنابراین از آنجا که باید $\hat\theta_1=\hat\theta_2=\hat\theta_3$ باشد، پاسخ صحیح گزینه (۳) خواهد بود.

۳۳۴ـ گزینه «۱» ابتدا باید مقدار t را در این نقطه مشخص کنیم. از حل معادله‌ی $(t^2-4t+2\ \text{و}\ t^3-6t^2+11t-5)=(-1,1)$ مقادیر ممکن را برای t به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}t^2-4t+2=-1\\ t^3-6t^2+11t-5=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t^2-4t+3=0\\ t^3-6t^2+11t-6=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(t-1)(t-3)=0\\ (t-1)(t-2)(t-3)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=1,3\\ t=1,2,3\end{cases}$$

در نتیجه $t=1,3$ جواب‌های معادله‌اند. می‌دانیم که بردار $\vec R'(t)$ بر $\vec R(t)$ مماس است، بنابراین داریم:

$$\vec R'(t)=(2t-4\ ,\ 3t^2-12t+11) \Rightarrow \begin{cases}\vec R'(1)=(2(1)-4\ ,\ 3(1^2)-12(1)+11)=(-2,2)\\ \vec R'(3)=(2(3)-4\ ,\ 3(3^2)-12(3)+11)=(2,2)\end{cases}$$

از طرفی $\vec R'(1)\cdot\vec R'(3)=(-2,2)\cdot(2,2)=-2(2)+2(2)=0$، در نتیجه $\vec R'(1)$ و $\vec R'(3)$ بر هم عمودند و این یعنی منحنی داده شده در نقطهٔ $(-1,1)$ دو مماس عمود بر هم دارد.

۳۳۵ـ گزینه «۱» در این مسأله θ برحسب r داده شده است. در واقع داریم:

$$\theta = f(r) = \int_{۱}^{r} \frac{\sinh t}{t} dt$$

بنابراین از فرمول محاسبه طول قوس برای تابع $\theta = f(r)$ استفاده می‌کنیم:

$$L = \int_{r_۱}^{r_۲} \sqrt{r^۲ (\frac{d\theta}{dr})^۲ + ۱}\, dr$$

با مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$\frac{d\theta}{dr} = f'(r) = \frac{\sinh r}{r}$$

حالا با جایگذاری $\frac{d\theta}{dr} = \frac{\sinh r}{r}$ و به‌ازای $۱ \le r \le ۲$ داریم:

$$L = \int_{۱}^{۲} \sqrt{r^۲ (\frac{\sinh r}{r})^۲ + ۱}\, dr = \int_{۱}^{۲} \sqrt{\sinh^۲ r + ۱}\, dr = \int_{۱}^{۲} \cosh r\, dr = \sinh r \Big|_{۱}^{۲} = \sinh ۲ - \sinh ۱$$

۳۳۶ـ گزینه «۴» ناحیه‌ی D همان مربع واحد است، بنابراین حاصل I برابر است با:

$$I = \iint_D dx\, dy = (\text{مساحت } D) = ۱ \times ۱ = ۱$$

برای تبدیل $dx\,dy$ به $du\,dv$ باید ژاکوبی تبدیل را حساب کنیم:

$$J_{uv} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۴-۸u & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۴ - ۸u$$

با انتگرال‌گیری روی مربع S در صفحه‌ی uv داریم:

$$J = \iint_S |۴-۸u|\, du\, dv = \int_۰^۱\int_۰^۱ |۴-۸u|\, du\, dv = (\int_۰^۱ dv)(۴\int_۰^۱ |۱-۲u|\, du) = ۴\int_۰^۱ |۱-۲u|\, du$$

برای $۰ \le u \le \frac{۱}{۲}$ داریم: $|۱-۲u| = ۱-۲u$ و برای $\frac{۱}{۲} \le u \le ۱$ داریم: $|۱-۲u| = -۱+۲u$. در نتیجه:

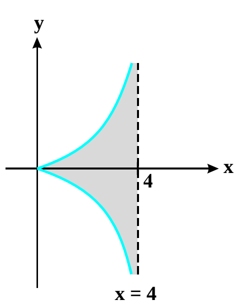
$$J = ۴[\int_۰^{\frac{۱}{۲}} (۱-۲u)\, du + \int_{\frac{۱}{۲}}^۱ (-۱+۲u)\, du] \Rightarrow J = ۴[(u-u^۲)_۰^{\frac{۱}{۲}} + (-u+u^۲)_{\frac{۱}{۲}}^۱] = ۴[\frac{۱}{۴} - ۰ + ۰ + \frac{۱}{۴}] = ۲$$

۳۳۷- گزینه «۴»

ابتدا باید در معادله منحنی داده شده y را برحسب x مرتب کنیم تا بتوانیم مجانب این منحنی را به دست آوریم.

$$۴y^۲ - xy^۲ - x^۲ = ۰ \Rightarrow y^۲(۴-x) = x^۲ \Rightarrow y^۲ = \frac{x^۲}{۴-x}$$

ریشه‌ی مخرج یعنی $x = ۴$ مجانب قائم این منحنی و در واقع تنها مجانب این منحنی می‌باشد. توجه داشته باشید که اگر در معادله‌ی منحنی به جای y قرار دهیم $-y$ معادله‌ی منحنی تغییری نمی‌کند و این یعنی نمودار این منحنی نسبت به محور xها متقارن است، پس ما مساحت بین قسمت بالای محور xها تا منحنی را به دست می‌آوریم و سپس آن را دو برابر می‌کنیم.



$$S = ۲\int_۰^۴ \frac{x}{\sqrt{۴-x}} dx \xrightarrow[-dx=du]{۴-x=u} -۲\int (۴-u)u^{-\frac{۱}{۲}} du$$

$$= -۲(\int (۴u^{-\frac{۱}{۲}} - u^{\frac{۱}{۲}}) du) = -۲(۴ \times ۲\sqrt{u} - \frac{۲}{۳}\sqrt{u^۳})$$

$$= -۲(۸\sqrt{۴-x} - \frac{۲}{۳}\sqrt{(۴-x)^۳})_۰^۴ = -۲(۰ - (۱۶ - \frac{۱۶}{۳})) = \frac{۶۴}{۳}$$

۳۳۸ـ گزینه «۱» از تلاقی معادله‌های داده شده نتیجه می‌شود $۲\cos\phi = ۲$، یعنی $\cos\phi = ۱$، پس $\phi = ۰$. اما به ازای $\phi = ۰$ و $\rho = ۲$ داریم:

$x = \rho\sin\phi\cos\theta = ۰$، $y = \rho\sin\phi\sin\theta = ۰$، $z = \rho\cos\phi = ۲$ بنابراین نقطه‌ی $(۰,۰,۲)$ تنها محل برخورد این دو رویه است.

۳۳۹ـ گزینه «۳»

روش اول: با توجه به این‌که معکوس یک ماتریس مانند A از رابطه‌ی $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times N'$ به‌دست می‌آید که در این رابطه N' ماتریس الحاقی و $|A|$ دترمینان A می‌باشد، پس شرط آن‌که یک ماتریس وارون‌پذیر نباشد، آن است که دترمینان این ماتریس برابر صفر باشد. پس باید $|A-\lambda I|=0$ باشد تا ماتریس $(A-\lambda I)$ وارون‌پذیر نباشد. اکنون ماتریس $A-\lambda I$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\lambda&1&0\\1&3-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{bmatrix}$$

حال $|A-\lambda I|=0$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&3-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+5)-1\times(2-\lambda)=0\Rightarrow(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda^2-5\lambda+4=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=4\\ \lambda=1\end{cases}\end{cases}$$

روش دوم: برای این که ماتریس $A-\lambda I$ وارون نداشته باشد، لازم است $|A-\lambda I|$ برابر صفر شود. یعنی مقادیر λ همان مقادیر ویژه می‌باشند. می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه همان اثر (Trace) ماتریس است و $tr(A)=7$، پس تنها گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

۳۴۰ـ گزینه «۱»

روش اول: با استفاده از روش پوسته استوانه‌ای حجم حاصل از دوران خم $y=f(x)$ حول محور yها در فاصله $a\le x\le b$ برابر است با:

$$V=2\pi\left|\int_a^b xf(x)dx\right|$$

بنابراین برای خم $y=f(\sin x)$ داریم:

$$V=2\pi\left|\int_0^\pi xf(\sin x)dx\right|$$

با استفاده از تغییر متغیر $x=u+\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$x=u+\frac{\pi}{2}\Rightarrow dx=du\ ,\ \begin{cases}x=0\Rightarrow u=-\frac{\pi}{2}\\ x=\pi\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

بنابراین حجم حاصل از دوران برابر است با:

$$V=2\pi\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(u+\frac{\pi}{2})f(\sin(u+\frac{\pi}{2}))du\right|=\left|2\pi\right|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(u+\frac{\pi}{2})f(\cos u)du\,|\Rightarrow V=2\pi\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}u\,f(\cos u)du+\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos u)du\right|$$

با توجه به این که کران‌های انتگرال‌گیری متقارن می‌باشد، فرد یا زوج بودن توابع زیر انتگرال را بررسی می‌کنیم.

تابع $g(u)=uf(\cos u)$ فرد و تابع $h(u)=f(\cos u)$ زوج می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$V=2\pi\left|0+\frac{\pi}{2}\times2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos u)du\right|$$

با استفاده از صورت مسأله $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos u)du=A$ است، بنابراین داریم:

$$V=2\pi\times\pi\times A=2\pi^2A$$

روش دوم: اگر نکات انتگرال معین کتاب را حفظ باشیم، می‌توانیم به شکل زیر عمل کنیم؛ از همان ابتدا داریم:

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$$

$$V=2\pi\times\frac{\pi}{2}\left|\int_0^\pi f(\sin x)dx\right|=\pi^2\left|\int_0^\pi f(\sin x)dx\right|$$

حالا از تغییر متغیر $x=\frac{\pi}{2}-t$ استفاده می‌کنیم:

$$x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\ ,\ x=\pi\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$$

$$V=\pi^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}-f(\sin(\frac{\pi}{2}-t)dt)=\pi^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)dt=2\pi^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)dt=2\pi^2A$$

۳۴۱ـ گزینه «۱» دنباله $\{a_n\}$ را به‌صورتی می‌نویسیم که به یک دنباله بازگشتی تبدیل شود، با توجه به این‌که بعد از اولین رادیکال، زیر همه رادیکال‌ها عامل $\frac{1}{4}$ وجود دارد، از هرکدام از این عامل‌ها، عامل $\frac{1}{4}$ را بیرون می‌آوریم و دنباله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{16}\sqrt{\frac{1}{32}\sqrt{\cdots\frac{1}{2^n}}}}}}}$$

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{8}\sqrt{\cdots\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4}}}}}}}$$

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{4}\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{8}\sqrt{\cdots\sqrt{\frac{1}{2^{n-2}}}}}}}}_{a_{n-2}}}\Rightarrow a_n=\sqrt{\frac{1}{4}a_{n-2}}\Rightarrow a_n=\frac{1}{2}\sqrt{a_{n-2}}$$

اگر $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=L$ باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n-2}=L$ می‌باشد، پس داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{1}{2}\sqrt{\lim_{n\to+\infty}a_{n-2}}\Rightarrow L=\frac{1}{2}\sqrt{L}\Rightarrow L^2=\frac{1}{4}L\Rightarrow L^2-\frac{1}{4}L=0\Rightarrow L=\frac{1}{4}$$

پس دنباله $\{a_n\}$ به عدد $\frac{1}{4}$ همگرا است.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۴۲ـ گزینه «۲» بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه‌ی x_0 برابر است با:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

اکنون باید بسط تیلور تابع $f(x)=\cos x$ را حول نقطه‌ی $x_0=-\frac{\pi}{4}$ به‌دست آوریم.

$$f(x_0)=\cos(-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x_0)=-\sin(\frac{-\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x_0)=-\cos(-\frac{\pi}{4})=-\cos(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'''(x_0)=\sin(-\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f^{(4)}(x_0)=\cos(-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس داریم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1!}(x+\frac{\pi}{4})^1-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2!}(x+\frac{\pi}{4})^2-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3!}(x+\frac{\pi}{4})^3+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{4!}(x+\frac{\pi}{4})^4+\cdots$$

با توجه به این‌که علامت جملات این سری یکی در میان مثبت و منفی نمی‌باشند و برای $n=0,1$ مقدارش مثبت و برای $n=2,3$ مقدارش منفی می‌باشد، باید در جمله عمومی سری عامل $(-1)^{[\frac{n}{2}]}$ را داشته باشیم. پس داریم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n!}(x+\frac{\pi}{4})^n$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۴۳ــ گزینه «۱»

روش اول: ماتریس A را به صورت ماتریس بالا مثلثی تبدیل می‌کنیم. ابتدا چهار برابر سطر دوم را از سطر چهارم کم می‌کنیم و در ادامه به ترتیب عملیات زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 16 & 16 & 1 & 1 & 81 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & +3 & 15 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{سوم از سطر پنجم}]{\text{کم کردن } \frac{1}{2} \text{ برابر سطر}} \begin{bmatrix} 16 & 16 & 1 & 1 & 81 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{از سطر سوم}]{\text{کم کردن } \frac{1}{4} \text{ برابر سطر اول}} \begin{bmatrix} 16 & 16 & 1 & 1 & 81 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{45}{4} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{ستون ۱}]{\text{اضافه کردن ستون ۲ به}} \begin{bmatrix} 32 & 16 & 1 & 1 & 81 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{45}{4} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سوم از سطر پنجم}]{\text{کم کردن دو برابر سطر}} \begin{bmatrix} 32 & 16 & 1 & 1 & 81 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{45}{4} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{به ستون سوم}]{\text{اضافه کردن ستون چهارم}} \begin{bmatrix} 32 & 16 & 2 & 1 & 81 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{45}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

دترمینان این ماتریس بالا مثلثی برابر حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی می‌باشد، لذا:

$$|A| = 32 \times -2 \times \frac{3}{2} \times 3 \times 20 = -5760$$

روش دوم: با ضرب یک عدد در سطرهای ماتریس و همچنین جمع و تفریق سطرهای ماتریس با یکدیگر باید سطر یا ستونی را تولید کنیم که دارای بیشترین تعداد صفر باشد و سپس حاصل دترمینان را براساس بسط دادن برروی آن سطر یا ستون به‌دست آوریم.

$$|A| = \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{array} \begin{bmatrix} 16 & 16 & 1 & 1 & 81 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & -8 & 1 & -1 & 27 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_5 \to R_2 \ , \ R_1 - 8R_5 \to R_1]{R_4 - 4R_5 \to R_4 \ , \ R_3 - 2R_5 \to R_3} |A| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -15 & -15 & 65 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & -16 & -7 & -9 & 19 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

با توجه به این‌که ستون اول دارای بیشترین تعداد صفر می‌باشد، حاصل دترمینان را براساس بسط بر روی ستون اول به‌دست می‌آوریم.

$$|A| = (-1)^{5+1} \times 2 \times \begin{bmatrix} 0 & -15 & -15 & 65 \\ -4 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 5 \\ -16 & -7 & -9 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - 4R_2 \to R_4} 2 \begin{bmatrix} 0 & -15 & -15 & 65 \\ -4 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

اکنون دوباره برحسب ستون اول بسط می‌دهیم و داریم:

$$|A| = 2 \times (-1)^{2+1} \times (-4) \begin{bmatrix} -15 & -15 & 65 \\ -3 & -3 & 5 \\ -3 & 3 & 15 \end{bmatrix} = 8(-15(-45-15) + 15(-45+15) + 65(-9-9)) = 8(900 - 450 - 1170) = 8(-720) = -5760$$

۳۴۴ـ گزینه «۳» با توجه به معادلات پارامتری $\vec{r}(t)$ داریم: $x=۳tg^۲t+۱\,،\,y=۲tg^۲t-۳sec^۲t\,،\,z=۵sec^۲t-۲$ از اتحـاد مثلثـاتی $sec^۲t=۱+tg^۲t$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x=۳tg^۲t+۱\\ y=-tg^۲t-۳\\ z=۵tg^۲t+۳\end{cases}\Rightarrow ۲x+y-z=-۴$$

به عبارتی این منحنی در یک صفحه با معادله‌ی $۲x+y-z=-۴$ قرار دارد پس تاب آن صفر است. (هر منحنی که در یک صفحه قرار داشـته باشـد، تـاب آن صفر است).

۳۴۵ـ گزینه «۲» با توجه به محدودیت‌های $۱\le x\le ۲$، $۲\le x^۲y\le ۴$، $۰\le z\le ۱$ و $۱\le u\le ۴$، $۰\le v\le ۲$ و $۰\le w\le ۳$ خواهیم داشـت: . اکنـون ژاکـوبین را محاسبه می‌کنیم:

$$J_{xyz}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial y}&\frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x}&\frac{\partial w}{\partial y}&\frac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۲x&۰&۰\\ ۲xy&x^۲&۰\\ ۰&۰&۳\end{vmatrix}\Rightarrow J_{xyz}=۲x\times x^۲\times ۳=۶x^۳\Rightarrow J_{uvw}=\frac{۱}{۶x^۳}\Rightarrow J_{uvw}=\frac{۱}{۶u\sqrt{u}}\Rightarrow dxdydz=\frac{dudvdw}{۶u\sqrt{u}}$$

با جایگذاری تغییر متغیرهای در نظر گرفته شده در تابع زیر انتگرال داریم:

$$I=\int_۰^۳\int_۰^۲\int_۱^۴(u\times v+u\times v^۲\times w)\frac{dudvdw}{۶u\sqrt{u}}\Rightarrow I=\frac{۱}{۶}\int_۰^۳\int_۰^۲\int_۱^۴(v+v^۲w)\frac{۱}{\sqrt{u}}dudvdw$$

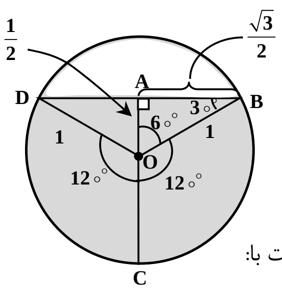
۳۴۶ـ گزینه «۳» فرض کنیم $A=\int_۰^۱\frac{dt}{۱-Lnt}$. با تغییر متغیـر $x=Lnt$ آغـاز کنـیم. بـه ایـن ترتیـب خـواهیم داشـت $t=e^x$ و در نتیجـه $dt=e^xdx$.
هم‌چنین وقتی $۰<t<۱$ داریم $-\infty<x<۰$.

$$A=\int_۰^۱\frac{dt}{۱-Lnt}=\int_{-\infty}^۰\frac{e^x}{۱-x}dx$$

اکنون تغییر متغیر $z=۱-x$ را انجام می‌دهیم. $dx=-dz$ و به ازای $x=۰$ داریم $z=۱$ و اگر $x\to-\infty$ داریم $z\to+\infty$.

$$A=\int_{-\infty}^۰\frac{e^x}{۱-x}dx=\int_{+\infty}^۱\frac{e^{۱-z}}{z}(-dz)=-e\int_{+\infty}^۱e^{-z}z^{-۱}dz$$

ثابت e را از انتگرال خارج کرده‌ایم و در پایان با جابه‌جا کردن کران‌ها انتگرال را قرینه می‌کنیم: $A=e\int_۱^\infty e^{-z}z^{-۱}dz=ef(۱)$



۳۴۷ـ گزینه «۴» در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{OAB}$، چون ضلع مقابل زاویهٔ $\hat{B}$ نصفِ وتر است،
پس: $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $A\hat{O}B=۶۰^\circ$ در نتیجه $B\hat{O}C=۱۲۰^\circ$.

مساحت مثلث $\overset{\triangle}{BOD}$ برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}\times\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

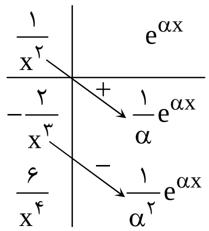
از طرفی قطاع‌های OBC و ODC روی هم $\frac{۲}{۳}$ مساحت دایره را اشغال کرده‌اند، پس مساحت این نواحی برابر است با:

$$\frac{۲}{۳}\pi(۱)^۲=\frac{۲}{۳}\pi$$

بنابراین مساحت قاعده‌ی بخش پر شده از مخزنِ نفتی، $(\frac{۲}{۳}\pi+\frac{\sqrt{۳}}{۴})$ است. در نتیجه:

$$\text{حجم مایع درون مخزن}=\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}=(\frac{۲}{۳}\pi+\frac{\sqrt{۳}}{۴})\times ۱۲=۸\pi+۳\sqrt{۳}$$

۳۴۸ـ گزینه «۲» برای آنکه رابطه بین $\int \frac{e^{\alpha x}}{x^4}dx$ و $\int \frac{e^{\alpha x}}{x^2}dx$ مشخص شود، از روش جزء به جزء با استفاده از جدول استفاده می‌کنیم. اگر از $\frac{1}{x^2}$ دو بار مشتق بگیریم به $\frac{6}{x^4}$ خواهیم رسید.



پس از ۲ بار جزء به جزء به انتگرال $\int \frac{6e^{\alpha x}}{\alpha^2 x^4}dx$ می‌رسیم. پس خواهیم داشت:

$$\int \frac{e^{\alpha x}}{x^2}dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha x^2} + \frac{2}{\alpha^2 x^3}e^{\alpha x} + \int \frac{6e^{\alpha x}}{\alpha^2 x^4}dx \Rightarrow \int \frac{e^{\alpha x}}{x^2}dx - \int \frac{6e^{\alpha x}}{\alpha^2 x^4}dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha x^2} + \frac{2e^{\alpha x}}{\alpha^2 x^3} = \frac{\alpha x + 2}{\alpha^2 x^3}e^{\alpha x}$$

۳۴۹ـ گزینه «۲» می‌دانیم که $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ است. برای محاسبه انتگرال $I = \int_0^\infty \frac{\sin x^n}{x}dx$ از تغییر متغیر $t = x^n$ استفاده می‌کنیم.

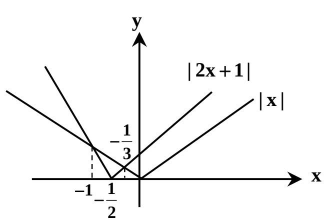
خواهیم داشت $x = \sqrt[n]{t}$ و $dx = \frac{dt}{n\sqrt[n]{t^{n-1}}}$. از آنجا که $0 \le x < \infty$ است، پس $0 \le t < \infty$:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt[n]{t}} \times \frac{dt}{n\sqrt[n]{t^{n-1}}} = \int_0^\infty \frac{\sin t}{nt}dt = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2n}$$

رد گزینه: اولاً به ازای $n = 0$ داریم $\int_0^\infty \frac{\sin(1)}{x}dx = \sin(1)\operatorname{Ln}x \Big|_0^\infty = \infty$، پس گزینه‌های (۱) و (۴) غلط هستند. ثانیاً می‌دانیم به ازای $n = 1$ باید به $\frac{\pi}{2}$ دست آید، پس گزینه (۲) صحیح است.

۳۵۰ـ گزینه «۴» برای آن که این سری همگرای مطلق باشد، باید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left|\frac{x}{2x+1}\right|^n$ همگرا باشد. می‌دانیم که $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$، بنابراین می‌توانیم از آزمون مقایسه‌ی حدی با سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x}{2x+1}\right|^n$ استفاده کنیم. این سری، هندسی است و شرط همگرایی‌اش این است که $\left|\frac{x}{2x+1}\right| < 1$ باشد.

$$\left|\frac{x}{2x+1}\right| < 1 \Rightarrow |x| < |2x+1|$$



نمودارهای $|2x+1|$ و $y = |x|$ در دو نقطه‌ی $-\frac{1}{3}$ و -1 با هم برخورد می‌کنند. این نقاط از حل معادله‌ی $2x+1 = \pm x$ به دست می‌آیند.

در بازه‌ی $[-1, -\frac{1}{3}]$ داریم $|x| \le |2x+1|$ و در سایر نقاط یعنی $x > -\frac{1}{3}$ و $x < -1$ داریم:

$$|x| < |2x+1|$$

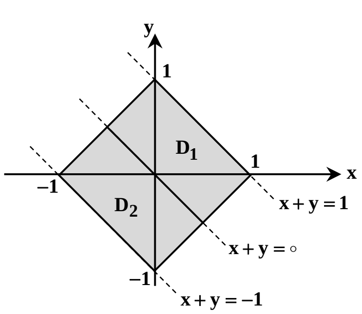
۳۵۱ـ گزینه «۳» برای راحتی بیشتر فرض می‌کنیم $\theta = \frac{\pi - 2}{\pi}$ باشد. با توجه به صورت سؤال داریم:

$$P = z_0 \times z_1 \times z_2 \times \cdots = e^{i\theta^0} \times e^{i\theta^1} \times e^{i\theta^2} \times \cdots \Rightarrow P = e^{i(\theta^0 + \theta^1 + \theta^2 + \cdots)} = e^{i\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n}$$

با توجه به آن که $|\theta| < 1$ است، داریم $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = \frac{1}{1-\theta}$، بنابراین مقدار P به این صورت به دست می‌آید:

$$P = e^{i\frac{1}{1-\theta}} = e^{i\frac{1}{1-\frac{\pi-2}{\pi}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow P = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

۳۵۲ـ گزینه «۲» حاصل جزء صحیح $[x+y]$ بستگی به این دارد که $x+y$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد. خطوط $x+y = m$ را برای اعداد صحیح $m = -1, 0, 1$ در نظر می‌گیریم. ناحیه‌ی انتگرال‌گیری از دو بخش D_1 و D_2 تشکیل شده است که در ناحیه‌ی D_1 داریم $0 \le x+y < 1$؛ پس $[x+y] = 0$ و در ناحیه‌ی D_2 داریم $-1 \le x+y < 0$؛ پس $[x+y] = -1$ است.



$$I = \iint_{D_1}(0)\,dydx + \iint_{D_2}(-1)\,dydx = 0 - \iint_{D_2} dydx = -(D_2 \text{ مساحت})$$

کل ناحیه‌ی انتگرال‌گیری یعنی $D_1 \cup D_2$ یک لوزی با مساحت $2 = \frac{2\times 2}{2}$ است؛ بنابراین مساحت D_2 و لذا $I = -1$ می‌شود.

۳۵۳ـ گزینه «۳» مساحت رویه‌ی S با فرمول $\iint_S d\sigma$ به دست می‌آید. معادله‌ی نیمکره‌ی $\rho = ۲$ را می‌توان به صورت $g(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ نوشت که $z \geq ۰$ است. المان سطح را حساب می‌کنیم:

$$d\sigma = \sqrt{۱ + z_x^۲ + z_y^۲}\,dydx = \sqrt{۱ + (\frac{x}{z})^۲ + (\frac{y}{z})^۲}\,dydx = \sqrt{\frac{x^۲ + y^۲ + z^۲}{z^۲}}\,dydx \Rightarrow d\sigma = \frac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}dydx$$

در مختصات قطبی می‌توان $d\sigma$ را به این صورت نوشت:

$$d\sigma = \frac{۲}{\sqrt{۴ - r^۲}}rdrd\theta$$

اکنون حدود r و θ را تعیین می‌کنیم. ناحیه‌ی موردنظر از برخورد مخروط $\phi = \frac{\pi}{۳}$ با نیمکره‌ی $\rho = ۲$ به دست می‌آید. در مختصات کروی داریم:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \Rightarrow x = ۲\sin\frac{\pi}{۳}\cos\theta = \sqrt{۳}\cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \Rightarrow y = ۲\sin\frac{\pi}{۳}\sin\theta = \sqrt{۳}\sin\theta \end{cases}$$

بنابراین $x^۲ + y^۲ = ۳$ یعنی دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$ به دست می‌آید. در این دایره داریم $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$ و $۰ \leq r \leq \sqrt{۳}$.

$$\text{جواب} = \iint_S d\sigma = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\sqrt{۳}} \frac{۲}{\sqrt{۴ - r^۲}}rdrd\theta \Rightarrow \text{جواب} = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\sqrt{۳}} (۴ - r^۲)^{-\frac{۱}{۲}}۲rdrd\theta = \int_۰^{۲\pi} -۲(۴ - r^۲)^{\frac{۱}{۲}}\Big|_۰^{\sqrt{۳}} d\theta = (۲\pi)(-۲ + ۴) = ۴\pi$$

۳۵۴ـ گزینه «۱» رویه‌ی موردنظر با معادلات پارامتری برحسب متغیرهای r و θ نوشته شده است. جرم این رویه برابر است با: $M = \iint_S \delta(x,y,z)d\sigma$

در این مثال $\delta = ۲\sqrt{x^۲ + y^۲} = ۲r$ است و المان سطح به این صورت محاسبه می‌شود: $d\sigma = |\frac{\partial \overline{f}}{\partial r} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial \theta}|drd\theta$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial r} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & ۰ \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & ۱ \end{vmatrix} = \sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j} + r\vec{k} \Rightarrow d\sigma = \sqrt{\sin^۲\theta + \cos^۲\theta + r^۲}drd\theta \Rightarrow d\sigma = \sqrt{r^۲ + ۱}drd\theta$$

با جایگذاری $d\sigma$ در فرمول جرم داریم:

$$M = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۲r\sqrt{r^۲ + ۱}\,drd\theta \Rightarrow M = \int_۰^{۲\pi} \frac{۲}{۳}(r^۲ + ۱)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^۱ d\theta = \frac{۲}{۳}(۲\pi)(۲^{\frac{۳}{۲}} - ۱) = \frac{۴\pi}{۳}(۲\sqrt{۲} - ۱)$$

۳۵۵ـ گزینه «۱» ابتدا مقدار A را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \int_۰^۱\int_۰^۱ \frac{x^۲ - y^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲}dxdy$$

در انتگرال میانی، y عدد ثابت و x متغیر است. به علت حضور $y^۲ + x^۲$ از تغییر متغیر $x = ytg\theta$ داریم: $dx = y(۱ + tg^۲\theta)d\theta = y\sec^۲\theta d\theta$

پس با حل انتگرال نامعین داریم:

$$\int \frac{x^۲ - y^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲}dx = \int \frac{(y^۲tg^۲\theta - y^۲)}{(y^۲tg^۲\theta)^۲}y\sec^۲\theta d\theta = \int \frac{y^۲(tg^۲\theta - ۱)}{(y^۲\sec^۲\theta)^۲}y\sec^۲\theta d\theta = \int \frac{tg^۲\theta - ۱}{y\sec^۲\theta}d\theta$$

$$= \frac{۱}{y}\int \frac{\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta} - ۱}{\frac{۱}{\cos^۲\theta}}d\theta = \frac{۱}{y}\int(\sin^۲\theta - \cos^۲\theta)d\theta = \frac{۱}{y}\int(-\cos ۲\theta)d\theta = \frac{-۱}{۲y}\sin ۲\theta = -\frac{۱}{y}\sin\theta\cos\theta$$

با توجه به تغییر متغیر $x = ytg\theta$ داریم $tg\theta = \frac{x}{y}$ پس $\frac{۱}{\cos^۲\theta} = \sec^۲\theta = ۱ + tg^۲\theta = ۱ + \frac{x^۲}{y^۲} = \frac{x^۲ + y^۲}{y^۲}$ در نتیجه $\cos^۲\theta = \frac{y^۲}{x^۲ + y^۲}$ و $\sin^۲\theta = ۱ - \cos^۲\theta = \frac{x^۲}{x^۲ + y^۲}$ به این ترتیب جواب انتگرال میانی برابر است با:

$$\int f(x,y)dx = -\frac{۱}{y}\sin\theta\cos\theta = -\frac{۱}{y}\frac{xy}{x^۲ + y^۲} = -\frac{x}{x^۲ + y^۲}$$

به این ترتیب با جایگذاری حدود انتگرال داریم:

$$A = \int_۰^۱\int_۰^۱ f(x,y)dxdy = \int_۰^۱ [-\frac{x}{x^۲ + y^۲}]_۰^۱ dy = -\int_۰^۱ \frac{۱}{۱ + y^۲}dy = -tg^{-۱}(y)\Big|_۰^۱ = -\frac{\pi}{۴}$$

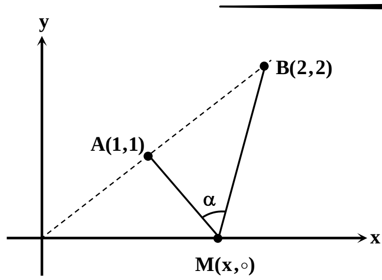
برای محاسبه‌ی B، داریم: $B=\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}dydx$. در انتگرال میانی y متغیر و x ثابت است. از تغییر متغیر $y=xtg\theta$ استفاده می‌کنیم.

با انجام محاسبات قبلی می‌بینیم که:
$$\text{انتگرال میانی}=\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy=\frac{1}{x}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{x}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

حالا با محاسبه‌ی B داریم:
$$B=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx=\int_0^1[\frac{y}{x^2+y^2}]_0^1 dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=[tg^{-1}(x)]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

پس $A=-B$ است.

۳۵۶ـ گزینه «۲» زاویه‌ی مورد نظر را α می‌نامیم.



مختصات نقطه‌ی M را به صورت $M(x,0)$ نشان می‌دهیم.

شیب پاره‌خط BM برابر است با: $m_1=\frac{y_B-y_M}{x_B-x_M}=\frac{2-0}{2-x}$

و شیب پاره‌خط AM برابر است با: $m_2=\frac{y_A-y_M}{x_A-x_M}=\frac{1-0}{1-x}$

اگر α زاویه‌ی بین این دو خط باشد داریم:
$$tg\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{\frac{2}{2-x}-\frac{1}{1-x}}{1+\frac{2}{(2-x)(1-x)}}$$

با ضرب صورت و مخرج در $(2-x)(1-x)$ داریم:
$$tg\alpha=\frac{2(1-x)-(2-x)}{(2-x)(1-x)+2}\Rightarrow tg\alpha=\left|\frac{-x}{x^2-3x+4}\right|=\frac{x}{x^2-3x+4}$$

ما می‌خواهیم بیشترین مقدار α به دست آید. پس باید x را چنان پیدا کنیم که $tg\alpha$ ماکزیمم شود.

ابتدا نقطه‌ی بحرانی کسر را پیدا می‌کنیم. بنابراین با مشتق‌گیری نسبت به x داریم:
$$(\frac{x}{x^2-3x+4})'=\frac{(x^2-3x+4)-(2x-3)(x)}{(x^2-3x+4)^2}=\frac{-x^2+4}{(x^2-3x+4)^2}=0\Rightarrow x=2$$

به ازای $x=2$ مقدار $tg\alpha$ را حساب می‌کنیم:
$$tg\alpha=\frac{x}{x^2-3x+4}=\frac{2}{4-6+4}=\frac{2}{2}=1\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

۳۵۷ـ گزینه «۴» طبق تعریف مشتق داریم:
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|^x-a}{x}$$

شرط لازم (نه کافی) برای وجود $f'(0)$، آن است که f در $x=0$ پیوسته باشد. بنابراین باید داشته باشیم:
$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)\Rightarrow a=\lim_{x\to0}|x|^x=\lim_{x\to0}e^{xLn|x|}$$

می‌دانیم که $\lim_{x\to0}xLn|x|=0$ است. برای محاسبه‌ی این حد از سمت راست داریم:
$$\lim_{x\to0^+}xLnx=\lim_{x\to0^+}\frac{Lnx}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0$$

از سمت چپ نیز، به صورت مشابه مقدار حد $xLn|x|$ برابر با صفر می‌شود پس داریم:
$$a=\lim_{x\to0}e^{xLn|x|}=e^0=1$$

حالا با استفاده از تعریف مشتق داریم:
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{xLn|x|}-1}{x}$$

از هم‌ارزی $e^u\simeq1+u$ استفاده می‌کنیم:
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{1+xLn|x|-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{xLn|x|}{x}=\lim_{x\to0}Ln|x|=Ln(0^+)=-\infty$$

پس به ازای هیچ مقداری از a، مقدار $f'(0)$ عددی حقیقی نمی‌شود. پس گزینه (۴) صحیح است.

۳۵۸ـ گزینه «۱» اگر $\lim_{x\to\infty} x_n$ موجود و برابر با L باشد، آنگاه حد دنباله‌ی $S_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ هم موجود و برابر با L است. اما عکس این مطلب درست نیست. یعنی اگر $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ موجود باشد، ممکن است $\lim_{n\to\infty} x_n$ موجود باشد یا نباشد.

مثلاً برای دنباله‌ی $x_n = (-1)^n$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1+1-1+\cdots+(-1)^n}{n} = \frac{\text{کران‌دار}}{\infty} = 0$$

در حالی‌که $\lim_{n\to\infty} x_n$ وجود ندارد.

۳۵۹ـ گزینه «۴» با توجه به توضیحات صورت سؤال، حاصل انتگرال $\int_x^{xy} f(t)\,dt$ مستقل از x است، پس می‌توان آن را به صورت $g(y)$ نشان داد:

$$g(y) = \int_x^{xy} f(t)\,dt$$

با مشتق‌گیری نسبت به x داریم:

$$0 = yf(xy) - f(x) \Rightarrow f(x) = yf(xy)$$

به ازای $x = 2$ داریم $f(2) = 2$ و با جایگذاری در معادله‌ی فوق خواهیم داشت:

$$f(2) = yf(2y) \Rightarrow 2 = yf(2y) \Rightarrow f(2y) = \frac{2}{y}$$

با فرض $t = 2y$ خواهیم داشت:

$$f(t) = \frac{2}{\frac{1}{2}t} = \frac{4}{t}$$

پس ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(t) = \frac{4}{t}$ است.

حالا می‌توانیم $A(x)$ را برای $x > 0$ محاسبه کنیم:

$$A(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{4}{t}dt = [4\text{Ln}t]_1^x = 4\text{Ln}x$$

۳۶۰ـ گزینه «۲» از فرمول گاوس داریم $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ پس، سری داده شده به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n(n+1)}$ نوشته می‌شود.

با تجزیه‌ی کسرها داریم: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$ که $A = \frac{1}{n+1}\Big|_{n=0} = 1$ و $B = \frac{1}{n}\Big|_{n=-1} = -1$ به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\text{حاصل سری} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)(-1)^n = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

برای محاسبه‌ی مقدار این سری‌ها با استفاده از بسط مک‌لورن $\text{Ln}(1+x)$ داریم: $\text{Ln}(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ به ازای $x = 1$ داریم:

$$\text{Ln}2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

حالا می‌توانیم مقدار سری را حساب کنیم:

$$\text{حاصل سری} = 2\left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - + \cdots\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - + \cdots\right) = 2(-\text{Ln}2) + 2(-\text{Ln}2 + 1) = 2 - 4\text{Ln}2$$

۳۶۱ـ گزینه «۱»

روش اول: از تغییر متغیر $t = \text{Ln}x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $x = e^t$ و $dx = e^t dt$ است. وقتی $x \to \infty$ داریم $t \to \infty$ و به ازای $x = 1$ داریم $t = 0$.

$$I = \int_1^{\infty}\frac{(\text{Ln}x)^n}{x^2}dx = \int_0^{\infty}\frac{t^n}{e^{2t}}e^t dt = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

طبق فرمول تابع گاما داریم:

$$I = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \Gamma(n+1) = n!$$

روش دوم: در صورتی‌که فرمول تابع گاما را به خاطر نداشته باشید، می‌توانید مسأله را به ازای $n = 3$ به روش جدول حل کنید:

t^3	e^{-t}
$3t^2$	$-e^{-t}$
$6t$	e^{-t}
6	$-e^{-t}$
0	e^{-t}

$$I = \int_0^{\infty} t^3 e^{-t} dt \Rightarrow I = e^{-t}(-t^3 - 3t^2 - 6t - 6)\Big|_0^{\infty} = 6 = 3!$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

روش سوم: می‌توانید $n = 1$ قرار داده و حاصل انتگرال $I = \int_1^{\infty}\frac{\text{Ln}x}{x^2}dx$ را به روش جزء به جزء با فرض $v = \text{Ln}x$ و $dv = \frac{dx}{x^2}$ حل کنید که جواب $I = 1$ می‌شود که فقط گزینه (۱) این شرایط را دارد.

۳۶۲ـ گزینه «۲» مقدار $\text{Ln}1$ برابر با صفر است. در بازه‌ی $0<x<1$ داریم $\frac{\text{Ln}x}{1+x^2}<0$ و در بازه‌ی $1<x<\infty$ داریم $\frac{\text{Ln}x}{1+x^2}>0$.

با جدا کردن این دو بخش داریم:

$$I=\underbrace{\int_0^1\frac{\text{Ln}x}{1+x^2}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^\infty\frac{\text{Ln}x}{1+x^2}dx}_{I_2}$$

در انتگرال I_1 با تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$ داریم: $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. در $x=1$ داریم $t=1$ و وقتی $x\to 0^+$ داریم $t\to+\infty$.

$$I_1=\int_\infty^1\frac{\text{Ln}\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}\left(\frac{-1}{t^2}dt\right)=-\int_\infty^1\frac{-\text{Ln}t}{t^2(1+\frac{1}{t^2})}dt=\int_\infty^1\frac{\text{Ln}t}{t^2+1}dt=-\int_1^\infty\frac{\text{Ln}t}{t^2+1}dt=-I_2$$

پس I_1 و I_2 قرینه‌ی هم هستند. در نتیجه داریم:

$$I=I_1+I_2=-I_2+I_2=0$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۶۳ـ گزینه «۴» طبق متن درس اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی نباشند، طبق یک اتحاد داریم: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$ بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

از همین‌جا غلط بودن گزینه‌ی (۴) معلوم می‌شود زیرا این اتحاد نیازی به شرط عمود بودن $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ندارد.

حاصل‌ضرب خارجی بردارها، دارای خاصیت شرکت‌پذیری است یعنی اگر آن‌ها را جابه‌جا نکنید، با تغییر محل پرانتز، حاصل آن تغییری نمی‌کند:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$$

پس گزینه (۳) هم صحیح است.

برای بررسی گزینه‌ی (۲) دقت کنید که:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}$$

و $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}$ حالا از تساوی $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ داریم $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$ در نتیجه:

$$\vec{a}.\vec{a}+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{a}-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

گزینه‌ی (۲) هم صحیح است.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۶۴ـ گزینه «۳» بردار گرادیان رویه را حساب می‌کنیم:

$$f(x,y,z)=xyz=1$$
$$\Rightarrow\ \vec{\nabla}f=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}+f_z\vec{k}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$$

پس در نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) داریم.

$$\vec{\nabla}f=y_0z_0\vec{i}+x_0z_0\vec{j}+x_0y_0\vec{k}$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه را می‌نویسیم:

$$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0\Rightarrow y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3x_0y_0z_0$$

طبق فرمول متن درس، حجم چهاروجهیِ به‌وجود آمده توسط صفحه‌ی $ax+by+cz=d$ در $\frac{1}{8}$ اول برابر با $V=\frac{1}{6}\frac{d^3}{abc}$ است. بنابراین در مورد این صفحه داریم:

$$V=\frac{1}{6}\frac{(3x_0y_0z_0)^3}{(y_0z_0)(x_0z_0)(x_0y_0)}=\frac{9}{2}x_0y_0z_0$$

اکنون توجه کنیدکه طبق معادله‌ی رویه داریم $x_0y_0z_0=1$ پس $V=\frac{9}{2}$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۶۵ـ گزینه «۱» سطح S قسمتی از پوسته‌ی یک استوانه است که در $\frac{1}{8}$ اول قرار گرفته است. این سطح بسته نیست و معادله‌ی آن به صورت $g=x^2+y^2-16=0$ است. $\vec{n}ds=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{i}|}$ این رویه را نمی‌توان به صورت $z=g(x,y)$ نوشت پس، تصویر آن بر صفحه‌ی xoy نمی‌افتد. ما صفحه‌ی yoz را به عنوان صفحه‌ی تصویر انتخاب می‌کنیم. پس داریم:

$$\vec{n}ds=\pm\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{i}|}dA=\pm\frac{(2x,2y,0)}{|2x|}dA=\pm\frac{1}{x}(x,y,0)dA$$

با توجه به آن‌که شار رو به خارج S است، علامت مثبت را انتخاب می‌کنیم:

$$\vec{n}ds=\frac{1}{x}(x,y,0)$$

با محاسبه‌ی ضرب داخلی داریم:

$$\vec{F}.\vec{n}\,ds=\frac{1}{x}(xz+xy)dA=(z+y)dA$$

پس داریم:

$$I=\iint_S\vec{F}.\vec{n}\,ds=\iint_D(z+y)dA=\iint_D(z+y)dy\,dz$$

حدود z در صورت سؤال داده شده است: $0\le z\le 5$.

برای تعیین حدود y به معادله‌ی $x^2+y^2=16$ و شرط $x\ge0$، $y\ge0$ توجه می‌کنیم. در ربع اول داریم $0\le y\le 4$.

$$I=\int_0^5\int_0^4(z+y)dy\,dz=\int_0^5\left(zy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^4dz=\int_0^5(4z+8)dz=(2z^2+8z)\Big|_0^5=90$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۶۶ـ گزینه «۲» با برخورد دادن رویه‌ی $2x^2+2y^2+z^2=1$ و صفحه‌ی $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ به رابطه‌ی $2x^2+2y^2=\frac{1}{2}$ می‌رسیم یعنی $x^2+y^2=\frac{1}{4}$. به عبارتی مرز S دایره‌ی $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ در ارتفاع $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ است.

اگر S' را ناحیه‌ی مسطح داخل این دایره بگیریم، S' بخشی از صفحه‌ی $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ است پس بردار قائم بر آن $\vec{n}=\vec{k}$ خواهد بود.

در نتیجه داریم: $(\vec{\nabla}\times\vec{F}).\vec{n}=\text{curl}\vec{F}.\vec{k}=Q_x-P_y=3-(-3)=6$

با استفاده از قضیه‌ی استوکس داریم: $I=\iint_S \text{curl}\vec{F}.\vec{n}\,ds=\iint_{S'}\text{curl}\,\vec{F}.\vec{n}\,ds=\iint_{S'}6ds=6\times(S'\ \text{مساحت})=6\times\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$

۳۶۷ـ گزینه «۳» از معادله‌ی $x^3+y^3=3xy$ داریم: $\frac{x^3}{xy}+\frac{y^3}{xy}=3 \Rightarrow \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=3 \Rightarrow (\frac{x}{\sqrt{y}})^2+(\frac{y}{\sqrt{x}})^2=3$

در این معادله $x\ge 0$ و $y\ge 0$ است.

با فرض $u=\frac{x}{\sqrt{y}}$ و $v=\frac{y}{\sqrt{x}}$ خواهیم داشت: $u^2+v^2=3$. البته $u\ge 0$ و $v\ge 0$ پس ربع اول از دایره‌ی $u^2+v^2=3$ به دست می‌آید.

ژاکوبی دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xy}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{y}} & -\frac{x}{2y^{\frac{3}{2}}}\\ -\frac{y}{2x^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{x}}\end{vmatrix}=\frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}}-\frac{xy}{4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{xy}}-\frac{1}{4\sqrt{xy}}=\frac{3}{4\sqrt{xy}}=\frac{3}{4uv}\Rightarrow J_{uv}=\frac{1}{J_{xy}}=\frac{4uv}{3}$$

در ربع اول از دایره‌ی $u^2+v^2=3$ خواهیم داشت: $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le r\le\sqrt{3}$:

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{3}}$$

$$S_1=\iint_D dydx=\iint_D\frac{4uv}{3}dvdu=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{3}}(r\cos\theta)(r\sin\theta)rdrd\theta=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{3}}r^3\frac{\sin2\theta}{2}drd\theta=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2\theta}{2}[\frac{r^4}{4}]_0^{\sqrt{3}}\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta(\frac{9}{4})d\theta=\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}\times(\frac{-\cos2\theta}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}\times1=\frac{3}{2}$$

روش دوم: معادله را از روی بحث انتگرال روی خط هم می‌توان به شکل زیر حل نمود:

برای ساده‌تر شدن کار ، مسئله را در حالت پارامتری حل می‌کنیم و به همین دلیل از تغییر متغیر $y=tx$ استفاده می‌کنیم.

اگر از دو طرف تساوی فوق مشتق بگیریم داریم: $y=tx \Rightarrow dy=tdx+xdt$

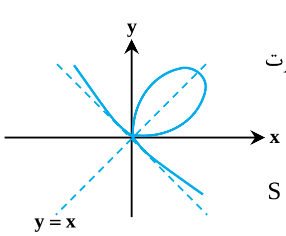
اگر S مساحت ناحیه محصور به خم بسته‌ی C باشد که در جهت مثلثاتی پیموده شده است، آنگاه مساحت برابر است با قدر مطلق هریک از انتگرال‌های زیر:

$1)S=\oint_C -y\,dx$　　$2)S=\oint_C x\,dy$　　$3)S=\frac{1}{2}\oint_C -y\,dx+x\,dy$

اکنون با استفاده از فرمول شماره (۳) حاصل مساحت را به‌دست می‌آوریم: $xdy-ydx=x(tdx+xdt)-txdx=xtdx+x^2dt-xtdx=x^2dt$

همچنین با توجه به این‌که $y=tx$ می‌باشد، این رابطه را در معادله‌ی اولیه‌ی منحنی قرار می‌دهیم تا از روی آن بتوانیم x و y را برحسب t به‌دست آوریم.

$$x^3+y^3=3xy \Rightarrow x^3+t^3x^3=3x(tx)\Rightarrow x^3(1+t^3)=3tx^2\Rightarrow x=\frac{3t}{1+t^3}\ ,\ y=\frac{3t^2}{1+t^3}$$



توجه داشته باشید که منحنی داده شده موسوم به منحنی فولیوم دکارت است که نمودار آن به‌صورت مقابل است.

به ازای $t=0$ نقطه $(0,0)$ را داریم و همچنین اگر $t\to+\infty$ با توجه به مقادیر x و y به‌دست آمده هم x و هم y به‌صورت حدی به صفر میل می‌کنند پس حدود t وقتی نقطه (x,y) برابر $(0,0)$ می‌باشد به‌صورت $0\le t<+\infty$ می‌باشد و داریم:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^2dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\frac{3t}{1+t^3})^2dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{9t^2}{(1+t^3)^2}dt=\frac{9}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt\xrightarrow[3t^2dt=du]{1+t^3=u}\frac{9}{6}\int\frac{du}{u^2}$$

$$=\frac{3}{2}\int u^{-2}du=\frac{3}{2}(\frac{u^{-1}}{-1})=-\frac{3}{2}(\frac{1}{u})=-\frac{3}{2}(\frac{1}{1+t^3})_0^{+\infty}=-\frac{3}{2}(0-1)=\frac{3}{2}$$

۳۶۸ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم $\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t,f(t))$ معادله‌ی پارامتری یک منحنی مسطح باشد. در این صورت این منحنی در یک صفحه قرار دارد. پس اعداد ثابت a، b، c و d وجود دارند چنان‌که $ax+by+cz=d \Rightarrow a\cos t+b\sin t+cf(t)=d$

از این معادله داریم: $f(t)=\frac{-1}{c}(a\cos t+b\sin t-d)$

با فرض $A=-\frac{a}{c}$، $B=-\frac{b}{c}$ و $C=-\frac{d}{c}$ خواهیم داشت: $f(t)=A\cos t+B\sin t+C$. بنابراین گزینه‌ی (۱) نتیجه‌ی مسطح بودن منحنی $\vec{r}(t)$ است.

طبق صورت سؤال $f(t)$ تابع ثابت نیست پس A و B نمی‌توانند هر دو با هم صفر باشند. پس a و b هر دو با هم نمی‌توانند صفر باشند. در نتیجه معادله‌ی صفحه‌ی دربرگیرنده‌ی منحنیِ $\vec{r}(t)$ به صورت $ax+by+cz=d$ است که $a\neq 0$ یا $b\neq 0$. بردار نرمال این صفحه به شکل $\vec{n}=(a,b,c)$ است و چون a و b صفر نیستند، این صفحه، موازی هیچ‌کدام از محورهای مختصات نیست.

در مورد گزینه‌ی (۳) توجه کنید که اگر $f(0)=0$ باشد، داریم $f(0)=A\cos(0)+B\sin(0)+C \Rightarrow A+C=0$ پس $C=-A$ است؛ یعنی معادله‌ی صفحه‌ی مورد نظر به شکل $ax+by-az=d$ نوشته می‌شود. این صفحه ممکن است از مبدأ مختصات عبور کند یا از آن عبور نکند. بستگی به آن دارد که $d=0$ یا $d\neq 0$ باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۶۹ـ گزینه «۲» بردار نرمال صفحه‌ی $P_1: x+2y+2z=0$ به صورت $\vec{n}_1=(1,2,2)$ است. بردار نرمال صفحه‌ی $P_2: 2x+y-2z+5=0$ به صورت $\vec{n}_2=(2,1,-2)$ است. صفحه‌ی مورد نظر ما بر هر دو صفحه‌ی P_1 و P_2 عمود است پس، بردار نرمال آن باید بر $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ عمود باشد. پس داریم $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-6\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}=(-6,6,-3)$$

حالا می‌توانیم معادله‌ی این صفحه را بنویسیم: $-6(x-0)+6(y-0)-3(z-0)=0 \Rightarrow 2x-2y+z=0$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۷۰ـ گزینه «۲»

روش اول: تابع $f(x)=\sin x$ را در نظر بگیرید. طبق فرمول تقریب توابع یک متغیره داریم: $(h=\Delta x)$

$$f(x+h)\simeq f(x)+hf'(x) \Rightarrow \sin(x+h)\simeq \sin x+h\cos x$$

خطای این تقریب حداکثر برابر است با $|\frac{f''(c)}{2!}h^2|$. به عبارتی داریم:

$$|\sin(x+h)-\sin x-h\cos x|\le|\frac{f''(c)}{2!}h^2|=|\frac{-\sin(c)}{2!}h^2|\le\frac{h^2}{2}$$

روش دوم: با استفاده از فرمول کلی تقریب خطی که به‌صورت زیر می‌باشد، به این سؤال پاسخ می‌دهیم.

$$f(x_0+\Delta x)\simeq f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+f''(x_0)\frac{(\Delta x)^2}{2!}+\dots+f^{(n)}(x_0)\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

و اگر f تابعی مشتق‌پذیر و دارای مشتق مرتبه دوم باشد و α نقطه‌ای بین x_0 و $x_0+\Delta x$ باشد، در این صورت داریم:

$$|\Delta y-dy|=|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x|\le f''(\alpha)\frac{(\Delta x)^2}{2!}$$

که در این مثال چون $f''(x)=-\sin x$ می‌باشد به ازای α داریم: $f''(\alpha)=-\sin\alpha \Rightarrow |-\sin\alpha|\le 1$

اگر کوچکترین کران بالای تابع $f''(\alpha)$ را که در این‌جا عدد ۱ می‌باشد k بنامیم، همواره رابطه‌ی $|\Delta y-dy|\le\frac{k}{2}(\Delta x)^2$ برقرار می‌باشد، پس داریم:

$$|\sin(x+h)-(\sin x+h\cos x)|\le\frac{1}{2}(h)^2=\frac{h^2}{2}$$

توجه داشته باشید که در این مثال h به‌جای Δx و x به‌جای x_0 قرار گرفته است.

همچنین توجه داشته باشید که فرمول کلی تقریب خطی همان بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه‌ی x_0 می‌باشد، که در این فرمول $x-x_0$ را مساوی Δx درنظر می‌گیریم و درواقع داریم: $\Delta x=x-x_0 \Rightarrow x=x_0+\Delta x$

بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه‌ی x_0:

$$f(x)\simeq f(x_0)+f'(x_0)\frac{(x-x_0)^1}{1!}+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\dots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

حال اگر به‌جای $x-x_0$ قرار دهیم Δx، فرمول کلی تقریب خطی به‌دست می‌آید.

$$f(x_0+\Delta x)\simeq f(x_0)+f'(x_0)\frac{(\Delta x)^1}{1!}+f''(x_0)\frac{(\Delta x)^2}{2!}+\dots+f^{(n)}(x_0)\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۷۱ـ گزینه «۴» طبق صورت سؤال تابع چگالی در هر نقطه از نیم‌کره برابر با فاصله‌ی آن نقطه تا مبدأ است در نتیجه:

$$\sigma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\qquad z\ge 0$$

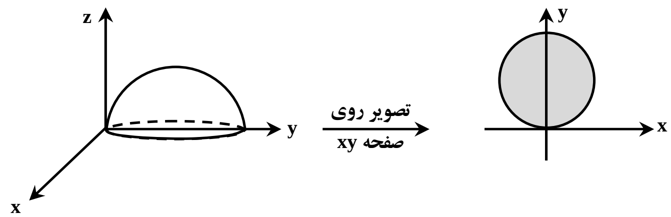
بنابراین جرم نیمکره برابر است با:

$$m=\iiint_R \sigma(x,y,z)dv=\iiint_R \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$$

برای حل انتگرال فوق از تغییر متغیر کروی استفاده می‌کنیم، برای یافتن کران‌های انتگرال در مختصات کروی داریم:

$$x^2+y^2+z^2=2ay \Rightarrow \rho^2=2\rho a\sin\phi\sin\theta \Rightarrow \rho=2a\sin\phi\sin\theta$$

از معادله‌ی کره معلوم است که $y\ge 0$ بنابراین، تصویر آن در صفحه‌ی xy در ناحیه‌ی $y\ge 0$ قرار می‌گیرد پس $0\le\theta\le\pi$. همچنین در این نیم‌کره داریم $z>0$ پس $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$.



$$\Rightarrow\begin{cases}0\le\rho\le 2a\sin\phi\sin\theta\\ 0\le\theta\le\pi\\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\rho\sin\phi\sin\theta}\rho\times\rho^2\sin\phi\, d\rho d\theta d\phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{2a\sin\phi\sin\theta}\sin\phi\, d\theta d\phi \Rightarrow m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}4a^4\sin^5\phi\sin^4\theta\, d\theta d\phi$$

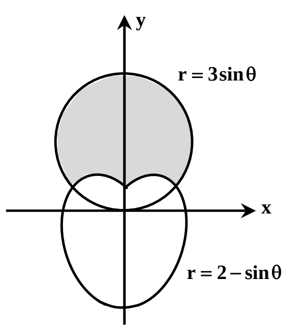
$$=4a^4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^4\theta\, d\theta\right)$$

برای حل هر دو انتگرال از فرمول $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2n-1}(\cos t)^{2m-1}dt=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(n+m)}$ استفاده می‌کنیم.

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\phi\, d\phi=\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(3+\frac{1}{2})}=\frac{2!\sqrt{\pi}}{2\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}=\frac{8}{15}$$

$$I_2=\int_0^{\pi}\sin^4\theta\, d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(\theta+\frac{\pi}{2})d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta=2\times\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{5}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}{2!}=\frac{6}{16}\pi \Rightarrow m=4a^4\times\frac{4}{15}\times\frac{6}{16}\pi=\frac{4\pi a^4}{5}$$

۳۷۲ـ گزینه «۴» ناحیه‌ی موردنظر به صورت مقابل است:



مساحت بین دو تابع f و g در مختصات قطبی برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(f^2(\theta)-g^2(\theta))d\theta$$

برای یافتن نقطه تلاقی دو منحنی داریم:

$$r_1=r_2\Rightarrow 3\sin\theta=2-\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta_1=\frac{\pi}{6},\ \theta_2=\frac{5\pi}{6}$$

با جایگذاری منحنی‌های قطبی $f(\theta)$ و $g(\theta)$ و حدود θ در رابطه انتگرال داریم:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}((3\sin\theta)^2-(2-\sin\theta)^2)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(-4+4\sin\theta+8\sin^2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(-4+4\sin\theta+\frac{8(1-\cos 2\theta)}{2})d\theta$$

$$\Rightarrow S=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(\sin\theta-\cos 2\theta)\,d\theta=2(-\frac{1}{2}\sin 2\theta-\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=2+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

۳۷۳ـ گزینه «۳» می‌دانیم که حجم ناحیه از فرمول $V=\iiint_D dzdydx$ به‌دست می‌آید. حدود z در صورت سؤال مشخص هستند. صفحات $z=۰$ و $z=۲$ حدود z را می‌دهند. همچنین از معادله‌ی مخروط داریم $z=\sqrt{x^۲+y^۲-۱}$ یعنی $z=\sqrt{r^۲-۱}$. حالا باید ببینیم از بین این ۳ معادله که برای z داریم کدام‌ها حدود z را مشخص می‌کنند.

از برخورد صفحات $z=۰$ و $z=۲$ با معادله‌ی مخروط دایره‌های $x^۲+y^۲=۱$ و $x^۲+y^۲=۵$ به‌دست می‌آیند:

$$z=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲-۰=۱ \Rightarrow r^۲=۱ \Rightarrow r=۱$$
$$z=۲ \Rightarrow x^۲+y^۲-۴=۱ \Rightarrow r^۲=۵ \Rightarrow r=\sqrt{۵}$$

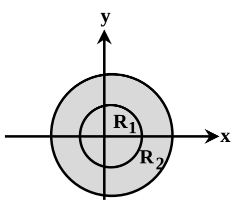
ناحیه‌ی درون دایره‌ی $r=۱$ را $R_۱$ و ناحیه‌ی بین $r=۱$ و $r=\sqrt{۵}$ را $R_۲$ می‌نامیم.

در ناحیه‌ی $R_۱$ داریم $۰\le z\le ۲$. در واقع در این ناحیه استوانه‌ای به شعاع $r=۱$ و ارتفاع $z=۲$ داریم.

با استفاده از حجم استوانه داریم: $V_۱=\pi r^۲h=\pi\times۱\times۲=۲\pi$

روی ناحیه‌ی $R_۲$ داریم $\sqrt{x^۲+y^۲-۱}\le z\le ۲$ به عبارتی $\sqrt{r^۲-۱}\le z\le ۲$.

بنابراین روی ناحیه‌ی $R_۲$ مقدار حجم به این صورت به‌دست می‌آید:

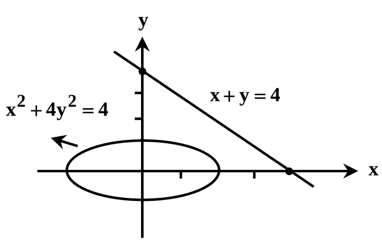


$$V_۲=\int_۰^{۲\pi}\int_۱^{\sqrt{۵}}\int_{\sqrt{r^۲-۱}}^{۲} rdzdrd\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۱^{\sqrt{۵}}(۲-\sqrt{r^۲-۱})r\,drd\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۱^{\sqrt{۵}}(۲r-r\sqrt{r^۲-۱})dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow V_۲=\int_۰^{۲\pi}(r^۲-\frac{۲}{۳}(r^۲-۱)^{\frac{۳}{۲}})\Big|_۱^{\sqrt{۵}}d\theta=۲\pi\times((۵-\frac{۲}{۳}\times۸)-۱)=\frac{۸\pi}{۳}$$

بنابراین حجم کل V برابر است با: $V=V_۱+V_۲=۲\pi+\frac{۸\pi}{۳}=\frac{۱۴\pi}{۳}$

۳۷۴ـ گزینه «۱» منظور تست بیشترین فاصله‌ی صفحه‌ی $x+y=۴$ از رویه $x^۲+۴y^۲=۴$ بوده است. با توجه به وجود نداشتن متغیر z در مسأله کافی است که بیشترین فاصله‌ی خط $x+y=۴$ از بیضی $x^۲+۴y^۲=۴$ را بیابیم.



فرض می‌کنیم که نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ با شرط $x_۰,y_۰\ge۰$ بر روی بیضی فوق قرار دارد، فاصله‌ی نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ از خط $x+y-۴=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|x_۰+y_۰-۴|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{|۴-۲\sqrt{۱-y_۰^۲}-y_۰|}{\sqrt{۲}}$$

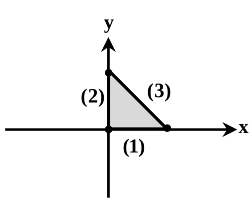
ضابطه‌ی d را بدون قدرمطلق در نظر بگیرید. برای یافتن بیشترین فاصله باید $d'=۰$ باشد، لذا:

$$d'=۰ \Rightarrow -۲\times\frac{-۲y_۰}{۲\sqrt{۱-y_۰^۲}}-۱=۰ \Rightarrow \frac{۲y_۰}{\sqrt{۱-y_۰^۲}}=۱ \Rightarrow ۴y_۰^۲=۱-y_۰^۲ \Rightarrow ۵y_۰^۲=۱ \Rightarrow y_۰^۲=\frac{۱}{۵}\ ,\ y_۰=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

با جایگذاری این مقدار در رابطه داریم:

$$d=\frac{|۴-۲\times\sqrt{۱-\frac{۱}{۵}}-\frac{\sqrt{۵}}{۵}|}{\sqrt{۲}}=\frac{۴-۲\times\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}-\frac{\sqrt{۵}}{۵}}{\sqrt{۲}}=\frac{۴-\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}$$

۳۷۵ـ گزینه «۴» مثلث موردنظر به صورت زیر می‌باشد:



$(۱)\to y=۰$
$(۲)\to x=۰$
$(۳)\to x+y=۱$

ابتدا مقدار تابع بر روی هر یک از این مرزها را بررسی می‌کنیم: برای مرزهای (۱) و (۲) $\Rightarrow f(x,y)=۰$

برای مرز (۳) داریم: $x+y=۱ \Rightarrow x=۱-y \Rightarrow f(y)=(۱-y)y(۱-۱+y-y) \Rightarrow f(y)=۰$

حال باید مقدار تابع در نقاط اکسترمم درون مرز را بیابیم که برای این منظور باید $f_x=۰$ و $f_y=۰$ قرار دهیم:

$$f(x,y)=xy-x^۲y-xy^۲ \Rightarrow \begin{cases}f_x=۰\\ f_y=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y(۱-۲x-y)=۰\\ x(۱-۲y-x)=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=۰ \Rightarrow y=۰,۱\\ y=۰ \Rightarrow x=۰,۱\end{cases} \Rightarrow (۰,۰),(۰,۱),(۱,۰)$$

این سه نقطه روی مرز هستند و مقدار تابع برای هر یک از آن‌ها برابر با صفر است. $\Rightarrow f(۰,۰)=f(۱,۰)=f(۰,۱)=۰$

نقطه اکسترمم دیگر برابر است با:

$$\begin{cases}۱-۲x-y=۰\\ ۱-۲y-x=۰\end{cases} \Rightarrow y=\frac{۱}{۳},x=\frac{۱}{۳} \Rightarrow f(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}(۱-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۲۷}$$

بنابراین ماکزیمم و مینیمم مقادیر فوق عبارتند از: $f_{min}=۰\ ,\ f_{max}=\frac{۱}{۲۷}$

۳۷۶ـ گزینه «۱» هزینه هر مترمربع ساخت برای استوانه را b در نظر می‌گیریم. لذا هزینه ساخت کل برابر است با:

هزینه کل = مساحت جانبی استوانه $\times b +$ مساحت جانبی مخروط $\times 2b$

مساحت جانبی استوانه و مخروط برابر است با:

مساحت جانبی استوانه $= 2\pi ah$

مساحت جانبی مخروط $= \frac{1}{2}\times 2\pi a \times \sqrt{a^2+h'^2} = \pi a\sqrt{a^2+h'^2}$

بنابراین کل هزینه ساخت برابر است با:

هزینه کل: $f = 2\pi ahb + \pi a\sqrt{a^2+h'^2}\times 2b = 2\pi ab(h+\sqrt{a^2+h'^2}) \qquad (*)$

از طرفی با توجه به اینکه حجم کل ثابت است داریم:

حجم کل = حجم استوانه + حجم مخروط

$$V = \pi a^2 h + \frac{1}{3}\pi a^2 h' \Rightarrow h = \frac{V}{\pi a^2} - \frac{h'}{3} \qquad (**)$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در رابطه (*) داریم:

هزینه کل: $f = 2\pi ab(\frac{V}{\pi a^2} - \frac{h'}{3} + \sqrt{a^2+h'^2})$

برای داشتن کمترین هزینه کافی است مشتق عبارت فوق نسبت به h' را برابر صفر قرار دهیم.

$$\frac{\partial f}{\partial h'} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} + \frac{h'}{\sqrt{a^2+h'^2}} = 0 \Rightarrow 3h' = \sqrt{a^2+h'^2} \Rightarrow a^2+h'^2 = 9h'^2 \Rightarrow a^2 = 8h'^2 \Rightarrow h' = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

با جایگذاری مقدار فوق در رابطه‌ی (**) داریم:

$$h = \frac{V}{\pi a^2} - \frac{a\sqrt{2}}{12}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۷۷ـ گزینه «۴» از آنجایی که صفحه بر رویه داده شده مماس است، بردار نرمال آن برابر است با:

$$f: x^2 - y^2 + 3z = 0 \Rightarrow \vec{n} = \vec{\nabla} f = (2x, -2y, 3)$$

با فرض اینکه صفحه موردنظر در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) بر رویه مماس باشد داریم:

$\vec{n} = (2x_0, -2y_0, 3) \Rightarrow$ معادله‌ی صفحه مماس: $2x_0(x-0) - 2y_0(y-0) + 3(z-1) = 0 \Rightarrow 2x_0 x - 2y_0 y + 3z - 3 = 0$

با توجه به اینکه صفحه موازی خط است بنابراین بردار نرمال صفحه بر بردار هادی خط عمود است، لذا:

$$\vec{u}.\vec{n} = 0 \Rightarrow (2,1,-2).(2x_0, -2y_0, 3) = 0 \Rightarrow 4x_0 - 2y_0 - 6 = 0 \Rightarrow y_0 = 2x_0 - 3 \qquad (*)$$

از طرفی نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) در هر دو معادله صفحه مماس و رویه صدق می‌کند، لذا:

$$\begin{cases} x_0^2 - y_0^2 + 3z_0 = 0 \\ 2x_0^2 - 2y_0^2 + 3z_0 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 - y_0^2 - 3 = 0$$

با جایگذاری رابطه‌ی (*) در رابطه‌ی فوق داریم:

$$x_0^2 - (2x_0 - 3)^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_0^2 - 4x_0^2 + 12x_0 - 9 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow -3x_0^2 + 12x_0 - 12 = 0 \Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Rightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$$

$$\xrightarrow{y_0 = 2x_0 - 3} y_0 = 2\times 2 - 3 = +1 \quad , \quad x_0^2 - y_0^2 + 3z_0 = 0 \xrightarrow[y_0 = +1]{x_0 = 2} 4 - 1 + 3z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = -1$$

بنابراین معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه و موازی خط برابر است با:

$$2\times 2x - 2\times 1\times y + 3z - 3 = 0 \Rightarrow 4x - 2y + 3z - 3 = 0$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۷۸ـ گزینه «۲» مشتق تابع معکوس برابر است با:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$

و مشتق دوم تابع معکوس از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$(f^{-1}(y))'' = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$

با مشتق‌گیری از تابع انتگرالی داده شده داریم:

$$f(x) = \int_0^x (1+t^3)^{-\frac{1}{2}} dt \Rightarrow f'(x) = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

بنابراین $f''(x)$ برابر است با:

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

با جایگذاری $f'(x)$ و $f''(x)$ داریم:

$$(f^{-1}(y))'' = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)} = -\frac{-\frac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}}{(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}x^2$$

از طرفی با توجه به اینکه $f^{-1}(y) = x$ می‌باشد داریم:

$$(f^{-1}(y))'' = \frac{3}{2}f^{-1}(y)^2$$

با مقایسه با صورت تست معلوم می‌شود که:

$$c = \frac{3}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۷۹ـ گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: با استفاده از تغییر متغیر $x=\operatorname{tg}\theta$ داریم:

$$dx=(1+\operatorname{tg}^2\theta)d\theta=\sec^2\theta d\theta$$

با توجه به حدود x که $0\le x\le 1$ می‌باشد داریم:

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$

پس داریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\operatorname{tg}^2\theta)\,d\theta}{(\operatorname{tg}\theta+1)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}{\operatorname{tg}\theta+1}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

با توجه به این‌که $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)$ می‌باشد، داریم:

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}\xrightarrow[-d\theta=dt]{\frac{\pi}{4}-\theta=t}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{dt}{\sec t}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\sec t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Ln}|\sec t+\operatorname{tg}t|)_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{Ln}(\sqrt{2}+1))$$

توجه داشته باشید که $\int\frac{du}{\sec u}=\operatorname{Ln}|\sec u+\operatorname{tg}u|+c$ می‌باشد.

روش دوم: برای حل انتگرال‌هایی که به فرم $\int\frac{dx}{(ax+b)\sqrt{mx^2+nx+k}}$ می‌باشند، می‌توانیم از تغییر متغیر $ax+b=\frac{1}{t}$ استفاده کنیم و سپس انتگرال داده شده را برحسب متغیر t بنویسیم. پس با استفاده از تغییر متغیر $x+1=\frac{1}{t}$ داریم:

$$x=\frac{1}{t}-1\quad,\quad dx=-\frac{1}{t^2}dx\quad,\quad\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=\frac{1}{2}\end{cases}$$

پس انتگرال داده شده را به‌صورت زیر برحسب متغیر t بازنویسی می‌کنیم:

$$I=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2+1}}=\int\frac{-\frac{1}{t}dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}}=\int\frac{-\frac{1}{t}dt}{\sqrt{\frac{1-2t+2t^2}{t^2}}}=\int\frac{-dt}{\sqrt{2(t^2-t+\frac{1}{2})}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}}$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی $\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\operatorname{Ln}|u+\sqrt{u^2+a^2}|$ داریم:

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{Ln}|(t-\frac{1}{2})+\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}|)_1^{\frac{1}{2}}==\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{Ln}|(t-\frac{1}{2})+\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}|)_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{Ln}(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}})-\operatorname{Ln}(\frac{1}{2}))$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{Ln}\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}-\operatorname{Ln}\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{Ln}\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{Ln}(\sqrt{2}+1))$$

۳۸۰ـ گزینه «۱» با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x)+f(h)}{1-f(x)f(h)}-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)[1-f(x)f(h)]}{h(1-f(x)f(h))}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)(1+f^2(x))}{h(1-f(x)f(h))}$$

اکنون توجه کنید که از تساوی داده شده در صورت سؤال به ازای $x=y=0$ داریم:

$$f(0)=\frac{2f(0)}{1-f^2(0)}\Rightarrow f(0)=0$$

در نتیجه:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$$

به این ترتیب با جایگذاری در تعریف مشتق داریم:

$$f'(x)=f'(0)(1+f^2(x))\Rightarrow\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}=f'(0)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$\operatorname{Arctg}(f(x))=f'(0)x+b$$

به ازای $x=0$ داریم $f(0)=0$ پس:

$$\operatorname{Arctg}(0)=0+b\Rightarrow b=0$$

به این ترتیب ضابطه‌ی $f(x)$ معلوم می‌شود:

$$\operatorname{Arctg}(f(x))=f'(0)x\Rightarrow f(x)=\operatorname{tg}(f'(0)x)$$

۳۸۱ــ گزینه «۳» ابتدا بردارهای نرمال صفحه و هذلولی‌گون در نقطه‌ی $(1,1,\sqrt{3})$ را بدست می‌آوریم:

بردار نرمال صفحه $x=1$ $=\vec{n}_1=(1,0,0)$

بردار نرمال هذلولی‌گون $=\vec{n_2}=\vec{\nabla}f=(2x,2y,-2z)\xrightarrow{(1,1,\sqrt{3})}\vec{n_2}=(1,1,-\sqrt{3})$

بنابراین بردار هادی خط مماس بر منحنی فصل مشترک آن‌ها برابر است با:

$$\vec{u}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\1&1&-\sqrt{3}\end{vmatrix}=(0,\sqrt{3},1)$$

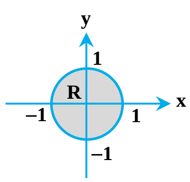
بنابراین معادله خط مماس چنین است:

$$\begin{cases}x=1\\y=\sqrt{3}t+1\\z=t+\sqrt{3}\end{cases}\quad \text{یا}\quad \left(x=1\,,\ \frac{y-1}{\sqrt{3}}=\frac{z-\sqrt{3}}{1}\right)$$

۳۸۲ــ گزینه «۴» معادله رویه S به شکل $g(x,y,z)=z-x-1=0$ است. بنابراین: $ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dydx=\sqrt{2}\,dydx$

تصویر این سطح بر صفحه xy نیز ناحیه R است که با دایره $x^2+y^2=1$ محدود شده است. بنابراین با توجه به آن‌که $z=x+1$ است داریم:

$$I=\iint_S zds=\iint_R (x+1)\sqrt{2}dydx=\sqrt{2}\iint_R (x+1)dydx$$



حال توجه کنید که x فرد است اما $x^2+y^2=1$ نسبت به x زوج است. در نتیجه $\iint_R xdydx=0$ است. پس:

$$I=\sqrt{2}\iint_R (1)dydx=\sqrt{2}(\text{مساحت } R)=\sqrt{2}\pi$$

توجه: اگر بخواهیم انتگرال دوگانه به‌وجود آمده را بدون استفاده از تقارن زوج و فرد حل کنیم در مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$I=\sqrt{2}\iint_R (x+1)dydx=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1(r\cos\theta+1)rdrd\theta=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}\cos\theta+\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^1 d\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{1}{2}\right)d\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{1}{2}\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=\sqrt{2}\pi$$

۳۸۳ــ گزینه «۱» فرض کنیم $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$، در این صورت $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$. اکنون با رعایت قاعده‌ی مشتق حاصل‌ضرب و قاعده زنجیره‌ای برای تابع $u=xyf(z)$ داریم: $\frac{\partial u}{\partial x}=yf(z)-\frac{1}{x^2}xyf'(z)$

بنابراین $x^2\frac{\partial u}{\partial x}=x^2yf(z)-xyf'(z)$ و به همین ترتیب $y^2\frac{\partial u}{\partial y}=y^2xf(z)-xyf'(z)$.

حالا از تفاضل آن‌ها داریم: $x^2\frac{\partial u}{\partial x}-y^2\frac{\partial u}{\partial y}=xyf(z)(x-y)=(x-y)u$ پس $G(x,y)=x-y$.

روش کوتاه: با توجه به گزینه‌ها، جواب مستقل از ضابطه‌ی f است پس فرض می‌کنیم f تابع ثابت یک باشد؛ یعنی $f(\frac{x+y}{xy})=1$. در این صورت داریم $u=xy$ و در نتیجه $x^2\frac{\partial u}{\partial x}-y^2\frac{\partial u}{\partial x}=x^2y-y^2x=xy(x-y)=(x-y)u$. پس $G(x,y)=x-y$ است.

۳۸۴ـ گزینه «۳»

روش اول: نقاط بحرانی تابع $f(x,y,z)=2x-y+3z$ را با دو قید $g(x,y,z)=x^2+y^2=5$ و $h(x,y,z)=y+z=4$ مشخص می‌کنیم. فرض کنیم λ و μ ضرایب لاگرانژ باشند.

در نقاط بحرانی f داریم $\vec{\nabla} f=\lambda\vec{\nabla} g+\mu\vec{\nabla} h$.

$$\begin{cases} f_x=\lambda g_x+\mu h_x \\ f_y=\lambda g_y+\mu h_y \\ f_z=\lambda g_z+\mu h_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=2x\lambda+0 \\ -1=2y\lambda+\mu \\ 3=0+\mu \end{cases}$$

بنابراین $\mu=3$ و $\lambda=\frac{1}{x}=-\frac{2}{y}$، پس $y=-2x$. با جایگذاری در معادله $x^2+y^2=5$ داریم $x^2+4x^2=5$، پس $x=\pm1$. به این ترتیب دو نقطه بحرانی خواهیم داشت: $A(1,-2,6)$ و $B(-1,2,2)$ مقادیر بحرانی f را حساب کنیم.

$f(B)=-2-2+6=2$ $\qquad$ $f(A)=2+2+18=22$

روش دوم: با استفاده از قید $y+z=4$ داریم $z=4-y$. بنابراین خواهیم داشت: $f(x,y,z)=2x-y+3z=2x-y+12-3y=2x-4y+12$

اکنون مقادیر بحرانی تابع دو متغیره $f(x,y)$ را با قید $g(x,y)=x^2+y^2=5$ بدست آوریم.

$$\begin{cases} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=2x\lambda \\ -4=2y\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{x}=-\frac{2}{y} \Rightarrow y=-2x \Rightarrow x^2+2x^2=5 \Rightarrow x=\pm1 \Rightarrow y=\mp2$$

f دارای دو مقدار بحرانی است:

$$f(1,-2)=2+8+12=22$$
$$f(-1,2)=-2-8+12=2$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۸۵ـ گزینه «۱» چند جمله‌ای تیلور درجه دوم تابع $f(x,y)$ در همسایگی $(0,0)$ به این صورت نوشته می‌شود:

$$f(x,y)\simeq f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+f_{xx}(0,0)\frac{x^2}{2!}+2f_{xy}(0,0)\frac{xy}{2!}+f_{yy}(0,0)\frac{y^2}{2!}$$

با محاسبه مشتقات جزئی مرتبه یک و دو در مبدأ خواهیم داشت:

$$f(x,y)=\frac{1+x}{1-y^2} \Rightarrow f_x=\frac{1}{1-y^2}, f_y=\frac{2y(1+x)}{(1-y^2)^2}$$

$$f_{xx}=0\ ,\ f_{xy}=\frac{2y}{(1-y^2)^2}\ ,\ f_{yy}=\frac{2(1+x)(1+y^2)^2-4y(1+y^2)(2y)(1+x)}{(1-y^2)^4}$$

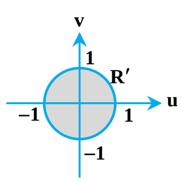
$$\Rightarrow f_x(0,0)=1\ ,\ f_y(0,0)=0\ ,\ f_{xx}(0,0)=0$$
$$f_{xy}(0,0)=0\ ,\ f_{yy}(0,0)=2\ ,\ f(0,0)=1$$

پس چند جمله‌ای تیلور درجه دوم f برابر است با: $1+x+y^2$

روش کوتاه: اختلاف گزینه‌ها در ضریب y^2 است. کافی است ضریب y^2 را در این چند جمله‌ای به‌دست آوریم. $\quad$ $(y^2 \text{ ضریب})=\frac{1}{2!}f_{yy}(0,0)=\frac{1}{2!}(2)=1$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۸۶ـ گزینه «۲» ناحیه مورد نظر را R بنامیم. می‌دانیم که مساحت R برابر است با $I=\iint_R dydx$. با معرفی دستگاه جدید (u,v) به صورت $u=(\frac{x}{a})^{\frac{1}{3}}$ و $v=(\frac{y}{a})^{\frac{1}{3}}$ سعی می‌کنیم ناحیه R را به ناحیه ساده‌تری در دستگاه (u,v) تبدیل کنیم. مرز این ناحیه دایره $u^2+v^2=1$ است. همچنین با توجه به معادله u و v داریم: $y=av^3$ و $x=au^3$ بنابراین:



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} 3au^2 & 0 \\ 0 & 3av^2 \end{vmatrix}=9a^2u^2v^2$$

ناحیه R' در دستگاه (u,v) دایره واحد است. آن را به صورت قطبی بیان کنیم:

$$I=\iint_R dydx=\iint_{R'}9a^2u^2v^2dudv=9a^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\theta\, r^2\sin^2\theta\, r\,dr\,d\theta$$

$$=9a^2\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\left(\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^1 d\theta=\frac{9a^2}{6}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta=\frac{9a^2}{6}\left(\frac{1}{4}\right)\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos(4\theta))d\theta=\left(\frac{9a^2}{6}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left[\theta-\frac{1}{4}\sin(4\theta)\right]\Big|_0^{2\pi}=\frac{3a^2\pi}{8}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۸۷ـ گزینه «۲» طول منحنی $y=f(x)$ در فاصله $a\le x\le b$ برابر است با $s=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx$. ابتدا y' را به‌دست آوریم.

$$e^{2y}tghx=1 \Rightarrow Ln(e^{2y}tghx)=Ln(1) \Rightarrow 2y+Ln(tghx)=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}Ln(tghx)$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\frac{1-tgh^2x}{tghx}=\frac{1}{2}\frac{1-\frac{\sinh^2x}{\cosh^2x}}{\frac{\sinh x}{\cosh x}}=\frac{1}{2}\frac{\cosh^2x-\sinh^2x}{\cosh x.\sinh x}$$

حال دقت کنیم که $\cosh^2x-\sinh^2x=1$ و $\cosh x.\sinh x=\frac{1}{2}\sinh(2x)$ بنابراین:

$$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}\sin(2x)}=\frac{1}{\sinh(2x)}$$

اکنون می‌توانیم طول منحنی را در فاصله خواسته شده به‌دست آوریم:

$$s=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{\sinh^2(2x)}}dx=\int_1^2\sqrt{\frac{\sinh^2(2x)+1}{\sinh^2(2x)}}dx=\int_1^2\sqrt{\frac{\cosh^2(2x)}{\sinh^2(2x)}}dx$$

$$\Rightarrow s=\int_1^2\frac{\cosh(2x)}{\sinh(2x)}dx=\frac{1}{2}Ln(\sinh(2x))\Big|_1^2=\frac{1}{2}[Ln(\sinh(4)-Ln(\sinh(2))]=\frac{1}{2}Ln(\frac{\sinh 4}{\sinh 2})$$

توجه: در ناحیه $1\le x\le 2$ توابع $\sinh(2x)$ و $\cosh(2x)$ نامنفی هستند پس خارج کردن آن‌ها از رادیکال نیازی به قدر مطلق ندارد.

۳۸۸ـ گزینه «۴» هرگاه $y=uv$ حاصل‌ضرب دو تابع باشد، آنگاه مشتق nاِم y به این صورت به‌دست می‌آید:

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

حال اگر u یک چند جمله‌ای درجه دو باشد به ازای $k\ge 3$ داریم $u^{(k)}=0$ بنابراین:

$$y^{(n)}=\binom{n}{0}uv^{(n)}+\binom{n}{1}u'v^{(n-1)}+\binom{n}{2}u''v^{(n-2)}=uv^{(n)}+nu'v^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}u''v^{(n-2)}$$

در این تمرین داریم $u=x^2$ پس $u'=2x$ و $u''=2$. همچنین:

$$v=\cosh x-\sinh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=e^{-x}$$

بنابراین مشتق مرتبه kاِم v برابر است با $v^{(k)}=(-1)^ke^{-x}$. با جایگذاری در $y^{(n)}$ داریم:

$$y^{(n)}=(-1)^nx^2e^{-x}-2nx(-1)^{n-1}e^{-x}+\frac{2n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}(-1)^{n-2}e^{-x}$$

روش تستی: وقتی در ضابطه‌ی مشتق‌اُم، $n=0$ قرار دهیم باید خود تابع y به‌دست آید. بنابراین در گزینه‌ها $n=0$ قرار دهیم، گزینه صحیح با خود تابع y برابر خواهد شد.

به‌وضوح گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) رد می‌شوند. در گزینه (۴) به ازای $n=0$ داریم:

$$y^{(0)}=x^2e^{-x}=x^2(\cosh x-\sinh x)$$

۳۸۹ـ گزینه «۳» گزینه (۳) نادرست است. برای مثال به ازای $n=2$ داریم:

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$$

حال با توجه به شرط $0<y<x$ داریم $x+y<2x$. بنابراین به ازای $n=2$ داریم:

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}<nx^{n-1}$$

اما سایر گزینه‌ها نیز را بررسی کنیم:

در گزینه (۱) با استفاده از بسط مک لورن e^x داریم: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$؛ بنابراین $e^x-(1+x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ جمله غالب این بسط $\frac{x^2}{2!}\ge 0$ است پس برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $e^x\ge 1+x$.

در مورد گزینه (۲) نیز وقتی $x>0$ داریم:

$$x-\frac{x^3}{3!}<\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots<x$$

در مورد گزینه (۴) با استفاده از بسط‌های مک لورن در ناحیه همگرایی آن‌ها داریم:

$$\begin{cases}\frac{x}{1+x}=x\frac{1}{1+x}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{n+1}=x-x^2+\cdots\\ Ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots\end{cases}$$

با توجه به آن‌که $\frac{x^2}{2}<x^2$ داریم $\frac{x}{1+x}<Ln(1+x)$. همچنین از دو جمله اول بسط $Ln(1+x)$ معلوم است که در ناحیه $x>0$ داریم $Ln(1+x)<x$.

۳۹۰ـ گزینه «۲» فرض کنید $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ نزولی و مشتق‌پذیر باشد.

$$I=\int_0^{\pi} f(x)\cos(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos(x)dx$$

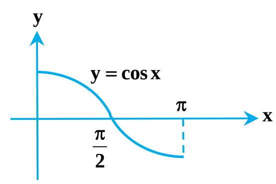
در انتگرال دوم از خاصیت انتقالِ انتگرال معین استفاده کنیم به این ترتیب که از کران‌های انتگرال $\frac{\pi}{2}$ کم می‌کنیم؛ اما در انتگرالده به جای x، $x+\frac{\pi}{2}$ قرار می‌دهیم. یادآوری کنیم که $\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin x$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+\frac{\pi}{2})\cos(x+\frac{\pi}{2})d(x+\frac{\pi}{2})=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x+\frac{\pi}{2})\sin(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)\cos(x)-f(x+\frac{\pi}{2})\sin(x)]dx$$

اکنون به دو مطلب دقت کنیم. یکی آن که در بازه‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ داریم $\cos(x)\le\sin(x)$ و دوم آن‌که به علت نزولی بودن تابع f داریم $f(x)\ge f(x+\frac{\pi}{2})$.

بنابراین $f(x)\cos(x)\ge f(x+\frac{\pi}{2})\sin(x)$ و در نتیجه تابع زیر انتگرال مثبت است پس $I\ge 0$ خواهد بود.



توجه: منحنی $y=\cos x$ در بازه $[0,\pi]$ نزولی است و در $\frac{\pi}{2}$ تغییر علامت می‌دهد.

به همین علت تصمیم گرفتیم انتگرال $\int_0^{\pi} f(x)\cos(x)dx$ را در $x=\frac{\pi}{2}$ بشکنیم.

این‌کار به ما امکان می‌داد که از شرط نزولی بودن f نیز استفاده کنیم زیرا مقادیر f در بازه $[\frac{\pi}{2},\pi]$ از مقادیر f در بازه $[0,\frac{\pi}{2}]$ کمتر (یا مساوی) هستند.

۳۹۱ـ گزینه «۱» برای $|x|<1$ می‌دانیم که:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots \qquad (I)$$

و با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$\frac{-1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}=-1+2x-3x^2+\cdots$$

با ضرب دومین سری در 3x داریم:

$$-\frac{3x}{(1+x)^2}=-3x+6x^2-9x^3+\cdots \qquad (II)$$

حالا روابط (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{1}{1+x}-\frac{3x}{(1+x)^2}=1-4x+7x^2-10x^3+\cdots \Rightarrow f(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{3x}{(1+x)^2}=\frac{1-2x}{(1+x)^2}$$

۳۹۲ـ گزینه «۴» با محاسبه‌ی حد در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(a_n^{\frac{n+1}{n}})=\lim_{n\to\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1+x^2}{2+x^2})^k$$

با یک سری هندسی همگرا با قدر نسبت $0<r=\frac{1+x^2}{2+x^2}<1$ مواجه‌ایم، بنابراین با توجه به مقدار یک سری هندسی همگرا، یعنی $\frac{\text{جمله اول}}{1-r}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n^{n+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1+x^2}{2+x^2})^k=\frac{\frac{1+x^2}{2+x^2}}{1-\frac{1+x^2}{2+x^2}}=1+x^2$$

۳۹۳ـ گزینه «۳» توجه کنید که $f(0)=f(1)=0$، معادله‌ی $f'(x)=0$ را حل می‌کنیم و نقاط بحرانی f را در بازه‌ی $0<x<1$ می‌یابیم:

$$f'(x)=px^{p-1}(1-x)^q+q(-1)(1-x)^{q-1}x^p=x^{p-1}(1-x)^{q-1}(p(1-x)-qx)=0$$

$$\Rightarrow p(1-x)-qx=0 \Rightarrow p=(p+q)x \Rightarrow x=\frac{p}{p+q}$$ نقطه‌ی بحرانی

و چون $f(\frac{p}{p+q})>0$ اما $f(0)=f(1)=0$ پس تابع f در $x=\frac{p}{p+q}$ ماکزیمم مطلق خود را اختیار می‌کند.

روش بهتر و ساده‌تر این است که چون $1-x$ و x مجموع ثابتی دارند، لذا حاصل‌ضرب آن‌ها با شرط زیر ماکزیمم می‌شود:

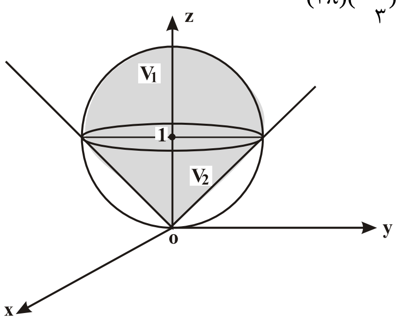
$$\frac{x}{p}=\frac{1-x}{q}\Rightarrow qx=p-px\Rightarrow x=\frac{p}{x+p}$$

۳۹۴ـ گزینه «۱»

روش اول: حجم ناحیه‌ی D از فرمول $V=\iiint_D dzdydx$ به‌دست می‌آید. بهتر است از مختصات کروی استفاده کنیم. از معادله‌ی $x^2+y^2+z^2=2z$ داریم $\rho^2=2\rho\cos\phi$ پس $\rho=2\cos\phi$ است. درون این کره داریم $0\le\rho\le 2\cos\phi$. حدود ϕ روی محور z های مثبت $\phi=0$ و روی سطح مخروط $z^2=x^2+y^2$ به‌صورت $\phi=\frac{\pi}{4}$ است. حدود θ هم در مختصات کروی همیشه $0\le\theta\le 2\pi$ است مگر آن‌که محدودیتی روی x و y داده شده باشد.

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\phi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\cos\phi}d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}\cos^3\phi\sin\phi\,d\phi\,d\theta=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left[-\frac{8}{3}\times\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=(2\pi)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)\Rightarrow V=\pi$$



روش دوم: مطابق شکل مخروط و کره در ارتفاع $z=1$ با هم برخورد می‌کنند و مقطع آن‌ها دایره $x^2+y^2=1$ است. پس داریم:

$$V=V_1+V_2=\text{حجم نیمکره بالایی}+\text{حجم مخروط}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi(1^3)\right)+\frac{1}{3}\pi(1^2)(1)=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$$

۳۹۵ـ گزینه «۲»

روش اول: فرض می‌کنیم $u=2\cos x+\sin x+3$ باشد. حالا صورت کسر را به صورت مجموعی از u و u' می‌نویسیم:

$$\begin{cases}u=2\cos x+\sin x+3\\ u'=-2\sin x+\cos x\end{cases}$$

برای آن‌که در صورت کسر $\sin x$ نداریم باید از این معادلات $\sin x$ را حذف کنیم. بنابراین داریم:

$$u'+2u=5\cos x+6$$

اکنون انتگرال داده شده به راحتی حل می‌شود.

$$I=\int\frac{u'+2u}{u}dx=\int\left(\frac{u'}{u}+2\right)dx=Ln|u|+2x=Ln|2\cos x+\sin x+3|+2x$$

با جایگذاری کران‌ها داریم:

$$I=[Ln|2\cos x+\sin x+3|+2x]_0^{\frac{\pi}{2}}=Ln4+\pi-Ln5=\pi+Ln\frac{4}{5}$$

روش دوم: با تغییر متغیر $u=tg\frac{x}{2}$، $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$، $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$ و $dx=\frac{2du}{1+u^2}$ می‌توان انتگرال را حل کرد که روش سخت‌تری است.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{5\cos x+6}{2\cos x+\sin x+3}dx=\int_0^1\frac{\frac{5(1-u^2)}{1+u^2}+6}{\frac{2(1-u^2)}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}+3}\frac{2du}{1+u^2}=2\int_0^1\frac{5(1-u^2)+6(1+u^2)}{2(1-u^2)+2u+3(1+u^2)}\frac{du}{1+u^2}=2\int_0^1\frac{11+u^2}{(u^2+2u+5)(1+u^2)}du$$

به کمک تجزیه‌ی کسرها داریم:

$$=2\left(\int_0^1\frac{u+1}{u^2+2u+5}du-\int_0^1\frac{u-2}{u^2+1}du\right)=2\left(\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2(u+1)du}{u^2+2u+5}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2udu}{u^2+1}+2\int_0^1\frac{du}{u^2+1}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}Ln(u^2+2u+5)\Big|_0^1-\frac{1}{2}Ln(u^2+1)\Big|_0^1+2tg^{-1}u\Big|_0^1\right)=2\left(\frac{1}{2}(Ln8-Ln5)-\frac{1}{2}(Ln2-Ln1)+2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=Ln\frac{8}{5}-Ln2+\pi=Ln\frac{4}{5}+\pi$$

۳۹۶ـ گزینه «۱» ابتدا m^2 را از داخل رادیکال و سری خارج می‌کنیم:

$$L=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\frac{\sqrt{k}+\sqrt{m}}{m^2\sqrt{m}}}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\frac{\sqrt{k}+\sqrt{m}}{\sqrt{m}}}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\sqrt{\frac{k}{m}}+1}$$

سری به دست آمده یک مجموع ریمان برای تابع $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}+1}$ است. در نتیجه داریم:

$$L=\int_0^1\sqrt{\sqrt{x}+1}\,dx\quad\to\quad\sqrt{x}+1=t^2\Rightarrow\frac{dx}{2\sqrt{x}}=2tdt\Rightarrow dx=4t(t^2-1)dt$$

$$L=\int_1^{\sqrt{2}}t\times4t(t^2-1)dt=4\int_1^{\sqrt{2}}t^4-t^2dt=4\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=4\left[\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)\right]=4\left(\frac{2\sqrt{2}}{15}+\frac{2}{15}\right)=\frac{8}{15}(\sqrt{2}+1)$$

۳۹۷ـ گزینه «۳» با توجه به این‌که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست، پس $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. حال با توجه به آزمون خارج قسمت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_n}=\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \quad a_n^2 \text{ نیز همگراست}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(a_n)}{a_n}=1 \Rightarrow \quad \sin(a_n) \text{ نیز همگراست}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}\sim \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n}=1 \Rightarrow \quad \text{Ln}(1+a_n) \text{ نیز همگراست}$$

اما در مورد گزینه (۳) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{1}{a_n}=\arctan\frac{1}{0^+}=\arctan\infty=\frac{\pi}{2}\neq 0$$

این سری شرط لازم همگرایی را ندارد.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۹۸ـ گزینه «۴» ابتدا تابع $f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$ را تعریف می‌کنیم. حالا در بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ نقاط بحرانی این تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=x-\sin x=0 \Rightarrow x=0$$

پس $x=0$ یک ریشه برای مشتق تابع f است. در گام بعدی خواهیم دید که این تنها ریشه است.

$$f''(x)=1-\cos x\geq 0 \xrightarrow{x=0} f''(0)=0$$
$$f'''(x)=\sin x \rightarrow f'''(0)=0$$
$$f^{(4)}(x)=\cos x \rightarrow f^{(4)}(0)=1>0$$

می‌دانید که در این شرایط $x=0$ یک مینیمم نسبی است. حال دو نقطه بحرانی دو سر بازه را نیز بررسی می‌کنیم:

$$f(-\frac{\pi}{2})=\cos(-\frac{\pi}{2})-1+\frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2})^2=\frac{\pi^2-8}{8}>f(0)$$

پس $x=0$ مینیمم مطلق تابع نیز هست. یعنی به ازای هر x در بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ داریم:

$$f(x)\geq f(0) \Rightarrow \cos x-1+\frac{1}{2}x^2\geq 0 \Rightarrow \cos x\geq 1-\frac{1}{2}x^2$$

توجه: این‌گونه سؤالات را سر جلسه آزمون باید با توجه به مقداردهی به x سریع به روش تستی حل کرد و اساساً حل و بررسی چهار گزینه کار راحتی نیست. برای تمرین این کار را با درنظر گرفتن xهای مناسب در بازه $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ انجام دهید.

◆ ◆ ◆ ◆

۳۹۹ـ گزینه «۲» با توجه به این که در بازه انتگرال‌گیری تابع دارای مجانب قائم است، باید حتماً بازه را بشکنیم، یعنی:

$$I=\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\sin^{-1}x\Big|_0^1+\text{Ln}(x+\sqrt{x^2-1})\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}+\text{Ln}(\frac{2+\sqrt{4-1}}{1+\sqrt{1-1}})=\frac{\pi}{2}+\text{Ln}(2+\sqrt{3})$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۰۰ـ گزینه «۳» سعی می‌کنیم معادله را به فرم‌های استاندارد مختصات کروی درآوریم:

$$\frac{\rho}{\cos\theta}=\sin\varphi\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}\right)+\frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \xrightarrow{\times\rho\cos\theta} \rho^2=\rho\sin\varphi\cos\theta+\rho\sin\varphi\sin\theta+\rho\cos\varphi$$

حالا با برگرداندن عبارات بالا به مختصات کارتزین خواهیم داشت:

$$x^2+y^2+z^2=x+y+z \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$$

واضح است که معادله فوق نشان‌دهنده یک کره به مرکز $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و به شعاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۰۱ـ گزینه «۴» ابتدا کران‌های z را به دست می‌آوریم:

$$z=۰\ ,\ z=c\left(۱-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

حال برای به دست آوردن حدود x و y، ابتدا تصویر جسم بر صفحه xoy را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱\\ z=۰\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$$

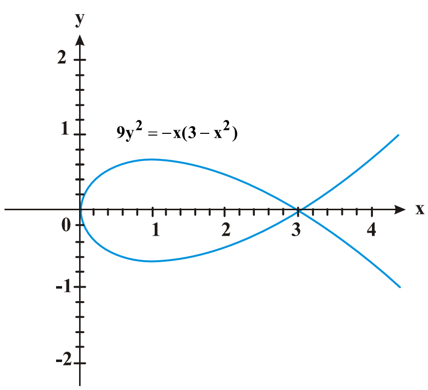
حال اگر در بازه $۰\le x\le a$ در راستای محور yها از پایین به بالا حرکت کنیم، $۰\le ۰\le b\left(۱-\frac{x}{a}\right)$ خواهد بود. در نتیجه:

$$V=\iiint_D dzdydx=\int_۰^a\int_۰^{b(۱-\frac{x}{a})}\int_۰^{c(۱-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})}dzdydx=\int_۰^a\int_۰^{b(۱-\frac{x}{a})}c(۱-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})dydx=c\int_۰^a\left[b(۱-\frac{x}{a})-\frac{bx}{a}(۱-\frac{x}{a})-\frac{۱}{۲b}(b^۲(۱-\frac{x}{a})^۲)\right]dx$$

$$=cb\int_۰^a(\frac{۱}{۲}-\frac{x}{a}+\frac{x^۲}{۲a^۲})dx=cb(\frac{x}{۲}-\frac{x^۲}{۲a}+\frac{x^۳}{۶a^۲})\Big|_۰^a=cb(\frac{a}{۲}-\frac{a^۲}{۲a}+\frac{a^۳}{۶a^۲})=\frac{cba}{۶}$$

۴۰۲- گزینه «۲» ابتدا منحنی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۹y^۲=x(۳-x)^۲\Rightarrow|۳y|=|۳-x|\sqrt{x}\xrightarrow{۰\le x\le ۳}|۳y|=(۳-x)\sqrt{x}$$



همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، منحنی نسبت به محور xها متقارن است. پس کافیست فقط مساحت حاصل از دوران نیمه بالایی منحنی حول محور xها را محاسبه کنیم. در نتیجه با توجه به رابطه مساحت سطح حاصل از دوران منحنی حول محور xها داریم:

$$S=۲\pi\int_a^b y\sqrt{۱+y'^۲}dx$$

$$y=\frac{(۳-x)\sqrt{x}}{۳}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{۱}{۳}(-\sqrt{x}+\frac{۳-x}{۲\sqrt{x}})=\frac{۱}{۳}(-\sqrt{x}+\frac{۳}{۲\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{۲})=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{\sqrt{x}}-\sqrt{x})$$

$$۱+y'^۲=۱+\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{\sqrt{x}}-\sqrt{x})^۲=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})^۲$$

$$\Rightarrow S=۲\pi\int_۰^۳\frac{(۳-x)\sqrt{x}}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})^۲}dx=\frac{۲\pi}{۳}\int_۰^۳(۳-x)\sqrt{x}\,\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})dx=\frac{\pi}{۳}\int_۰^۳(۳-x)(۱+x)dx$$

$$=\frac{\pi}{۳}\int_۰^۳(۳+۲x-x^۲)dx=\frac{\pi}{۳}(۳x+x^۲-\frac{x^۳}{۳})\Big|_۰^۳=\frac{\pi}{۳}(۹+۹-\frac{۲۷}{۳})=۳\pi$$

۴۰۳ـ گزینه «۴» این اعداد را به چند دسته تقسیم می‌کنیم. اعدادی که ۴ ندارند یا فقط یک ۴ دارند یا دو تا ۴ دارند توجه کنید که صفر باید باشد:

اعدادی که چهار ندارند: $\underbrace{۳}_{\text{۷ یا ۵ یا ۳}}\times\underbrace{۳}_{\text{غیر از صدگان به همراه صفر}}\times ۲\times ۱=۱۸$

اعدادی که یک چهار دارند و صفر ندارند:

$$\begin{cases}۴\times ۳\times ۲\times\underbrace{۱}_{\text{صفر}}=۲۴\\ ۴\times ۳\times\underbrace{۱}_{\text{صفر}}\times ۲=۲۴\\ ۴\times\underbrace{۱}_{\text{صفر}}\times ۳\times ۲=\underline{۲۴}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad ۷۲\end{cases}$$

$$۱۸+۷۲+۲۷=۹۹$$

اعدادی که دو تا چهار دارند و صفر دارند: $\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب جایگاه برای صفر}}\times\underbrace{۱}_{\text{صفر}}\times ۱\times ۱\times ۳=۹$

۴۰۴ـ گزینه «۱» محل نقطه بحرانی تابع $f(x,y)=x^3+y^2-2x^2y+x$ را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_x=3x^2-4xy+1=0 \\ f_y=2y-2x^2=0 \end{cases}$$

از معادله دوم داریم $y=x^2$. با جایگذاری در معادله اول:

$$3x^2-4x^3+1=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} x=1 \xrightarrow{y=x^2} y=1$$

نقطه $P(1,1)$ نقطه بحرانی f است. حال با استفاده از محکِ Δ نوع آن را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta=(f_{xx})(f_{yy})-(f_{xy})^2=(6x-4y)(2)-(-4x)^2 \xrightarrow{(x,y)=(1,1)} \Delta=(6-4)(2)-(-4)^2=-12$$

$\Delta<0$ است، پس نقطه P نقطه زینی است.

توضیح: در حل معادله‌ی $3x^2-4x^3+1=0$ با توجه به آن‌که مجموع ضرایب $3-4+1=0$ صفر است متوجه شدیم که $x=1$ جواب معادله است. با توجه به آن‌که در صورت سؤال و گزینه‌ها فقط از یک نقطه‌ی بحرانی نام برده شده، متوجه می‌شویم که این معادله ریشه‌ی دیگری ندارد.

اما اگر بخواهیم توضیح کامل‌تری ارائه دهیم، با توجه به آن‌که $x=1$ یکی از ریشه‌هاست، می‌توانیم از $(x-1)$ فاکتور بگیریم تا سایر ریشه‌های احتمالی به‌دست آیند. این کار با تقسیم چند جمله‌ای‌ها قابل انجام است:

$$\begin{array}{r|l} -4x^3+3x^2+1 & (x-1) \\ \underline{-(-4x^3+4x^2)} & -4x^2-x-1 \\ -x^2+1 & \\ \underline{-(-x^2+x)} & \\ -x+1 & \\ \underline{-(-x+1)} & \\ 0 & \end{array}$$

پس داریم:

$$-4x^3+3x^2+1=(x-1)(-4x^2-x-1)$$

در عبارت درجه‌ی دوی به دست آمده، مقدار Δ منفی است:

$$\Delta=1-16=-15$$

پس به جز $x=1$ ریشه‌ی دیگری وجود ندارد.

۴۰۵ـ گزینه «۳» با توجه به این که مختصات نقطه $(2,-3)$ در معادله‌ی منحنی $y=-x^2-2x+5$ صدق می‌کند، ابتدا معادله‌ی خط مماس را که از این نقطه بر منحنی مماس می‌شود می‌نویسیم و سپس با استفاده از فرمول مساحت بین دو تابع مساحت ناحیه‌ی محدود به این منحنی و خط مماس تا محور y ها را به دست می‌آوریم:

$$y'=-2x-2 \xrightarrow{x=2} m=-6$$

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y+3=-6(x-2) \Rightarrow y=-6x+9$$

$$S=\int_a^b (y_2-y_1)dx \Rightarrow S=\int_0^2((-6x+9)-(-x^2-2x+5))\,dx=\int_0^2(x^2-4x+4)dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)_0^2=\frac{8}{3}$$

۴۰۶ـ گزینه «۲» ابتدا سری S_n را باز کرده و سعی می‌کنیم آن را به صورت تابع صریحی از n بنویسیم:

$$S_n=(-1)^2 1+(-1)^3 2+(-1)^4 3+\cdots=\left(1+3+5+\cdots+(2n-1)\right)-\left(2+4+6+\cdots+2n\right)=n^2-n(n+1)=-n$$

حال با استفاده از هم‌ارزی در بی‌نهایت برای عبارات مخرج x_n حد داده شده برابر است با:

$$L=\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+2n}=\frac{-1}{3}$$

۴۰۷ـ گزینه «۳» برای حل این سؤال می‌توان از فرمول محاسبه حجم حاصل از دوران در مختصات قطبی استفاده کرد؛ ولی اگر دقت داشته باشید واضح است که منحنی $r=\cos\theta$ در واقع دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},0)$ و به شعاع $\frac{1}{2}$ است. پس حجم حاصل از دوران آن حول محور x یک کره به شعاع $\frac{1}{2}$ خواهد بود. یعنی داریم:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\pi}{6}$$

۴۰۸ـ گزینه «۴» ابتدا در نزدیکی نقطه داده شده، نقطه $(x_0,y_0)=(۲,۱)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که $z(x_0,y_0)=Ln(۲^۲+\sqrt{۱})=Ln۵$ پس در واقع خواسته سؤال همان مقدار dz است. در نتیجه داریم:

$$z=Ln(x^۲+\sqrt{y})\Rightarrow\begin{cases} z_x=\dfrac{۲x}{x^۲+\sqrt{y}} \\ z_y=\dfrac{\frac{۱}{۲\sqrt{y}}}{x^۲+\sqrt{y}}\end{cases}\quad,\quad \Delta x=x-x_0=۱/۹۷-۲=-۰/۰۳\quad,\quad \Delta y=y-y_0=۱/۰۴-۱=۰/۰۴$$

$$dz=z_x dx+z_y dy\approx\frac{۲x_0}{x_0^۲+\sqrt{y_0}}\Delta x+\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{y_0}}}{x_0^۲+\sqrt{y_0}}\Delta y=\frac{۲(۲)}{۲^۲+\sqrt{۱}}(-۰/۰۳)+\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{۱}}}{۲^۲+\sqrt{۱}}(۰/۰۴)=-۰/۰۲$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۰۹- گزینه «۲» با فرض $f(x)=Lnx-\frac{۱}{x}$ و با توجه به این‌که دامنه تابع $x>۰$ است، با کمک مشتق، تعداد ریشه‌های معادله $f(x)=۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(۱)=۰-۱<۰ \\ f(e)=۱-\frac{۱}{e}>۰\end{array}\right\}\Rightarrow$$ معادله داده شده حداقل یک ریشه در بازه $۱<x<e$ دارد

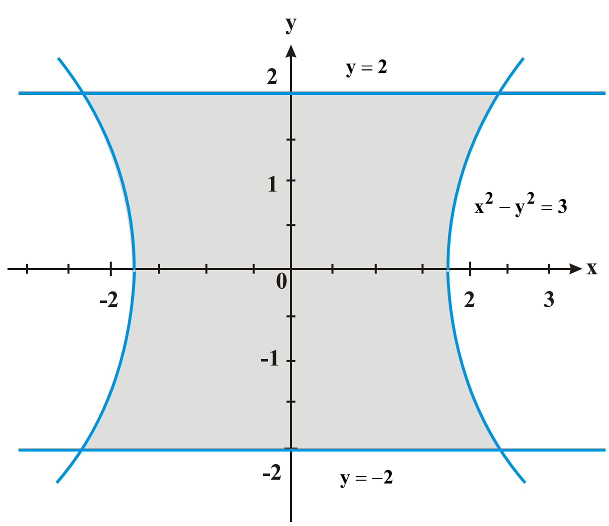
از طرفی $f'(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}>۰$ زیرا همانطور که گفتیم $x>۰$ است. در نتیجه می‌توان گفت تابع $f(x)$ صعودی اکید بوده و در نتیجه فقط همان یک ریشه را دارد. یعنی:

$$\exists x_0\in(۱,e)\ ;\ f(x_0)=۰\Rightarrow Lnx_0-\frac{۱}{x_0}=۰\Rightarrow Lnx_0=\frac{۱}{x_0}\Rightarrow x_0Lnx_0=۱$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۱۰- گزینه «۳» با توجه به شکل، ملاحظه می‌کنید که ناحیه مورد نظر، نسبت به محور y ها متقارن است. از این رو کافیست فقط حجم حاصل از دوران نیمه سمت راستی ناحیه را محاسبه کنیم. از آن‌جا که ناحیه، در راستای محور x ها منظم است، از رابطه زیر می‌توان استفاده کرد:

$$V=\pi\int_a^b x^۲(y)dy=\pi\int_{-۲}^{۲}(۳+y^۲)dy=۲\pi\int_0^{۲}(۳+y^۲)dy=۲\pi(۳y+\frac{y^۳}{۳})\Big|_0^{۲}=۲\pi(۶+\frac{۸}{۳})=\frac{۵۲\pi}{۳}$$



◆ ◆ ◆ ◆

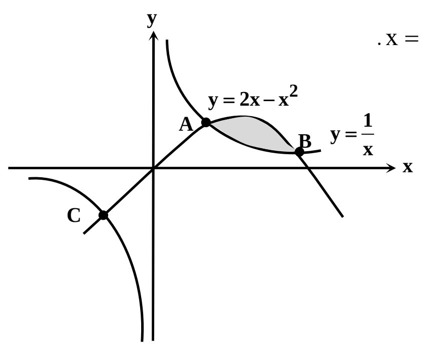
۴۱۱ــ گزینه «۴» مساحت بین منحنی‌های $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=۲x-x^۲$ را می‌خواهیم. ابتدا نقاط برخورد دو منحنی را تعیین می‌کنیم.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{۱}{x}=۲x-x^۲ \Rightarrow x^۳-۲x^۲+۱=۰$$

مجموعه ضرایب صفر است پس، یکی از ریشه‌ها $x=۱$ است. با تقسیم بر $(x-۱)$ می‌توانیم ریشه‌های دیگر را مشخص کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^۳-۲x^۲+۱ & x-۱ \\ \underline{-(x^۳-x^۲)} & x^۲-x-۱ \\ -x^۲+۱ & \\ \underline{-(-x^۲+x)} & \\ -x+۱ & \\ \underline{-(-x+۱)} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^۳-۲x^۲+۱=(x-۱)(x^۲-x-۱)=۰$$



از معادله‌ی $x^۲-x-۱=۰$ داریم $x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$. بنابراین ۳ ریشه داریم که عبارتند از $x=۱$ و $x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$. در واقع منحنی‌های داده شده در ۳ نقطه‌ی A، B و C مطابق شکل با هم برخورد می‌کنند. ناحیه‌ی مورد نظر ما به نقاط A و B که طول آن‌ها $x=۱$ و $x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$ است محدود می‌شود. منحنی $y=۲x-x^۲$ در این ناحیه بالاتر از $y=\frac{۱}{x}$ قرار می‌گیرد. اگر شکل را رسم نکرده باشید با عددگذاری، مثلاً با قرار دادن $x=\frac{۳}{۲}$ در آن‌ها این مطلب را متوجه می‌شدید.

$$\text{مساحت}=\int_۱^{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}(۲x-x^۲-\frac{۱}{x})dx=[x^۲-\frac{x^۳}{۳}-\mathrm{Ln}x]_۱^{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}=(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^۲-\frac{۱}{۳}(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^۳-\mathrm{Ln}(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})-۱+\frac{۱}{۳}-\mathrm{Ln}(۱)$$

$$=\frac{۱+۲\sqrt{۵}+۵}{۴}-\frac{۱}{۳}(\frac{۱+۲\sqrt{۵}+۵}{۴})(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})-\mathrm{Ln}\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}-\frac{۲}{۳}=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۴}(۱-\frac{۱+\sqrt{۵}}{۶})-\frac{۲}{۳}-\mathrm{Ln}(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})$$

$$=\frac{۲+\sqrt{۵}}{۲}(\frac{۵-\sqrt{۵}}{۶})-\frac{۲}{۳}-\mathrm{Ln}(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})=\frac{۵+۳\sqrt{۵}}{۱۲}$$

۴۱۲ــ گزینه «۴»

روش اول: از فرمول مقابل که انتگرال $f(x)$ و $f^{-۱}(x)$ را به هم مربوط می‌کند استفاده می‌کنیم.

$$\int_A^B f^{-۱}(x)+\int_a^b f(x)dx=Bb-Aa$$

در این مثال داریم:

$$f^{-۱}(x)=\sin^{-۱}x \Rightarrow f(x)=\sin x$$

در ضمن $\sin^{-۱}(۰)=۰$ و $\sin^{-۱}(۱)=\frac{\pi}{۲}$ پس داریم:

$$\int_۰^۱\sin^{-۱}xdx+\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin xdx=(۱)(\frac{\pi}{۲})-(۰)(۰) \Rightarrow \int_۰^۱\sin^{-۱}xdx-[\cos x]_۰^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \int_۰^۱\sin^{-۱}xdx=\frac{\pi}{۲}-۱$$

روش دوم: از جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u=\sin^{-۱}x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}} \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\int\sin^{-۱}xdx=uv-\int vdu=x\sin^{-۱}x-\int\frac{xdx}{\sqrt{۱-x^۲}}=x\sin^{-۱}x-\int x(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}dx=x\sin^{-۱}x+(۱-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

حالا با در نظرگرفتن کران‌ها داریم:

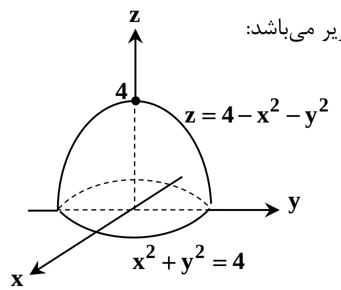
$$I=[x\sin^{-۱}x+(۱-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}]_۰^۱=\frac{\pi}{۲}-۱$$

۴۱۳ــ گزینه «۲» فرمول محاسبه گشتاور ماند چنین است:

$$M_O=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dydx=\int_0^a\int_0^b (x^2+y^2)(1)dydx=\int_0^a [x^2y+\frac{y^3}{3}]_0^b dx=\int_0^a (bx^2+\frac{b^3}{3})dx=[\frac{b}{3}x^3+\frac{b^3}{3}x]_0^a$$

$$=\frac{ba^3}{3}+\frac{b^3a}{3}=\frac{ab(a^2+b^2)}{3}$$

۴۱۴ــ گزینه «۲» هر چند رسم شکل لازم نیست اما رویه $z=4-x^2-y^2$ یک سهمی‌گون رو به پایین به شکل زیر می‌باشد:



حجم یک ناحیه با استفاده از انتگرال سه‌گانه برابر با $V=\iiint_D dzdydx$ است.

حدود z واضح هستند. در صفحه‌ی xy داریم $z=0$ و از معادله‌ی رویه داریم $z=4-x^2-y^2$.

برای تعیین حدود x و y با برخورد دادن حدود z به دایره‌ی $x^2+y^2=4$ می‌رسیم. پس بهتر است از دستگاه استوانه‌ای استفاده کنیم. لذا:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases} \quad \text{و} \quad 0\le r\le 2\,, \qquad 0\le\theta\le 2\pi\,, \qquad dxdy=rdrd\theta$$

حدود z هم در دستگاه استوانه‌ای به صورت $z=0$ و $z=4-r^2$ نوشته می‌شوند.

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} rdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4r-r^3)drd\theta=\int_0^{2\pi}(2r^2-\frac{r^4}{4})\Big|_0^2 d\theta=2\pi\times(8-4)=8\pi$$

۴۱۵ــ گزینه «۴» از تغییر متغیر $x=2tgu$ استفاده می‌کنیم، لذا:

$$x=2tgu \Rightarrow dx=2\sec^2 udu \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=2 \Rightarrow u=tg^{-1}1=\frac{\pi}{4} \\ x=6 \Rightarrow u=tg^{-1}3 \end{cases}$$

بنابراین انتگرال داده شده برابر است با:

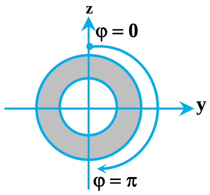
$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{tg^{-1}3}\frac{2\sec^2 udu}{4tg^2u\times 2\sec u}=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{tg^{-1}3}\frac{\sec udu}{tg^2u}=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{tg^{-1}3}\frac{\frac{1}{\cos u}}{\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}}du$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{tg^{-1}3}(\sin u)^{-2}\cos udu=-\frac{1}{4}(\sin u)^{-1}u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{tg^{-1}3}=\frac{1}{4\sin(\frac{\pi}{4})}-\frac{1}{4\sin(tg^{-1}3)}$$

برای محاسبه‌ی $\sin(tg^{-1}3)$ فرض می‌کنیم $\theta=tg^{-1}3$ باشد. در این صورت $tg\theta=3$ و ما مقدار $\sin\theta$ را می‌خواهیم. چون $tg\theta=3$ پس $\cot g\theta=\frac{1}{3}$،

حالا داریم: $1+\cot g^2\theta=\csc^2\theta \Rightarrow \csc^2\theta=1+\frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{10}{9} \Rightarrow \sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin(tg^{-1}3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$

بنابراین داریم: $I=\frac{1}{\frac{4\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{4\times\frac{3}{\sqrt{10}}}=\frac{1}{12}(3\sqrt{2}-\sqrt{10})$



۴۱۶ـ گزینه «۳» وقتی ناحیه داده شده به کره (یا مخروط) محدود شده باشد، بهتر است انتگرال را در دستگاه کروی حل کنیم. ناحیه داده شده بین دو کره با شعاع‌های R و r قرار داد. پس کران‌های ρ همان شعاع‌های دو کره هستند: $r \le \rho \le R$. در مورد باند θ نیز به این توجه کنید که تصویر این ناحیه روی صفحه xy یک حلقه‌ی کامل است پس $۰ \le \theta \le ۲\pi$. برای مشخص شدن باند ϕ ناحیه داده شده را در صفحه‌ی zy یعنی به ازای $x = ۰$ رسم می‌کنیم:

ϕ زاویه با محور z ها است. در ناحیه مورد نظر ما ϕ همه مقادیر خود را اختیار می‌کند. پس $۰ \le \phi \le \pi$. دقت کنید که کران‌های ϕ را فقط از ناحیه‌ی سمت راست یا ناحیه سمت چپ مشخص کنید. ϕ علامت‌دار نیست و کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار آن $\phi = ۰$ و $\phi = \pi$ هستند.

در نهایت یادآوری کنیم که ژاکوبی دستگاه کروی $\rho^۲ \sin\phi$ است.

$$\iiint_E \frac{۱}{(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۵}{۲}}}dz\,dy\,dz = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_r^R \frac{\rho^۲\sin\phi}{(\rho^۲)^{\frac{۵}{۲}}}d\rho d\phi d\theta = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_r^R \rho^{-۳}\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

از آن‌جا که تابع انتگرالده قابل تفکیک به صورت ضرب توابع یک متغیره است و باندها هم ثابت هستند می‌توان انتگرال‌ها را تفکیک کرد:

$$\text{جواب} = (\int_۰^{۲\pi}d\theta)(\int_۰^{\pi}\sin\phi\, d\phi)(\int_r^R \rho^{-۳}d\rho) = (۲\pi)(-\cos\phi\Big|_۰^{\pi})(-\frac{۱}{۲\rho^۲}\Big|_r^R) = (۲\pi)(۱+۱)(\frac{۱}{۲r^۲}-\frac{۱}{۲R^۲}) = ۴\pi(\frac{۱}{r^۲}-\frac{۱}{R^۲})$$

۴۱۷ـ گزینه «۲» اگر انتقال را به صورت $\begin{vmatrix} X = x+\alpha \\ Y = y+\beta \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} x = X-\alpha \\ y = Y-\beta \end{vmatrix}$ در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$Y-\beta = (X-\alpha)^۲-(X-\alpha) = X^۲-(۲\alpha+۱)X+\alpha^۲+\alpha \Rightarrow Y = X^۲-(۲\alpha+۱)X+(\alpha^۲+\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -(۲\alpha+۱) = ۵ & \Rightarrow \alpha = -۳ \\ \alpha^۲+\alpha+\beta = ۰ & \Rightarrow \beta = -۶ \end{vmatrix}$$

بنابراین نقطه $(۳,۶)$ روی نمودار f به نقطه $(۰,۰)$ منتقل می‌شود.

۴۱۸ـ گزینه «۲» تنها نقطه‌ی بحرانی تابع $y = x^۲+c$ در $x = ۰$ است، زیرا داریم: $y' = ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰$. پس در بازه‌ی $[-۱,۱]$ با محاسبه‌ی مقدار $f(x) = |x^۲+c|$ در $x = \pm۱$ و $x = ۰$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(۰) = |c| \\ f(\pm۱) = |۱+c| \end{cases} \Rightarrow f_{max} = \max(|c|,|۱+c|)$$

هرگاه کمترین یا بیشترین مقدار تابع $\max(|t-a|,|t-b|)$ را بخواهیم، محل برخورد آن‌ها را تعیین می‌کنیم. عبارات $|c|$ و $|۱+c|$ در $c = -\frac{۱}{۲}$ با یکدیگر برابر می‌شوند. بنابراین کمترین مقدار برای f_{max} وقتی حاصل می‌شود که $c = -\frac{۱}{۲}$ باشد. در این حالت داریم $f(x) = |x^۲-\frac{۱}{۲}|$ در نتیجه:

$$f(\sqrt{۲}) = |۲-\frac{۱}{۲}| = |\frac{۳}{۲}| = \frac{۳}{۲}$$

۴۱۹ـ گزینه «۴» محور y ها دارای شیب بی‌نهایت است. پس باید نقاطی را پیدا کنیم که در آن نقاط، خط مماس بر منحنی، قائم باشد یا به عبارتی شیب منحنی بی‌نهایت باشد.

$$y' = \frac{-\sin x}{۳\sqrt[۳]{\cos^۲ x}} = \pm\infty \xrightarrow{\text{مخرج برابر صفر}} \cos x = ۰ \Rightarrow x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۲} = k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

اکنون یکی از این نقاط مثلاً $x = \frac{\pi}{۲}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نوع این نقطه را تشخیص دهیم. به علامت $f'(x)$ در دو طرف $\frac{\pi}{۲}$ توجه می‌کنیم.

$$y' = -\frac{\sin x}{۳\sqrt[۳]{\cos^۲ x}}$$

مخرج کسر همواره بزرگتر یا مساوی صفر است. $\sin(\frac{\pi}{۲}) = ۱$ است پس چه در $\frac{\pi^+}{۲}$ و چه در $\frac{\pi^-}{۲}$ داریم $y' = -\frac{۱}{۰^+} = -\infty$ پس، علامت y' در این نقطه تغییری نمی‌کند. در نتیجه $\frac{\pi}{۲}$ نقطه‌ی عطف است. گزینه (۴) صحیح است.

۴۲۰ـ گزینه «۳» برای تعیین کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x)=\max(|g(x)|,|h(x)|)$، علاوه بر نقاط بحرانیِ $|g|$ و $|h|$ باید محل برخورد آن‌ها را نیز در نظر بگیریم. توابع $2x$ و $x+1$ نقطه بحرانی ندارند. نقطه تلاقی $|2x|$ و $|x+1|$ را به دست می‌آوریم:

$$|2x|=|x+1| \Rightarrow \begin{cases} 2x=x+1 \Rightarrow x=1 \\ 2x=-x-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{3} \end{cases}$$

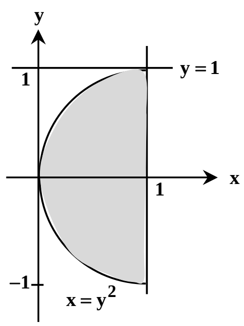
به ازای $x=\frac{-1}{3}$ و $x=1$ مقدار $f(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(\frac{-1}{3})=\max\{|2\times\frac{-1}{3}|,|\frac{-1}{3}+1|\}=\frac{2}{3}$$

$$f(1)=\max\{|2|,|1+1|\}=2$$

بنابراین کمترین مقدار $f(x)$ برابر با $\frac{2}{3}$ و بیشترین مقدار آن، ۲ است.

۴۲۱ـ گزینه «۱» فاصله‌ی هر نقطه‌ی (x,y) از خط $y=1$ برابر است با $|y-1|$.
بنابراین گشتاور ماند حول این خط به این صورت محاسبه می‌شود:



$$\text{گشتاور ماند}=\iint_D dydx=\iint_D (1-y)^2 dydx$$

چون زیر انتگرال فقط برحسب y است، بهتر است dx را به انتگرال میانی بیاوریم. ترتیب $\iint_D (1-y)^2 dxdy$ بهتر است. در ناحیه‌ی D داریم $0\le y\le 1$ و از چپ به راست، مرز ورودی $x=y^2$ و مرز خروجی $x=1$ است.

$$\text{گشتاور ماند}=\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}(1-y)^2dxdy=\int_{-1}^{1}[(1-y)^2x]_{y^2}^{1}dy=\int_{-1}^{1}(1-y)^2(1-y^2)dy=\int_{0}^{1}(y^2-2y+1)(1-y^2)dy$$

$$=\int_{-1}^{1}(-y^4+2y^3-2y+1)dy=[-\frac{y^5}{5}+\frac{2y^4}{4}-\frac{2y^2}{2}+y]_{-1}^{1}=-\frac{2}{5}+2=\frac{8}{5}$$

۴۲۲ـ گزینه «۱» شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $x=\frac{5}{4}$ برابر است با: $y'(\frac{5}{4})$. ابتدا ضابطه‌ی y را ساده‌تر می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow[\text{مخرج ضرب می‌کنیم.}]{\text{صورت و مخرج را در مزدوج}} y=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\times\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x^2-x^2+1}=x+\sqrt{x^2-1}$$

$$y=x+\sqrt{x^2-1} \Rightarrow y'=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

در نقطه $x=\frac{5}{4}$ داریم:

$$m=y'(\frac{5}{4})=1+\frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}-1}}=1+\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}}=1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$$

عرض این نقطه را هم با قرار دادن $x=\frac{5}{4}$ در y حساب می‌کنیم:

$$y=x+\sqrt{x^2-1} \xrightarrow{x=\frac{5}{4}} y=\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{25}{16}-1}=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=2$$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $(\frac{5}{4},2)$ چنین است:

$$y-2=\frac{8}{3}(x-\frac{5}{4})$$

با قرار دادن $y=0$، نقطه تلاقی خط با محور xها مشخص می‌شود:

$$y=0 \Rightarrow -2=\frac{8}{3}(x-\frac{5}{4}) \Rightarrow -\frac{6}{8}=x-\frac{5}{4} \Rightarrow x=-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1}{2}$$

۴۲۳ـ گزینه «۴» حجم حاصل از دوران منحنی $y=f(x)$ در فاصله $a\le x\le b$ حول محور xها (محور قطبی) برابر است با:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx$$

برای منحنی داده شده با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases},\ r=1-\cos\theta\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=(1-\cos\theta)\cos\theta\\y=(1-\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$$

با جایگذاری در فرمول V داریم:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b((1-\cos\theta)\sin\theta)^2d((1-\cos\theta)\cos\theta)$$

برای تشخیص حدود θ، منحنی پارامتری را با محور دوران یعنی خط $y=0$ برخورد می‌دهیم.

$$y=0\ \Rightarrow\ (1-\cos\theta)\sin\theta=0\ \Rightarrow\ \theta=0\ ,\ \theta=\pi$$

البته اگر نمودار $r=1-\cos\theta$ را بشناسید می‌دانید که یک دلوار است و نیمه‌ی بالایی آن به ازای $0\le\theta\le\pi$ به‌دست می‌آید. به این ترتیب حجم حاصل از دوران حول محور xها برابر است با:

$$V=\pi\int_0^\pi(1-\cos\theta)^2\sin^2\theta\times(-\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta)d\theta=\pi\int_0^\pi\sin^3\theta(1-\cos\theta)^2(-1+2\cos\theta)d\theta$$

البته اگر حاصل انتگرال منفی شد، قدرمطلق آن نشان‌دهنده‌ی مقدار حجم خواهد بود.

برای آن‌که بتوانیم از زوج یا فرد بودن توابع استفاده کنیم، از حدود انتگرال $\frac{\pi}{2}$ کم می‌کنیم و به جای θ در انتگرال $\theta+\frac{\pi}{2}$ قرار می‌دهیم.

یادآوری می‌کنیم که $\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta$ و $\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=-\sin\theta$ پس داریم:

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta(1+\sin\theta)^2(-1-2\sin\theta)d\theta$$

$$V=-\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta(2\sin^3\theta+5\sin^2\theta+4\sin\theta+1)d\theta$$

توابع $\cos^3\theta\sin^3\theta$ و $\cos^3\theta\sin\theta$ فرد هستند. انتگرال آن‌ها صفر می‌شود. برای سایر عبارات که زوج هستند داریم:

$$V=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta(5\sin^2\theta+1)d\theta=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)(5\sin^2\theta+1)\cos\theta d\theta=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+4\sin^2\theta-5\sin^4\theta)\cos\theta d\theta$$

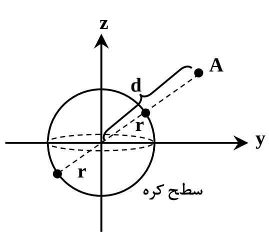
به این ترتیب با محاسبه‌ی انتگرال داریم:

$$|V|=2\pi(\sin\theta+\frac{4}{3}\sin^3\theta-\frac{5}{5}\sin^5\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi(1+\frac{4}{3}-1)=\frac{8}{3}\pi$$

۴۲۴ـ گزینه «۳» (بدون استفاده از بهینه‌سازی) ابتدا فاصله نقطه داده شده با مبدأ را محاسبه می‌کنیم:

$$d=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2+(12-0)^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$$

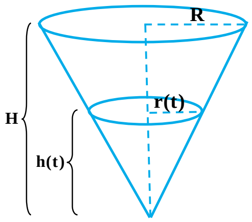
همان‌طور که در شکل نشان داده‌ایم وقتی فاصله‌ی A از مرکز کره یعنی مبدأ مختصات، d باشد، بیشترین و کمترین فاصله این نقطه از کره برابرند با $d+r$ و $d-r$.



کمترین فاصله: $d_1=d-r=13-3=10$

بیشترین فاصله: $d_2=d+r=13+3=16$

۴۲۵ـ گزینه «۳» فرض کنیم $r(t)$ و $h(t)$ و $v(t)$ به ترتیب شعاع سطح آب، ارتفاع آب و حجم آب وارد شده به مخزن در زمان t از شروع کار باشد.



از آن‌جا که ارتفاع مخزن $H=۸$ و شعاع قاعده آن $R=۲$ متر است، بنابر قضیه تالس خواهیم داشت:

$$\frac{h(t)}{H}=\frac{r(t)}{R}\Rightarrow r(t)=\frac{R}{H}h(t)=\frac{۱}{۴}h(t)$$

با استفاده از فرمول حجم مخروط داریم: $v(t)=\frac{۱}{۳}\pi(r(t))^{۲}h(t)$ پس با جایگذاری معادله‌ی قبلی داریم:

$$v(t)=\frac{\pi}{۳}(\frac{۱}{۴}h(t))^{۲}h(t)=\frac{\pi}{۴۸}h^{۳}(t)$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم: $\frac{dv(t)}{dt}=\frac{۳\pi}{۴۸}h^{۲}(t)\frac{dh(t)}{dt}$. از صورت سؤال می‌دانیم که سرعت ورود آب به مخزن $\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{۱۰}$ متر مکعب در هر دقیقه است.

وقتی فاصله سطح آب تا سطح مخزن ۳ متر باشد داریم $h(t)=۸-۳=۵$. بنابراین در این زمان خواهیم داشت:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{۳\pi}{۴۸}h^{۲}(t)\frac{dh(t)}{dt}\Rightarrow\frac{\pi}{۱۰}=\frac{۳\pi}{۴۸}(۵^{۲})\frac{dh(t)}{dt}\Rightarrow\frac{dh(t)}{dt}=\frac{۱۶}{(۱۰)(۲۵)}=\frac{۱۶}{۲۵۰}=\frac{۶۴}{۱۰۰۰}=۰/۰۶۴$$

۴۲۶ـ گزینه «۴» فاصله نقطه‌ی (x,y,z) از نقطه $(۳,۴,۹)$ با تابع $f(x,y,z)=\sqrt{(x-۳)^{۲}+(y-۴)^{۲}+(z-۹)^{۲}}$ داده می‌شود. ما بیشترین مقدار f را با شرط $g(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+۶z=۷$ می‌خواهیم. برای ساده‌تر شدن محاسبات فرض کنیم: $f(x,y,z)=(x-۳)^{۲}+(y-۴)^{۲}+(z-۹)^{۲}$

در پایان کار از مقدار ماکزیمم بدست آمده جذر می‌گیریم. بنابر دستگاه لاگرانژ در نقطه اکسترمم خواهیم داشت:

$$\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z}\Rightarrow\frac{۲(x-۳)}{۲x}=\frac{۲(y-۴)}{۲y}=\frac{۲(z-۹)}{۲z+۶}\Rightarrow\frac{x-۳}{x}=\frac{y-۴}{y}=\frac{z-۹}{z+۳}$$

از تساوی اول داریم: $xy-۳y=xy-۴x$ پس $y=\frac{۴}{۳}x$.

از تساوی دوم داریم: $xz+۳x-۳z-۹=xz-۹x$ پس $z=۴x-۳$.

با مرتب کردن معادله کره خواهیم داشت:
$$x^{۲}+y^{۲}+(z+۳)^{۲}=۱۶$$

حالا y و z را برحسب x جایگزین می‌کنیم:
$$x^{۲}+\frac{۱۶}{۹}x^{۲}+۱۶x^{۲}=۱۶$$

از این‌جا $x^{۲}=\frac{۱۴۴}{۱۶۹}$. پس $x=\pm\frac{۱۲}{۱۳}$. با استفاده از روابط $y=\frac{۴}{۳}x$ و $z=۴x-۳$ دو نقطه بحرانی بدست می‌آید. نقطه $A(\frac{۱۲}{۱۳},\frac{۱۶}{۱۳},\frac{۹}{۱۳})$ و $B(-\frac{۱۲}{۱۳},-\frac{۱۶}{۱۳},-\frac{۸۷}{۱۳})$، واضح است که نقطه B فاصله بیشتری از نقطه $(۳,۴,۹)$ دارد. پس بیشترین فاصله از نقطه $(۳,۴,۹)$ برابر است با:

$$\max f=\sqrt{(-\frac{۱۲}{۱۳}-۳)^{۲}+(-\frac{۱۶}{۱۳}-۴)^{۲}+(-\frac{۸۷}{۱۳}-۹)^{۲}}=\sqrt{(\frac{۵۱}{۱۳})^{۲}+(\frac{۶۸}{۱۳})^{۲}+(\frac{۲۰۴}{۱۳})^{۲}}=\frac{۱}{۱۳}\sqrt{۲۶۰۱+۴۶۲۴+۴۱۶۱۶}=\frac{۱}{۱۳}\sqrt{۴۸۸۴۱}=\frac{۲۲۱}{۱۳}=۱۷$$

۴۲۷ـ گزینه «۴» فاصله‌ی مرکز ثقل این منحنی یعنی، نقطه‌ی $(\bar{x},\bar{y})$ از محور xها برابر با $\bar{y}$ است. برای محاسبه ی $\bar{y}$ ابتدا طول قوس را در بازه‌ی $۰\le t\le\pi$ حساب می‌کنیم. طبق فرمول داریم: طول قوس $s=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{(x')^{۲}+(y')^{۲}}\,dt$

$$\Rightarrow s=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{(۱+\cos t)^{۲}+(\sin t)^{۲}}\,dt=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{۱+\cos^{۲}t+\sin^{۲}t+۲\cos t}\,dt=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{۲(۱+\cos t)}\,dt=\int_{۰}^{\pi}\sqrt{۲\times۲\cos^{۲}\frac{t}{۲}}\,dt$$

$$\Rightarrow s=\int_{۰}^{\pi}۲\cos\frac{t}{۲}dt=[۴\sin\frac{t}{۲}]_{۰}^{\pi}=۴$$

حالا طبق فرمول، عرض مرکز ثقل منحنی برابر است با:

$$\bar{y}=\frac{\int_{a}^{b}y\sqrt{(x')^{۲}+(y')^{۲}}\,dt}{s}$$

با استفاده از محاسبات قبلی داریم:

$$\bar{y}=\frac{\int_{۰}^{\pi}(۱-\cos t)\sqrt{۴\cos^{۲}\frac{t}{۲}}\,dt}{۴}=\frac{۱}{۴}\int_{۰}^{\pi}(۲\sin^{۲}\frac{t}{۲})(۲\cos\frac{t}{۲})dt=\int_{۰}^{\pi}\sin^{۲}\frac{t}{۲}\cos\frac{t}{۲}dt=[\frac{۲}{۳}\sin^{۳}\frac{t}{۲}]_{۰}^{\pi}=\frac{۲}{۳}$$

در آخرین انتگرال اگر فرض کنیم $u=\sin\frac{t}{۲}$ آنگاه $du=\frac{۱}{۲}\cos\frac{t}{۲}dt$ است.

۴۲۸ـ گزینه «۴» شیب خط L_1 به معادله‌ی $5x+12y+2=0$ برابر با $m_1=\frac{-5}{12}$ و شیب خط L_2 به معادله‌ی $3y+4x=5$ برابر با $m_2=\frac{-4}{3}$ است.
شیب خط Δ را برابر با m می‌گیریم. چون L_1 و L_2 نسبت به خط Δ قرینه‌اند پس زاویه‌ی بین L_1 و Δ با زاویه بین L_2 و Δ برابر است. با توجه به فرمول زاویه‌ی بین دو خط داریم:

$$tg\alpha_1=tg\alpha_2 \Rightarrow \frac{-\frac{5}{12}-m}{1-\frac{5}{12}m}=\frac{m+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}m} \Rightarrow \frac{-5-12m}{12-5m}=\frac{3m+4}{3-4m}$$

با طرفین وسطین کردن تساوی فوق به معادله‌ی درجه‌ی دوم $63m^2-32m-63=0$ می‌رسیم که از حل آن جواب‌های $m=-\frac{7}{9},\frac{9}{7}$ به دست می‌آید و چون شیب منفی خط Δ مورد نظر است، مقدار $m=\frac{-7}{9}$ قابل قبول است.

۴۲۹ـ گزینه «۳» اگر بتوانیم برای مسیری با طول یک کیلومتر هزینه را به حداقل برسانیم، برای همه‌ی مسیرهای دیگر هم کمترین هزینه به دست می‌آید. اگر مسیری به طول $d=1$ کیلومتر را با سرعت x کیلومتر بر ساعت طی کنیم، مدت زمان جابه‌جایی برابر است با $t=\frac{d}{x}=\frac{1}{x}$ و حقوق راننده برای این مدت زمان برابر است با $27\times\frac{1}{x}=\frac{27}{x}$. اکنون تابع هزینه به این صورت به دست می‌آید:

$$\text{هزینه کل}=f(x)=\text{هزینه کامیون}+\text{حقوق راننده}=12+\frac{x}{300}+\frac{27}{x}$$

با مشتق‌گیری از $f(x)$، نقطه‌ی بحرانی آن را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{1}{300}-\frac{27}{x^2}=0 \Rightarrow \frac{1}{300}=\frac{27}{x^2} \Rightarrow x^2=300\times27=3\times27\times100=81\times100 \Rightarrow x=9\times10=90$$

۴۳۰ـ گزینه «۳»

روش تستی: به سؤال خوب دقت کنید، طراح یک عبارت بر حسب x داده و در گزینه‌ها، فقط عدد داریم؛ یعنی طراح خودش گفته هر چی دوست داری به جای x قرار بده، عبارت داده شده مساوی یک عدد ثابت می‌شود. چه پیشنهاد خوبی! راحت‌تر و بی‌دردسرتر از همه، انتخاب $x=0$ می‌باشد:

(چون حداقل Arctg و Arcsin به دست آمده را بلدیم حساب کنیم!)
$$x=0 \Rightarrow \text{مقدار عبارت}=\text{Arctg}\,0+\text{Arcsin}\,1=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

روش تشریحی: حل اصلی یعنی اول دامنه را حساب کن، بعد ببین به ازای xهای دامنه مقدار عبارت چقدر می‌شود؟
عبارت جلوی Arctg باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد و اندازه عبارت جلوی Arcsin باید کوچکتر از یک باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} x^2-x\ge0 \Rightarrow x(x-1)\ge0 \Rightarrow x\le0 \quad \text{یا} \quad x\ge1 \\ |2x^2-2x+1|\le1 \Rightarrow |x^2+(x-1)^2|\le1 \end{cases}$$

اشتراک دو نامساوی فوق، دامنه عبارت را مشخص می‌کند و لذا xهای نامساوی بالایی را باید در نامساوی پایینی امتحان کنیم. با فرض $x\ge1$ آنگاه $x^2\ge1$، چون $(x-1)^2$ همواره بزرگتر یا مساوی صفر است، لذا با توجه به نامساوی پایینی $x^2\le1$، دو نامساوی $x^2\ge1$ و $x^2\le1$ را داریم که فقط یک جواب دارند و آن فقط $x=1$ می‌تواند باشد. (فقط حالت تساوی ممکن است.) اما اگر $x\le0$، آنگاه قطعاً $(x-1)^2\ge1$ است و چون می‌دانیم $x^2\ge0$، پس با توجه به نامساوی پایینی فقط $x=0$ می‌تواند انتخاب شود تا نامساوی برقرار باشد. بنابراین دامنه تابع برابر مجموعه $\{0,1\}$ می‌باشد، لذا کافی است مقدار تابع را به ازای دو نقطه $x=0$ و $x=1$ به دست آوریم.

$$x=0 \to \text{Arc}\tan(0)+\text{Arc}\sin(1)=\frac{\pi}{2} \quad , \quad x=1 \to \text{Arc}\tan(0)+\text{Arc}\sin(1)=\frac{\pi}{2}$$

در هر دو حالت، مقدار تابع برابر $\frac{\pi}{2}$ به دست آمده بنابراین $\frac{\pi}{2}$ جواب است.

۴۳۱ـ گزینه «۴» ابتدا جمله‌ی عمومی این بسط را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}.(x^{\frac{3}{2}})^{8-k}.(3x^{-2})^k=\binom{8}{k}.3^k.x^{\frac{24-7k}{2}}$$

اکنون جهت تعیین ضریب x^5، کافی است k را چنان پیدا کنیم که $\frac{24-7k}{2}=5$ و در نتیجه $k=2$، لذا جواب برابر است با:

$$\binom{8}{2}.3^2=\frac{8!}{2!(8-2)!\times9}=\frac{6!\times7\times8\times9}{2!\times6!}=\frac{56}{2}\times9=28\times9=\mathbf{252}$$

۴۳۲ـ گزینه «۱» ابتدا دامنه تابع داده شده را می‌یابیم:

$$D_1 : \sin^{-1}(x^2+2x+2) \Rightarrow -1 \le x^2+2x+2 \le 1 \Rightarrow -1 \le (x+1)^2+1 \le 1 \Rightarrow -2 \le (x+1)^2 \le 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x=-1$$

$$D_2 : tg^{-1}\sqrt{2-x} \Rightarrow 2-x \ge 0 \Rightarrow x \le 2$$

بنابراین دامنه کل تابع برابر است با: $D = D_1 \cap D_2 = \{-1\} \cap \{x \le 2\} = \{-1\}$

بنابراین تنها نقطه $x=-1$ جزو دامنه تابع داده شده می‌باشد و مقدار تابع به ازای این مقدار برابر است با:

$$x=-1 \quad \Rightarrow \sin^{-1}(1-2+2) + tg^{-1}\sqrt{2+1} = \sin^{-1}(1) + tg^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

۴۳۳ـ گزینه «۴» با توجه به آن‌که ضابطه‌ی $|x|$ در $x=0$ و $|x+4|$ در $x=-4$ تغییر می‌کند می‌توان ضابطه f را در هر ناحیه به این صورت نوشت:

الف) اگر $x<-4$ آنگاه $x+4$ و x هر دو مقادیر منفی دارند پس $f(x) = \dfrac{-(x+4)+(x)-4}{x} = -\dfrac{8}{x}$

در این ناحیه داریم $y=-\dfrac{8}{x}$ پس $x=-\dfrac{8}{y}$ و f معکوس‌پذیر است. (در واقع $f^{-1}(x) = -\dfrac{8}{x}$)

ب) اگر $-4 \le x \le 0$ آنگاه $x \le 0$ و $x+4 \ge 0$ بنابراین $f(x) = \dfrac{(x+4)+(x)-4}{x} = \dfrac{2x}{x} = 2$. پس f تابع ثابت است، یک به یک نیست و در نتیجه وارون ندارد.

ج) اگر $x>0$ آنگاه x و $x+4$ هر دو مثبت هستند پس $f(x) = \dfrac{(x+4)-(x)-4}{x} = 0$. باز هم f تابع ثابت است و وارون ندارد.

بنابراین، این تابع فقط در بازه $(-\infty,-4)$ معکوس‌پذیر است.

۴۳۴ـ گزینه «۱»

روش اول: تابع f یک تابع گویا است که در همه جا پیوسته است مگر در ریشه‌های مخرج. از آن‌جا که در $x=2$ مخرج صفر می‌شود پس $f(2)$ تعریف نشده است. براساس همین استدلال تابع $y=f(f(f(x)))$ در نقاطی ناپیوسته است که $x=2$ یا $f(x)=2$ یا $f(f(x))=2$.

$$f(x)=2 \quad \Rightarrow \frac{4}{2-x}=2 \quad \Rightarrow x=0$$

$$f(f(x))=2 \Rightarrow \frac{4}{2-f(x)}=2 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \frac{4}{2-x}=0 \Rightarrow$$ جواب ندارد.

بنابراین $x=0$ و $x=2$ تنها نقاط ناپیوستگی fofof هستند.

روش دوم: از آن‌جا که همه گزینه‌ها درباره اعداد $\{0,1,2,4\}$ هستند و تنها ناپیوستگی $f(x)$ در ریشه‌های مخرج است، می‌توانیم مقدار $y=f(f(f(x)))$ را در این نقاط حساب کنیم؛ اگر تعریف نشده باشد معلوم می‌شود در آن نقطه ناپیوستگی داریم.

$x=0 \qquad f(f(f(0))) = f(f(2)) =$ تعریف نشده

$x=2 \qquad f(f(f(2))) =$ تعریف نشده

$x=1 \qquad f(f(f(1))) = f(f(4)) = f(-2) = 1$

$x=4 \qquad f(f(f(4))) = f(f(-2)) = f(1) = 4$

۴۳۵ـ گزینه «۳» برای تعیین دامنه‌ی $f(x)$ دو شرط باید رعایت شود:

$$\begin{cases} 2-\log(x^2-15x) \ge 0 & \text{(عبارت زیر رادیکال)} \\ x^2-15x>0 & \text{(عبارت داخل لگاریتم)} \end{cases}$$

ابتدا به برقراری شرط اول می‌پردازیم:

$$2-\log(x^2-15x) \ge 0 \Rightarrow \log(x^2-15x) \le 2 \Rightarrow x^2-15x \le 10^2 \Rightarrow x^2-15x-100 \le 0 \Rightarrow (x-20)(x+5) \le 0$$

ریشه‌های این عبارت -5 و $+20$ هستند. در فاصله‌ی بین دو ریشه یعنی $[-5,20]$ مخالف علامت x^2 است پس، در این بازه داریم $(x-20)(x+5) \le 0$.

اکنون به دومین شرط می‌پردازیم: $x^2-15x>0 \Rightarrow x(x-15)>0$ ریشه‌های این عبارت 0 و 15 هستند. بین دو ریشه، علامت آن منفی است اما در بازه‌های $x>15$ و $x<0$ داریم $x^2-15x>0$.

بنابراین اولین شرط در بازه‌ی $[-5,20]$ و دومین شرط در مجموعه‌ی $(-\infty,0) \cup (15,\infty)$ برقرار است. دامنه‌ی f جایی است که هر دو شرط برقرار باشند پس داریم: $D_f = [-5,20] \cap [(-\infty,0) \cup (15,+\infty)] \Rightarrow D_f = [-5,0) \cup (15,20]$

روش ردگزینه: با جایگذاری $x=-5$ در تابع $f(x)$ داریم: $f(-5) = \sqrt{2-\log(100)} = \sqrt{2-2} = 0$. بنابراین $x=-5$ در دامنه f قرار دارد. گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند چون -5 را ندارند.

حالا اعدادی مثل $x=1$ یا $x=2$ را امتحان می‌کنیم. $x=1 \Rightarrow f(1) = \sqrt{2-\log(-14)}$

$\log(-14)$ تعریف نشده است پس $x=1$ نباید در دامنه قرار داشته باشد در نتیجه، گزینه (۱) نادرست است. فقط گزینه (۳) می‌تواند جواب باشد.

۴۳۶ــ گزینه «۲» اگر ضرب همه‌ی پرانتزها را حساب کنیم، تابع $f(x)$ یک چند جمله‌ای با درجه‌ی ۶ خواهد بود. یعنی داریم $f(x)=ax^{۶}+bx^{۵}+\cdots+k$. اگر از این چند جمله‌ای ۶ بار مشتق بگیریم، همه‌ی جملات به جز $ax^{۶}$ به صفر خواهند رسید و داریم: $f^{(۶)}(x)=a\times ۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱=۶!a$ پس کافی است ضریب $x^{۶}$ را در تابع f تشخیص دهیم. این کار به سادگی امکان‌پذیر است زیرا با نگاه‌داشتن بزرگترین درجه از هر پرانتز داریم:

$$f(x)=x(\frac{۱}{۴}x+۱)^{۳}(۲x-۱)^{۲}\xrightarrow{\text{بزرگترین درجه}}x(\frac{۱}{۴}x)^{۳}(۲x)^{۲}=\frac{۴}{۶۴}x^{۶}$$

با این توضیحات داریم:

$$a=\frac{۴}{۶۴}\Rightarrow f^{(۶)}(x)=۶!\times\frac{۴}{۶۴}=\frac{۶!}{۱۶}\Rightarrow f^{(۶)}(x)=\frac{۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ۵\times ۶}{۲\times ۲\times ۲\times ۲}=۳\times ۵\times ۳=۴۵$$

۴۳۷ــ گزینه «۳» شرط پیوستگی تابع بر یک بازه آن است که در همه نقاط آن بازه پیوسته باشد. بیشترین مقدار k وقتی حاصل می‌شود که $[۳,۳+k)$ بزرگترین بازه‌ای باشد که f بر آن پیوسته است. پس $۳+k$ اولین نقطه ناپیوستگی f بعد از نقطه $x=۳$ است. بنابراین ابتدا نقاطی که به ازای آن عبارت داخل جزء صحیح عدد صحیح می‌شود را به‌دست می‌آوریم. چون در $x=۳$ داریم $x^{۲}-۱=۸$ و این تابع برای $x>۰$ صعودی است پس ناپیوستگی بعدی وقتی حاصل می‌شود که $x^{۲}-۱=۹$ باشد: $x^{۲}-۱=۹\Rightarrow x^{۲}=۱۰\Rightarrow x=\sqrt{۱۰}$

لذا f در $x=\sqrt{۱۰}$ ناپیوسته است پس $۳+k=\sqrt{۱۰}$ بنابراین $k=\sqrt{۱۰}-۳$.

توجه داشته باشید که در $x=\sqrt{۱۰}$ حالت خاصی که عامل $(x-\sqrt{۱۰})^{۲n}$ در جزء صحیح داشته باشیم رخ نمی‌دهد؛ پس $x=\sqrt{۱۰}$ نقطه‌ی ناپیوستگی جزء صحیح است.

۴۳۸ــ گزینه «۱» منحنی را با خط $y=۵$ برخورد می‌دهیم: $\frac{|x^{۲}-۴|}{x+۲}=۵$ معادله را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر $-۲\le x\le ۲$ باشد مقدار $x^{۲}-۴$ منفی است پس داریم:

$$\frac{-(x^{۲}-۴)}{x+۲}=۵\Rightarrow -x^{۲}+۴=۵x+۱۰\Rightarrow x^{۲}+۵x+۶=۰$$
$$(x+۲)(x+۳)=۰\Rightarrow x=-۲,-۳$$

فقط $x=-۲$ قابل قبول است چون $-۲\le x\le ۲$ است.

حالت دوم: اگر $x>۲$ یا $x<-۲$ داریم $x^{۲}-۴\ge ۰$ پس:

$$\frac{x^{۲}-۴}{x+۲}=۵\Rightarrow x^{۲}-۴=۵x+۱۰\Rightarrow x^{۲}-۵x-۱۴=۱۰\Rightarrow (x-۷)(x+۲)=۰\Rightarrow x=-۲\ ,\ x=۷$$

پس $x=۷$ هم جزء جواب‌ها است.

نتیجه آن‌که ۲ ریشه‌ی $x=۷$ و $x=-۲$ به‌دست می‌آیند.

حالا به این مطلب توجه کنید که $x=-۲$ اصلاً در دامنه‌ی تابع قرار ندارد پس این منحنی با خط $y=۵$ فقط یک نقطه‌ی برخورد دارد.

۴۳۹ــ گزینه «۳» تابع $f(x,y,z)=\sqrt[۳]{x^{۴}+y^{۲}+z}$ را در نظر می‌گیریم. هدف ما محاسبه مقدار تقریبی $f(۱/۹۸,۳/۰۲,۱/۹۸)$ است. نقاط $x_{۰}$، $y_{۰}$ و $z_{۰}$ را در نزدیک مقادیر اعشاری x، y و z در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}x_{۰}=۲\\ y_{۰}=۳\\ z_{۰}=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta x=۱/۹۸-۲=-۰/۰۲\\ \Delta y=۳/۰۲-۳=۰/۰۲\\ \Delta z=۱/۹۸-۲=-۰/۰۲\end{cases}$$

مشتق‌های جزئی f را در نقطه‌ی $(۲,۳,۲)$ حساب می‌کنیم:

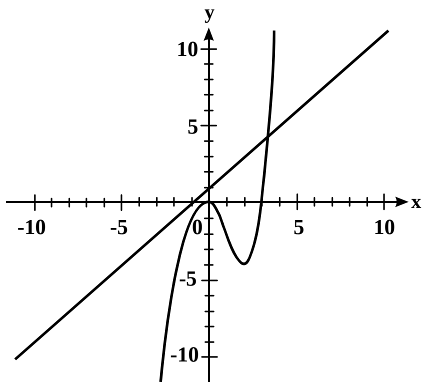
$$\begin{cases}f_x=\frac{۴}{۳}x^{۳}(x^{۴}+y^{۲}+z)^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۴}{۳}\times ۸\times ۲۷^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۳۲}{۲۷}\\ f_y=\frac{۲}{۳}y(x^{۴}+y^{۲}+z)^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۲}{۳}\times ۳\times ۲۷^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۲}{۹}\\ f_z=\frac{۱}{۳}(x^{۴}+y^{۲}+z)^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۱}{۳}\times ۲۷^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۱}{۲۷}\end{cases}$$

حالا از فرمول تقریب توابع چند متغیره استفاده می‌کنیم:

$$f(۱/۹۸,۳/۰۲,۱/۹۸)\simeq f(۲,۳,۲)+f_x\Delta x+f_y\Delta y+f_z\Delta z$$

$$\Rightarrow f(۱/۹۸,۳/۰۲,۱/۹۸)=۳+\frac{۳۲}{۲۷}\times(-۰/۰۲)+\frac{۲}{۹}\times(-۰/۰۲)+\frac{۱}{۲۷}\times(-۰/۰۲)=۳+\frac{-۰/۵۴}{۲۷}=۳-۰/۰۲=۲/۹۸$$

۴۴۰ـ گزینه «۲» یک راه حل برای این مسأله قطع دو منحنی و تحلیل معادله حاصل ($x^۳ - ۳x^۲ - x - ۱ = ۰$) است. اما چون ریشه این معادله به سادگی قابل محاسبه نیست و ریشه‌های مشتق آن ($۳x^۲ - ۶x - ۱ = ۰$) نیز گویا نمی‌باشند، جاگذاری آن‌ها در تابع اولیه و به دست آوردن مقدار تابع در این نقاط، اندکی وقت‌گیر خواهد بود. از این رو بهتر است از همین اول کار، نمودار دو منحنی را با هم در یک دستگاه رسم کرده و در مورد برخورد آن‌ها تحقیق کنید.



همانطور که می‌بینید دو نمودار فقط در یک نقطه با $۳ < x < ۴$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

۴۴۱ـ گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر بیضوی $\begin{cases} x = ۲r\cos\theta \\ y = ۳r\sin\theta \end{cases}$ و تغییر به مختصات استوانه‌ای، تصویر ناحیه انتگرال‌گیری بر روی صفحه xoy یک دایره به شعاع ۱ خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$V = \iiint_V abrdzdrd\theta = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱\int_۰^{۲r\cos\theta - ۲\times ۳r\sin\theta + ۴} ۲\times ۳rdzdrd\theta = ۳\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۲r(۲r\cos\theta - ۶r\sin\theta + ۴)drd\theta$$

$$= ۳\left[\int_۰^۱ ۴r^۲dr\int_۰^{۲\pi}\cos\theta d\theta - \int_۰^۱ ۱۲r^۲dr\int_۰^{۲\pi}\sin\theta d\theta + \int_۰^۱ ۸rdr\int_۰^{۲\pi}d\theta\right] = ۳\left[(\frac{۴}{۳}\times ۰) - (۴\times ۰) + (۴\times ۲\pi)\right] = ۲۴\pi$$

۴۴۲- گزینه «۱» با توجه به گفته سؤال، در نقطه M، شیب خط مماس بر نمودار، صفر است. یعنی:

$$\left.\begin{matrix} y = r\sin\theta = \sin\theta\sqrt{۲\cos ۲\theta} \\ x = r\cos\theta = \cos\theta\sqrt{۲\cos ۲\theta} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \cos ۲\theta \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \leq \theta \leq ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ ۲k\pi - \frac{۳\pi}{۴} \leq \theta \leq ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos\theta\sqrt{۲\cos ۲\theta} - \sin\theta\frac{۴\sin ۲\theta}{۲\sqrt{۲\cos ۲\theta}}}{-\sin\theta\sqrt{۲\cos ۲\theta} - \cos\theta\frac{۴\sin ۲\theta}{۲\sqrt{۲\cos ۲\theta}}} = \frac{\sin\theta\sin ۲\theta - \cos\theta\cos ۲\theta}{\sin\theta\cos ۲\theta + \cos\theta\sin ۲\theta}$$

$$m = ۰ \Rightarrow \sin\theta\sin ۲\theta - \cos\theta\cos ۲\theta = ۰ \Rightarrow ۲\sin^۲\theta\cos\theta - \cos\theta(۱ - ۲\sin^۲\theta) = ۴\sin^۲\theta\cos\theta - \cos\theta = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \sin^۲\theta = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

در این حالت فقط نقاط به فرم $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ قابل قبول هستند، زیرا سایر نقاط در دامنه تعریف منحنی قرار ندارند. از طرفی توجه داشته باشید که همین نقاط در صورتی قابل قبول‌اند که به ازای آنها مخرج صفر نشود. پس:

$$\sin\theta\cos ۲\theta + \cos\theta\sin ۲\theta \neq ۰ \Rightarrow \sin\theta(۲\cos^۲\theta - ۱) + ۲\cos^۲\theta\sin\theta = ۴\sin\theta\cos^۲\theta - \sin\theta \neq ۰$$

$$\begin{cases} \sin\theta \neq ۰ \Rightarrow \theta \neq k\pi \\ \cos^۲\theta \neq \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos\theta \neq \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta \neq k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

پس نقاط پیدا شده در مرحله اول، مخرج را صفر نمی‌کنند. حال در این نقاط داریم:

$$r = \sqrt{۲\cos ۲\theta} = \sqrt{۲(۱ - ۲\sin^۲\theta)} = \sqrt{۲ - ۴\sin^۲\theta} \xrightarrow{\sin^۲\theta = \frac{۱}{۴}} r = \sqrt{۲ - ۱} = ۱$$

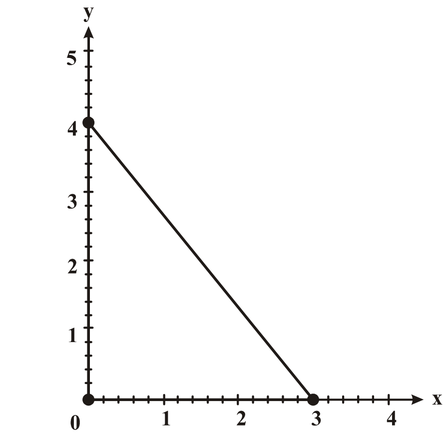
۴۴۳- گزینه «۴» با توجه به این‌که دایره بر سهمی مماس است، در نقطه تماس مقدار y' برای دایره و این منحنی یکسان است. از طرفی طبق سؤال y'' نیز برای هر دوی آنها یکی شده است. در نتیجه انحنای آنها و شعاع انحنای آنها با هم برابر می‌شود. این یعنی دایره مورد نظر همان دایره بوسان و شعاع آن همان شعاع انحنای منحنی است:

$$y = x^۲ + ۱ \Rightarrow y' = ۲x \xrightarrow{x=۱} y' = ۲ \ , \ y'' = ۲ \Rightarrow \rho = \frac{۱}{\kappa} = \frac{(۱ + (y')^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{|y''|} = \frac{(۱ + ۲^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{|۲|} = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$$

۴۴۴- گزینه «۳» می‌دانیم تحت هر تبدیل خطی $y = Ax$، مساحت هر شکل در دستگاه جدید، برابر حاصلضرب مساحت اولیه در قدر مطلق دترمینان ماتریس A است. یعنی:

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴ = ۶$$

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۳ \Rightarrow S' = \big||A|\big| S = ۳ \times ۶ = ۱۸$$



۴۴۵- گزینه «۳» باید ریشه‌های معادله را به دست آوریم. توجه کنید که مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یک ریشه ۱ است، برای دو ریشه دیگر نیز معادله داده شده را بر $z-۱$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} z^۳ - iz^۲ - z + i & z-۱ \\ \underline{-z^۳ + z^۲} & \overline{z^۲ + (۱-i)z - i} \\ (۱-i)z^۲ - z & \\ \underline{-(۱-i)z^۲ + (۱-i)z} & \\ i(z-۱) & \\ \underline{-i(z-۱)} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$z^۳ - iz^۲ - z + i = (z-۱)(z^۲ + (۱-i)z - i) = ۰ \Rightarrow z_۱ = ۱ = e^{i۰}$$

$$\Rightarrow z^۲ + (۱-i)z - i = ۰ \Rightarrow z = \frac{-(۱-i) \pm \sqrt{(۱-i)^۲ + ۴i}}{۲}$$

$$= \frac{(i-۱) \pm \sqrt{(۱+i)^۲}}{۲} = \frac{(i-۱) \pm (۱+i)}{۲} \Rightarrow \begin{cases} z_۲ = \dfrac{i-۱+۱+i}{۲} = i = e^{i\frac{\pi}{۲}} \\ z_۳ = \dfrac{i-۱-۱-i}{۲} = -۱ = e^{i\pi} \end{cases}$$

۴۴۶ـ گزینه «۱» در تابع $\sqrt{x^۲ - ۴}$ باید $x \geq ۲$ یا $x \leq -۲$ باشد. دامنه‌ی این رادیکال $D = (-\infty, -۲] \cup [۲, +\infty)$ است. از طرفی در تابع $\text{Arcsin}(x+۱)$ باید $-۱ \leq x+۱ \leq ۱$ باشد، یعنی $-۲ \leq x \leq ۰$.

در نتیجه $D' = [-۲, ۰]$. دامنه‌ی تابع داده شده اشتراک $D \cap D'$ است. فقط $x = -۲$ در اشتراک قرار دارد. پس دامنه عبارت داده شده فقط شامل $x = -۲$ است. پس کافی است مقدار عبارت داده شده را به ازای این مقدار از x محاسبه کنیم:

$$x = -۲ \to y = ۰ + \text{Arcsin}(-۱) = -\frac{\pi}{۲}$$

۴۴۷ـ گزینه «۲»

روش اول:

نکته: توابع به فرم $y = \dfrac{ax^۲ + bx + c}{a'x^۲ + b'x + c'}$ با شرط $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ دارای محور تقارنی به معادله $x = -\dfrac{b}{۲a} = -\dfrac{b'}{۲a'}$ می‌باشند.

پس در این مثال داریم:

$$y = \frac{۲x^۲ - ۴x - ۳}{-x^۲ + ۲x + ۴} \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{۲a} = \frac{۴}{۴} = ۱$$

اکنون این محور تقارن را با منحنی تابع قطع می‌دهیم:

$$x = ۱ \Rightarrow y = f(۱) = \frac{۲-۴-۳}{-۱+۲+۴} = \frac{-۵}{۵} = -۱$$

روش دوم: اگر در یک تابع $(x-a)^۲$ به‌وجود بیاید، خط $x = a$ محور تقارن نمودار آن تابع خواهد بود. با استفاده از اتحادها صورت و مخرج را مرتب می‌کنیم:

$$y = \frac{۲(x^۲ - ۲x - \frac{۳}{۲})}{-(x^۲ - ۲x - ۴)} = \frac{۲[(x-۱)^۲ - ۱ - \frac{۳}{۲}]}{-[(x-۱)^۲ - ۱ - ۴]} = \frac{۲(x-۱)^۲ - ۵}{۵ - (x-۱)^۲}$$

از ضابطه‌ی y مشخص است که خط $x = ۱$ محور تقارن آن است. در واقع به سادگی می‌توان دید که $f(۱-x) = f(۱+x)$ است:

$$f(۱ \mp x) = \frac{۲(۱ \pm x - ۱)^۲ - ۵}{۵ - (۱ \mp x - ۱)^۲} = \frac{۲(\mp x)^۲ - ۵}{۵ - (\mp x)^۲} = \frac{۲x^۲ - ۵}{۵ - x^۲}$$

با جایگذاری $x = ۱$ در ضابطه‌ی y داریم:

$$y = \frac{۰ - ۵}{۵ - ۰} = -۱$$

۴۴۸ـ گزینه «۲» ضابطه $f(a_n)$ برابر است با:

$$f(a_n)=\frac{(-1)^{\left\lfloor\frac{3n+1}{n+2}\right\rfloor}+1}{(\frac{3n+1}{n+2})^2-5}$$

برای محاسبه حد $\left\lfloor\frac{3n+1}{n+2}\right\rfloor$ به ازای $n\to\infty$ توجه کنید که $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2}=3$ اما مقدار این‌که همواره از ۳ کوچکتر است کافی است به n یک مقدار بزرگ مانند $n=10000$ بدهیم، لذا:

$$n=10000\Rightarrow\left\lfloor\frac{3n+1}{n+2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{3\times10000+1}{10000+2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{30001}{10002}\right\rfloor=2$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^2+1}{(\frac{3n+1}{n+2})^2-5}=\frac{2}{(3)^2-5}=\frac{1}{2}$$

۴۴۹ـ گزینه «۴» برای نوشتن تابع $f(x)$ به صورت «مجموع دو تابع زوج و فرد» به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x)=\underbrace{\boxed{\frac{f(-x)+f(x)}{2}}}_{\text{تابع زوج}}+\underbrace{\boxed{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}}_{\text{تابع فرد}}$$

سوال از ما مقدار تابع زوج به ازای $x=3$ را خواسته و بنابراین لازم است مقادیر $f(x)$ و $f(-x)$ را حساب کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-x+1}\to f(3)=\frac{1}{3^2-3+1}=\frac{1}{7}\ ,\ f(-3)=\frac{1}{(-3)^2-(-3)+1}=\frac{1}{13}$$

بنابراین داریم:

$$f(3)+f(-3)=\frac{1}{7}+\frac{1}{13}=\frac{20}{91}$$

و چون ضابطه‌ی تابع زوج به صورت $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ بود، لذا عبارت بالا را تقسیم بر ۲ می‌کنیم، بنابراین مقدار تابع زوج به ازای $x=3$ برابر $\frac{1}{2}(\frac{20}{91})=\frac{10}{91}$ می‌شود.

۴۵۰ـ گزینه «۳» می‌دانیم در بسط $(x+y+z)^n$، جمله عمومی به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$T=\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}x^{k_1}.y^{k_2}.z^{k_3}\ ,\ k_1+k_2+k_3=n$$

با توجه به عبارت $(a^2-\frac{b}{3}+2)^n$، داریم $x=a^2$، $y=-\frac{b}{3}$ و $z=2$ و با توجه به توان‌ها در a^2b^2 باید توان‌ها این‌گونه باشند:

$$\begin{cases}k_1=1\\k_2=2\\k_3=n-3\end{cases}\Rightarrow T_n=\frac{n!}{1!2!(n-3)!}a^2(-\frac{b}{3})^2(2)^{n-3}$$

توضیح: دقت کنید، با توجه به این که جمله‌ی موردنظر به صورت $\frac{560a^2b^2}{3}$ می‌باشد، لذا k_1 و k_2 برابر ۱ و ۲ نوشته شدند و بنابراین با توجه به شرط $k_1+k_2+k_3=n$، داریم $1+2+k_3=n$ و لذا $k_3=n-3$ به دست آمد.

خب حالا برویم سراغ ادامه‌ی حل سؤال، با توجه به این که جمله به صورت $\frac{560a^2b^2}{3}$ داده شده، لذا داریم:

$$\frac{560a^2b^2}{3}=\frac{n!}{1\times2\times(n-3)!}\times a^2\times\frac{b^2}{9}\times2^{n-3}\Rightarrow\frac{560a^2b^2}{3}=\frac{(n-3)!(n-2)(n-1)(n)}{2(n-3)!}\times a^2\times\frac{b^2}{9}\times2^{n-3}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } 3\times2\times9}\Rightarrow 6\times560=(n-2)(n-1)(n)2^{n-3}\Rightarrow5\times6\times7\times2^4=(n-2)(n-1)(n)2^{n-3}$$

با مقایسه طرفین تساوی، به راحتی $n=7$ به دست می‌آید.

۴۵۱ـ گزینه «۲» ابتدا از معادله‌ی $z+\frac{۴}{z}=۲$ مقدار z را به‌دست آورده و بعد از نوشتن نمایش قطبی آن حاصل $z^۵+(\overline{z})^۵$ را می‌یابیم.

$$z+\frac{۴}{z}=۲ \rightarrow z^۲-۲z+۴=۰ \rightarrow z=۱\pm\sqrt{۳}i$$

دقت کنید، عبارت داده شده در صورت سؤال نسبت به z و $\overline{z}$ متقارن است بنابراین، فرقی نمی‌کند کدام جواب را در نظر بگیریم؛ پس به ازای $z=۱+\sqrt{۳}i$ جواب را پیدا می‌کنیم. در این نقطه داریم:

$$\theta=tg^{-۱}(\sqrt{۳})=\frac{\pi}{۳} \quad و \quad r=\sqrt{۱+۳}=۲$$

$$\left.\begin{array}{l} z=۱+\sqrt{۳}i=۲e^{i\frac{\pi}{۳}} \rightarrow z^۵=۳۲e^{۵\frac{\pi}{۳}i}=۳۲(\cos(\frac{۵\pi}{۳})-\sin(\frac{۵\pi}{۳}))=۱۶-۱۶\sqrt{۳}i \\ \overline{z}=۱-\sqrt{۳}i=۲e^{-i\frac{\pi}{۳}} \Rightarrow (\overline{z})^۵=۳۲e^{-۵\frac{\pi}{۳}i}=۳۲[\cos(\frac{۵\pi}{۳})-i\sin(\frac{۵\pi}{۳})]=۱۶+۱۶\sqrt{۳}i \end{array}\right\} \Rightarrow z^۵+(\overline{z})^۵=\mathbf{۳۲}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۵۲ـ گزینه «۴» معادله‌ی نیمساز ناحیه اول و سوم $y=x$ می‌باشد، لذا با جایگذاری در تابع داده شده داریم:

$$x=\lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor} \Rightarrow x-\lfloor x\rfloor=\sqrt{x-\lfloor x\rfloor} \Rightarrow (x-\lfloor x\rfloor)^۲=(x-\lfloor x\rfloor)$$

$$(x-\lfloor x\rfloor)(x-\lfloor x\rfloor-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-\lfloor x\rfloor=۰ \Rightarrow x=\lfloor x\rfloor \Rightarrow & \text{فقط نقاط صحیح جواب می‌باشند} \\ x-\lfloor x\rfloor-۱=۰ \Rightarrow x-\lfloor x\rfloor=۱ & \text{این حالت غیرممکن است زیرا همیشه } ۰\le x-\lfloor x\rfloor<۱ \text{ است.} \end{cases}$$

در نتیجه تنها نقاط صحیح بازه داده شده قابل قبول می‌باشند، لذا: $x\in\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

بنابراین نمودار تابع داده شده در پنج نقطه با نیمساز ناحیه اول و سوم مشترک است.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۵۳ـ گزینه «۳» حروف کلمه‌ی مربوط عبارتند از: $T\ S\ D\ M\ H\ A$ و A و H.

بنابراین ۶ حرف متمایز داریم که دوتا از آن‌ها را می‌توان فقط یک‌بار تکرار کرد. رمزهای ۳ حرفی را دسته‌بندی می‌کنیم:

دسته اول: رمزهایی که از ۳ حرف مختلف ساخته شده باشند. پس ۳ حرف از بین ۶ حرف انتخاب کرده و سپس جایگشت‌های آن‌ها را می‌شماریم:

$$\text{تعداد این دسته}=\binom{۶}{۳}\times ۳!$$

دسته دوم: رمزهایی که از A و A و * ساخته شده‌اند که * یکی از ۵ حرف متمایز غیر A است:

$$\text{تعداد این دسته}=\binom{۵}{۱}\times\frac{۳!}{۲!}$$

دسته سوم: رمزهایی که از H و H و * ساخته شده‌اند که * یکی از ۵ حرف متمایز غیر H است:

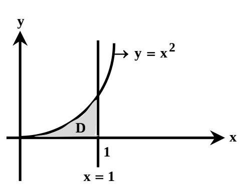
$$\text{تعداد این دسته}=\binom{۵}{۱}\times\frac{۳!}{۲!}$$

$$\text{جواب}=\binom{۶}{۳}\times ۳!+\binom{۵}{۱}\times\frac{۳!}{۲!}+\binom{۵}{۱}\times\frac{۳!}{۲!}=\frac{۶!۳!}{۳!۳!}+\frac{۵\times۶}{۲}+\frac{۵\times۶}{۲}=۱۲۰+۱۵+۱۵=۱۵۰$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۵۴ـ گزینه «۴» حجم ناحیه مورد نظر را به صورت $V=\iiint_D dzdydx$ می‌نویسیم.

حدود z عبارتند از صفحه‌ی xoy یعنی $z=۰$ و صفحه‌ی $z=x+۲y$. تصویر حجم مورد نظر در صفحه xoy ناحیه‌ی محدود به خط $y=۰$ و منحنی $y=x^۲$ و خط $x=۱$ است. مطابق شکل در این ناحیه $۰\le x\le ۱$ و $۰\le y\le x^۲$است.



بنابراین حجم استوانه مورد نظر برابر است با:

$$V=\int_۰^۱\int_۰^{x^۲}(x+۲y)\,dy\,dx=\int_۰^۱(xy+y^۲)\Big|_۰^{x^۲}dx=\int_۰^۱(x^۳+x^۴)dx=(\frac{x^۴}{۴}+\frac{x^۵}{۵})\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}=\frac{۹}{۲۰}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۵۵ـ گزینه «۳» با کمی دقت واضح است فرم کلی این سری عددی به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$ می‌باشد.

برای $n\to+\infty$ می‌توانیم از هم‌ارزی $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\sim \mathrm{Lnn})$ استفاده کنیم و سری داده شده را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\mathrm{Lnn})$

این سری یک سری متناوب است و دنباله‌ی $a_n=\frac{\mathrm{Lnn}}{n}$ نزولی و همگرا به صفر است (زیرا رشد مخرج از صورت بیشتر است).

پس طبق آزمون لایب‌نیتز سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\mathrm{Lnn})$ یک سری همگرا می‌باشد. اکنون برای تشخیص همگرایی مشروط یا مطلق باید سری مثبت $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Lnn}}{n}$ را بررسی کنیم و بهتر است از آزمون کوشی استفاده کنیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Lnn}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\times\frac{\mathrm{Ln}2^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ln}2^n=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{Ln}2$$

این سری یک سری واگرا می‌باشد، چرا که حد جمله‌ی عمومی آن ∞ است، بنابراین طبق آزمون کوشی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Lnn}}{n}$ نیز یک سری واگرا می‌باشد و این یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\mathrm{Lnn})$ فقط همگرایی مشروط دارد.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۵۶ـ گزینه «۱» قضیه: هرگاه دنباله‌ی a_n به L همگرا باشد، دنباله‌ی میانگین حسابی حاصل از a_n یعنی $S_n=\frac{1}{n}(a_1+\ldots+a_n)$ نیز به L همگرا است.

در این مسأله اگر قرار دهیم $a_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ و در صورتی‌که $a_n\to L$ باشد، آنگاه جواب مسأله برابر L خواهد شد. حد a_n را با استفاده از فرمول استرلینگ، محاسبه می‌کنیم:

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n\Rightarrow\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\sim\frac{1}{e}(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{e}\times1=\frac{1}{e}$$

پس جواب مسأله برابر $\frac{1}{e}$ خواهد بود.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۵۷ـ گزینه «۲»

روش اول: ابتدا سری A را بررسی می‌کنیم. با استفاده از مجموع n جمله از تصاعد هندسی داریم:

$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^n=\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2-(\frac{1}{2})^n$$

بنابراین داریم: $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2-(\frac{1}{2})^n}$. حد جمله‌ی عمومی این سری صفر نمی‌شود زیرا داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-(\frac{1}{2})^n}=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}\neq0$$

پس این سری شرط لازم برای همگرایی را ندارد و واگراست. اکنون سری B را بررسی می‌کنیم. ساده‌ترین روش برای این سری استفاده از آزمون نسبت است. در این سری داریم:

$$a_n=(\frac{1\times2\times3\times\cdots\times n}{3\times5\times7\times\cdots\times(2n+1)})^{\frac{1}{2}}\Rightarrow a_{n+1}=(\frac{1\times2\times3\times\cdots\times n\times(n+1)}{3\times5\times7\times\cdots\times(2n+1)\times(2n+3)})^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین با تقسیم a_{n+1} بر a_n و ساده کردن آن‌ها خواهیم داشت: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=(\frac{n+1}{2n+3})^{\frac{1}{2}}$ اکنون حد موردنظر در آزمون نسبت را به دست می‌آوریم:

$$L=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{2n+3})^{\frac{1}{2}}\Rightarrow L=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

پس سری B همگراست.

روش دوم: در مورد سری B می‌توانیم از آزمون رابه نیز استفاده کنیم. حد موردنظر در این آزمون به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L=\lim_{n\to\infty}n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})=\lim_{n\to\infty}n(1-(\frac{n+1}{2n+3})^{\frac{1}{2}})\Rightarrow L=\infty\times(1-\frac{1}{\sqrt{2}})=\infty$$

چون $L>1$ است، با توجه به آزمون رابه سری موردنظر همگراست.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۵۸ـ گزینه «۴» با توجه به تساوی $f'(x)=\frac{1}{x^2+f(x)^2}$ معلوم است که $0\le f'(x)\le\frac{1}{x^2}$. حالا با انتگرال‌گیری از طرفین در بازه‌ی $[1,t]$ داریم:

$$0\le\int_1^t f'(x)dx\le\int_1^t\frac{1}{x^2}dx\ \Rightarrow 0\le[f(x)]_1^t\le[-\frac{1}{x}]_1^t\ \Rightarrow 0\le f(t)-f(1)\le-\frac{1}{t}+1$$

طبق صورت سؤال $f(1)=1$ است. بنابراین داریم:

$$0\le f(t)-1\le 1-\frac{1}{t}$$

با اضافه کردن یک واحد به طرفین داریم:

$$1\le f(t)\le 2-\frac{1}{t}$$

این نامساوی نشان می‌دهد که وقتی $t\to\infty$ داریم:

$$1\le\lim_{t\to\infty}f(t)\le 2$$

پس ضمن اثبات گزینه (۴)، نادرست بودن سایر گزینه‌ها مشخص می‌شود.

۴۵۹ـ گزینه «۴» با توجه به این که $\bar{z}$ مزدوج عدد مختلط z می‌باشد، با فرض $w=z^3$ داریم $\bar{w}=(\bar{z})^3$، پس داریم:

$$2w+\bar{w}=1$$

اگر $w=x+iy$ را در معادله‌ی به دست آمده قرار دهیم، داریم:

$$2(x+iy)+(x-iy)=1\ \Rightarrow 3x+iy=1\xrightarrow{\text{باید}}x=\frac{1}{3}\ ,\ y=0$$

حال قرار می‌دهیم:

$$w=x+iy\ \Rightarrow w=\frac{1}{3}\ \Rightarrow z^3=w\ \Rightarrow z^3=\frac{1}{3}\ \Rightarrow z=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

اکنون باید ریشه‌های سوم عدد مختلط $\frac{1}{3}$ را به دست بیاوریم.

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}\ ,\ \operatorname{tg}\theta=0\ \Rightarrow\theta=0$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})\ ,\ k=0,1,2$$

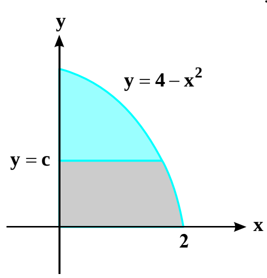
$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3})$$

$$k=0\ \Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(1+0)=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$k=1\ \Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$k=2\ \Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})$$

ملاحظه می‌کنید که جواب‌های به دست آمده همان جواب‌های موجود در گزینه‌ها (۱) و (۲) و (۳) هستند.



۴۶۰ـ گزینه «۲» با توجه به این که صفحه‌ی $y=c$ حجم جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به منحنی $y=4-x^2$ و محورهای مختصات در ربع اول حول محور yها به وجود می‌آید و این صفحه این ناحیه را به دو ناحیه با حجم‌های مساوی تقسیم می‌کند، پس حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی بالای خط $y=c$ و ناحیه‌ی پایین خط $y=c$ با هم برابر هستند. در واقع حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به سهمی و محور yها و خط $y=c$ نصف حجم کل می‌باشد. حال با استفاده از روش پوسته استوانه‌ای ابتدا حجم کل را به دست می‌آوریم.

حجم کل $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

$$V=2\pi\int_0^2 x(4-x^2)dx=2\pi\int_0^2(4x-x^3)dx=2\pi(2x^2-\frac{x^4}{4})_0^2=2\pi(8-4)=8\pi$$

اکنون حجم ناحیه‌ی بالای خط $y=c$ را به دست می‌آوریم (نقطه تلاقی سهمی و خط برابر $4-x^2=c\ \Rightarrow x=\sqrt{4-c}$ می‌باشد.)

$$V_1=2\pi\int_a^b x(f(x)-g(x))dx$$

$$V_1=2\pi\int_0^{\sqrt{4-c}}x(4-x^2-c)dx=2\pi(2x^2-\frac{x^4}{4}-c\frac{x^2}{2})_0^{\sqrt{4-c}}=2\pi(2(4-c))-\frac{(4-c)^2}{4}-\frac{c}{2}(4-c))$$

$$=2\pi(4-c)(2-\frac{(4-c)}{4}-\frac{c}{2})=2\pi(4-c)(\frac{8-4+c-2c}{4})=2\pi(4-c)\frac{(4-c)}{4}=\frac{\pi(4-c)^2}{2}$$

پس با توجه به این که حجم V_1 نصف حجم کل می‌باشد، داریم:

$$V_1=\frac{1}{2}V\Rightarrow\frac{\pi}{2}(4-c)^2=\frac{1}{2}(8\pi)\Rightarrow(4-c)^2=8\Rightarrow 4-c=2\sqrt{2}\Rightarrow c=4-2\sqrt{2}$$

۴۶۱ـ گزینه «۱» با استفاده از روش جزء به جزء حاصل انتگرال را به دست می‌آوریم:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

$$\begin{cases} u = \sin^2 x \Rightarrow du = 2\sin x \cos x\,dx \\ \dfrac{1}{x^2}dx = dv \Rightarrow -\dfrac{1}{x} = v \end{cases}$$

$$I = -\frac{\sin^2 x}{x}\Bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2\sin x\cos x}{x}dx = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\sin^2 x}{x}\right) - \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin^2 x}{x}\right) + \int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx$$

$$I = 0 - 0 + \int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx \xrightarrow[du=2dx]{u=2x} \int \frac{\sin u}{\frac{u}{2}}\left(\frac{1}{2}du\right) = \int_0^{+\infty} \sin u\,du = \frac{\pi}{2}$$

البته توجه داشته باشید که در حالت کلی حاصل انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{\sin(kx)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ $(k>0)$ می‌باشد، یعنی حاصل $\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx$ بدون استفاده از فرض برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۶۲ـ گزینه «۱» برای آن که بتوانیم یک حد را از انتگرال عبور دهیم، باید دنباله‌ی f_n همگرایی آن از نوع یکنواخت (uniformlly convergence) باشد، یعنی اگر دنباله‌ی $f_n(x)$ به عدد f در بازه $[a,b]$ همگرا باشد با قرار دادن دنباله‌ی x_n به جای x دوباره به عدد f همگرا شود.

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 n^c x(1-x^2)^n dx = n^c\int_0^1 x(1-x^2)^n dx \xrightarrow[-2xdx=du]{1-x^2=u} n^c\left(-\frac{1}{2}\right)\int u^n du = \frac{-n^c}{2}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)$$

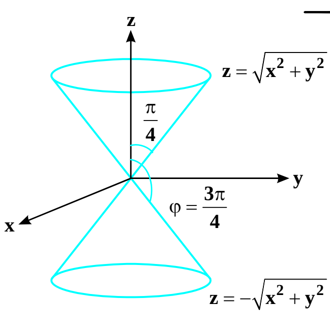
$$= \frac{-n^c}{2}\left(\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{-n^c}{2}\left(0-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^c}{2(n+1)}$$

با توجه به این که بازه‌ی انتگرال‌گیری $[0,1]$ می‌باشد، پس باید $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ برای $0 \le x \le 1$ محاسبه گردد. به ازای دو سر بازه یعنی $x=0$ و $x=1$ مقدار $f_n(x)=0$ می‌شود و حاصل حد نیز برابر صفر می‌شود.

برای $0<x<1$ مقدار $0<1-x^2<1$ می‌باشد، پس $\lim_{n\to\infty}(1-x^2)^n = 0$ می‌باشد و با توجه به این که c یک عدد ثابت است پس حاصل $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0$ است و برای آن که تساوی $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$ برقرار باشد باید حاصل $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0$ باشد، پس باید $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^c}{2(n+1)} = 0$ باشد و این یعنی توان n در صورت کسر که همان عدد c می‌باشد از توان n در مخرج کوچک‌تر باشد و چون توان مخرج برابر ۱ می‌باشد، پس توان صورت باید کوچک‌تر از ۱ بشود یعنی $c<1$ باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۶۳ـ گزینه «۲»



$$\operatorname{tg}^2 t = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\phi = \pm 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$\phi = \frac{\pi}{4}$ معادله‌ی مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ در مختصات کروی می‌باشد و معادله‌ی $\phi=\frac{3\pi}{4}$ معادله‌ی مخروط $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد و در حالت کلی معادله‌ی مخروط به صورت $z^2=x^2+y^2$ می‌باشد که شکل آن به صورت مقابل است.

◆ ◆ ◆ ◆

۴۶۴ـ گزینه «۱» با توجه به گزینه‌های داده شده z تابعی برحسب متغیرهای x و y می‌باشد.

با فرض $u=x^2+y^2+z^2$ و $v=z^2-2xy$ داریم $f(u,v)=0$. پس باید x و y و z را بین u و v حذف کنیم و شرط لازم و کافی برای این کار آن است که $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$ باشد.

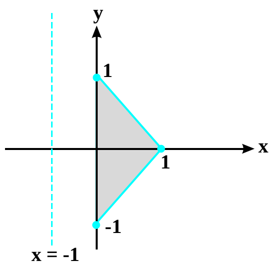
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x+2zz_x & 2y+2zz_y \\ 2zz_x-2y & 2zz_y-2x \end{vmatrix} = 0$$

برای محاسبه‌ی این دترمینان سطر دوم را از سطر اول کم می‌کنیم و سپس حاصل را در سطر دوم قرار می‌دهیم تا عامل‌های مشترک $2zz_x$ و $2zz_y$ حذف شوند و دترمینان ساده‌تر بشود.

$$\begin{vmatrix} 2x+2zz_x & 2y+2zz_y \\ -2x-2y & -2x-2y \end{vmatrix} = 2(-2x-2y)\begin{vmatrix} x+zz_x & y+zz_y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2x-2y)(x+zz_x-zz_y-y)=0 \Rightarrow x+zz_x-zz_y-y=0$$

$$z(z_x-z_y)=y-x \Rightarrow z_x-z_y=\frac{y-x}{z} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-x}{z}$$

◆ ◆ ◆ ◆



۴۶۵ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه محور دوران یعنی خط $x=-1$ ناحیه‌ی مثلثی را قطع نمی‌کند، برای محاسبه‌ی حجم ناحیه‌ی حاصل از دوران از قضیه‌ی پاپوس استفاده می‌کنیم که به‌صورت مقابل است.
حجم حاصل از دوران یک ناحیه، حول محوری که ناحیه را قطع نمی‌کند برابر است با حاصل‌ضرب مساحت ناحیه در محیط پیموده شده توسط مرکز ثقل ناحیه.

با توجه به شکل مساحت مثلث برابر است با: $S=\frac{1}{2}\times \text{قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$

مرکز ثقل مثلث برابر است با میانگین همه رئوس آن، یعنی: $\begin{cases}\bar{x}=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{0+1+0}{3}=\frac{1}{3}\\ \bar{y}=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{-1+0+1}{3}=0\end{cases}\Rightarrow G(\frac{1}{3},0)$

فاصله‌ی نقطه‌ی G تا خط $x=-1$ که همان محور دوران است برابر است با: $d=|\frac{1}{3}-(-1)|=\frac{4}{3}$

پس طبق قضیه‌ی پاپوس داریم: $V=2\pi\times$ (فاصله‌ی مرکز ثقل از محور دوران) $\times$ (مساحت ناحیه‌ی مورد نظر) حجم

$$V=2\pi\times(1)\times\frac{4}{3}=\frac{8\pi}{3}$$

۴۶۶ـ گزینه «۲» انتگرال‌های به فرم $\int_0^a\frac{dx}{x^P}\ (a>0)$ به ازای $P\ge 1$ واگرا و به ازای $P<1$ همگرا هستند.

در انتگرال گزینه (۲) چون این انتگرال در $x=0$ ناسرگی دارد، داریم: $\int_0^1\frac{\cos x}{x^2}dx\sim\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$

چون $P=2>1$ می‌باشد، پس این انتگرال واگراست. اکنون سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): این انتگرال در $x=1$ ناسرگی دارد، پس داریم:
$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}=\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}(2\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

انتگرال‌های به فرم $\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^P}$ برای $P<1$ همگرا و برای $P\ge 1$ واگرا هستند و در این‌جا چون $P=\frac{1}{2}<1$ می‌باشد، این انتگرال یک انتگرال همگراست.

برای بررسی گزینه (۳) و گزینه (۴) دو قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱: هرگاه $f(x)\ge 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^Pf(x)=A$ باشد، با توجه به وضعیت A و P داریم:

۱) اگر $P>1$ و A متناهی باشد، می‌توان نتیجه گرفت $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ همگراست.

۲) اگر $P\le 1$ و A مخالف صفر باشد (A می‌توان بی‌نهایت نیز باشد) می‌توان نتیجه گرفت.

قضیه ۲: اگر $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^Pf(x)=A, f(x)\ge 0$ باشد، با توجه به وضعیت A و P دو حالت زیر را داریم:

۱) اگر $P<1$ و A متناهی باشد، می‌توان نتیجه گرفت $\int_a^b f(x)dx$ همگراست.

۲) اگر $P\ge 1$ و $A\ne 0$ (می‌تواند بی‌نهایت نیز باشد) می‌توان نتیجه گرفت $\int_a^b f(x)dx$ واگراست.

اکنون به بررسی گزینه (۳) می‌پردازیم:

این انتگرال در $x=0$ و در $x=1$ ناسرگی دارد، پس باید بازه انتگرال را به دو قسمت تقسیم کنیم.

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-Lnx}}\xrightarrow[x=e^{-t}]{-Lnx=t}-\int_\infty^0\frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}}=\int_0^\infty\frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}}=\int_0^1\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt+\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}}$$

اکنون انتگرال I_1 را با استفاده از قضیه دوم و انتگرال I_2 را با استفاده از قضیه اول بررسی می‌کنیم.

$\lim\limits_{t\to\infty}t^2(\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}})=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t\sqrt{t}}=0\Rightarrow$ چون $P=2>1$ و A عددی متناهی است I_2 همگراست

$\lim\limits_{t\to 0^+}t^{\frac{1}{2}}(\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}})=\lim\limits_{t\to 0^+}(\frac{e^{-t}}{1})=e^0=1\Rightarrow$ چون $P=\frac{1}{2}<1$ و A عددی متناهی است انتگرال I_1 هم همگراست

پس در کل یک انتگرال همگراست.

بررسی گزینه (۴): با استفاده از قضیه دوم داریم:
$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\operatorname{Ln}(\sin x) \sim \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\operatorname{Ln}(x) = 0\times(-\infty)$$
برای رفع ابهام از این حالت عکس عامل صفر کننده را در مخرج کسر قرار می‌دهیم تا به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل شود و سپس با استفاده از هوپیتال آن را رفع ابهام می‌کنیم.
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{Ln}x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+}(-2\sqrt{x}) = 0$$
چون $P=\frac{1}{2}<1$ و A متناهی می‌باشد $(A=0)$ پس این انتگرال هم همگراست.

۴۶۷ـ گزینه «۲» فاصله نقطه (x,y) در صفحه‌ی xoy از مبدأ مختصات یعنی نقطه‌ی $(0,0)$ برابر است با $\sqrt{x^2+y^2}$ که این رادیکال را اگر در مختصات قطبی بخواهیم بررسی کنیم برابر r می‌باشد. اکنون برای آن که بخواهیم کمترین مقدار r را به دست آوریم، معادله‌ی منحنی را در دستگاه مختصات قطبی می‌نویسیم و داریم:
$$r^2\cos^2\theta + 8(r\cos\theta)(r\sin\theta) + 7r^2\sin^2\theta = 225 \Rightarrow r^2(\cos^2\theta + 8\cos\theta\sin\theta + 7\sin^2\theta) = 225$$
$$\Rightarrow r^2(1-\sin^2\theta + 4\sin 2\theta + 7\sin^2\theta) = 225 \Rightarrow r^2(1+6\sin^2\theta + 4\sin 2\theta) = 225 \Rightarrow r^2(1+6(\frac{1-\cos 2\theta}{2}) + 4\sin 2\theta) = 225$$
$$\Rightarrow r^2(1+3-3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta) = 225 \Rightarrow r^2 = \frac{225}{4-3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta}$$
برای آن که این کسر مینیمم بشود، مخرج آن باید ماکسیمم شود. با توجه به این که همواره $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin u + b\cos u \le \sqrt{a^2+b^2}$ می‌باشد، داریم:
$$-\sqrt{16+9} \le 4\sin 2\theta - 3\cos 2\theta \le \sqrt{16+9} \Rightarrow -1 \le 4 + 4\sin 2\theta - 3\cos 2\theta \le 9$$
پس با توجه به این که ماکسیمم مقدار مخرج برابر ۹ است، داریم:
$$\min(r^2) = \frac{225}{9} = 25 \Rightarrow \min(r) = 5$$

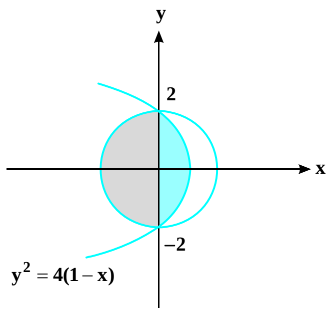
۴۶۸ـ گزینه «۳» با توجه به این که می‌خواهیم یک رابطه بین مشتق ماتریس معکوس A و مشتق ماتریس A پیدا کنیم، از رابطه‌ی $AA^{-1}=I$ استفاده می‌کنیم و از دو طرف این تساوی نسبت به متغیر t مشتق می‌گیریم (توجه داشته باشد که ماتریس A یک ماتریس وابسته به زمان t می‌باشد که معکوس این ماتریس هم به متغیر t وابسته است):
$$AA^{-1} = I$$
$$\frac{dA}{dt}A^{-1} + A\frac{dA^{-1}}{dt} = 0 \Rightarrow A\frac{dA^{-1}}{dt} = -\frac{dA}{dt}A^{-1}$$
اکنون دو طرف تساوی را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم و داریم:
$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1} \Rightarrow \frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$$

۴۶۹ـ گزینه «۲» با توجه به این که در گزینه‌ها مشتق‌پذیر بودن تابع بررسی شده است، باید ابتدا ببینیم که تابع $f(x)$ در چه نقاطی پیوسته است و به همین دلیل باید دو ضابطه‌ی تابع به ازای $x\in\mathbb{Q}$ و $x\notin\mathbb{Q}$ را مساوی یکدیگر قرار دهیم و داریم:
$$x^2 = 2x-1 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$$
این تابع فقط در $x=1$ پیوسته است و در بقیه نقاط به جز $x=1$ ناپیوسته است و در نتیجه در $x\neq 1$ مشتق‌پذیر نیز نمی‌باشد.

اکنون باید مشتق‌پذیر بودن تابع را در $x=1$ که به بازه $(0,2)$ نیز تعلق دارد بررسی کنیم:
$$f'(x) = \begin{cases} 2x \\ 2 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases}$$
چون هر دو ضابطه‌ی تابع مقدار مشتق آن‌ها در نقطه‌ی $x=1$ برابر ۲ می‌باشد، پس $f(x)$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است و $f'(1)=2$ می‌باشد و این یعنی گزینه (۲) صحیح است.

۴۷۰ـ گزینه «۲» با توجه به این که $tg(tg^{-1}x)=x$ و برای $x>0$ نیز $tg^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x$ می‌باشد، از طرفین معادله‌ی داده شده تانژانت می‌گیریم و با استفاده از رابطه‌ی مثلثاتی $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$ داریم:
$$tg(tg^{-1}x - \cot^{-1}x) = tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{tg(tg^{-1}x) - tg(\cot^{-1}x)}{1+tg(tg^{-1}x)tg(\cot^{-1}x)} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x-\frac{1}{x}}{1+x(\frac{1}{x})} = 1 \Rightarrow x-\frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2-2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2} = \frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$$
چون با شرط $x>0$ به این جواب‌ها رسیدیم پس فقط جواب $1+\sqrt{2}$ قابل قبول است.

۴۷۱ـ گزینه «۲» ابتدا باید محل تقاطع دو منحنی را به‌دست آوریم و سپس ناحیه درون دایره و داخل سهمی را مشخص کنیم تا بتوانیم مساحت این ناحیه را محاسبه کنیم:



$$\begin{cases} y^۲ = ۴(۱-x) \\ y^۲ + x^۲ = ۴ \end{cases} \Rightarrow ۴ - x^۲ = ۴ - ۴x \Rightarrow x(x-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴ \end{cases}$$

به ازای $x = ۴$ داریم: $y^۲ = ۴(۱-۴) \Rightarrow y^۲ = -۱۲$

که این غیرقابل قبول است، پس محل تقاطع دو منحنی در $x = ۰$ می‌باشد که به ازای این x داریم:

$$y^۲ + x^۲ = ۴ \xrightarrow{x=۰} y^۲ = ۴ \Rightarrow y = \pm ۲$$

پس این دو منحنی یکدیگر را در دونقطه $(۰,۲)$ و $(۰,-۲)$ قطع می‌کنند، ناحیه موردنظر شامل یک نیم دایره در سمت چپ محور y ها می‌باشد که مساحت این نیم‌دایره برابر است با: $\frac{۱}{۲}\pi R^۲ = \frac{۱}{۲}\pi(۴) = ۲\pi$

همچنین این مساحت شامل ناحیه بین سهمی و محور y ها نیز می‌باشد که مساحت این ناحیه را با استفاده از فرمول $s = \int f(y)\,dy$ به‌دست می‌آوریم.

$$\text{مساحت} = \int_{-۲}^{۲} x\,dy = \int_{-۲}^{۲}(۱-\frac{y^۲}{۴})dy = ۲\int_{۰}^{۲}(۱-\frac{y^۲}{۴})dy = ۲(y-\frac{y^۳}{۱۲})_{۰}^{۲} = ۲(۲-\frac{۸}{۱۲}) = ۲(۲-\frac{۲}{۳}) = ۲(\frac{۴}{۳}) = \frac{۸}{۳}$$

پس مساحت کل ناحیه موردنظر برابر است با: $S_{\text{کل}} = ۲\pi + \frac{۸}{۳}$

۴۷۲ـ گزینه «۲»

روش اول: در انتگرال‌هایی که به‌صورت ضرب سینوس و کسینوس با توان فرد می‌باشد، توان عامل با توان کوچک‌تر را می‌شکنیم و آن‌را به‌صورت زیربازنویسی می‌کنیم تا بتوانیم سینوس و کسینوس را که مشتق یکدیگر هستند در کنار هم ایجاد کنیم (طوری باید تجزیه کنیم که توان یکی از عامل‌ها یک بشود یعنی یا توان $\sin x$ و یا $\cos x$)

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x \sin^۲ x \cos^۵ x\,dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x(۱-\cos^۲ x)\cos^۵ x\,dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x \cos^۵ x\,dx - \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x \cos^۷ x\,dx$$

اکنون با تغییر متغیر $u = \cos x$ و $du = -\sin x\,dx$ در هر دو انتگرال، داریم:

$$-\int u^۵ du + \int u^۷ du = \frac{-u^۶}{۶} + \frac{u^۸}{۸} = (\frac{-(\cos^۶ x)}{۶} + \frac{(\cos x)^۸}{۸})_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = (۰-(-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸})) = (-(\frac{-۴+۳}{۲۴})) = \frac{۱}{۲۴}$$

روش دوم: با استفاده از خواص توابع بتا و گاما هم می‌توان به این سؤال پاسخ داد. با توجه به رابطه‌ی $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲m-۱} x \cos^{۲n-۱} x\,dx = \frac{۱}{۲}\beta(m,n)$ داریم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۳ x \cos^۵ x\,dx \xrightarrow[۲n-۱=۵\ \Rightarrow n=۳]{۲m-۱=۳\ \Rightarrow m=۲} \frac{۱}{۲}\beta(۲,۳)$$

همچنین با استفاده از رابطه‌های $m,n > ۰$ و $\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ و $\Gamma(\alpha+۱) = \alpha!$ داریم: $\text{حاصل انتگرال} = \frac{۱}{۲}\frac{\Gamma(۲)\Gamma(۳)}{\Gamma(۵)} = \frac{۱}{۲}\times\frac{(۱!)(۲!)}{۴!} = \frac{۱}{۴!} = \frac{۱}{۲۴}$

۴۷۳ـ گزینه «۲»

روش اول: باتوجه به‌این‌که دستگاه مختصات به‌اندازه $\frac{\pi}{۶}$ دوران می‌کند، می‌توانیم نقطه $M(\sqrt{۳},۳)$ را به‌اندازه $(\frac{-\pi}{۶})$ دوران دهیم، ولی دستگاه ثابت بماند.

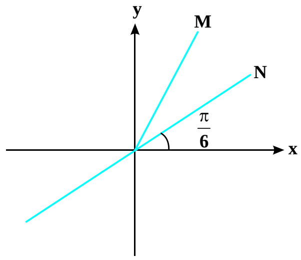
ماتریس دوران به‌اندازه $\theta = \frac{-\pi}{۶}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow R_{(-\frac{\pi}{۶})} = \begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{۶}) & -\sin(-\frac{\pi}{۶}) \\ \sin(-\frac{\pi}{۶}) & \cos(-\frac{\pi}{۶}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$$

مختصات نقطه جدید برابر است با:

$$M' = R_{(-\frac{\pi}{۶})}.M \Rightarrow M' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{۳} \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow M\begin{bmatrix} \frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} ۳ \\ \sqrt{۳} \end{bmatrix}$$

روش دوم: توجه داشته باشید که اگر محورهای مختصات را دوران دهیم، فاصله نقطه تا مبدأ تغییری نمی‌کند و با توجه به اینکه فاصله نقطه M تا مبدأ برابر $\sqrt{۱۲} = \sqrt{۳+۹}$ می‌باشد، فقط در گزینه (۲) یعنی نقطه $(۳,\sqrt{۳})$ فاصله این نقطه تا مبدأ برابر $\sqrt{۱۲}$ می‌باشد و این یعنی گزینه (۲) صحیح است.



۴۷۴ـ گزینه «۴» بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه $x_\circ$ به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x) \simeq f(x_\circ)+f'(x_\circ)\frac{(x-x_\circ)^۱}{۱!}+f''(x_\circ)\frac{(x-x_\circ)^۲}{۲!}+\cdots+f^{(n)}(x_\circ)\frac{(x-x_\circ)^n}{n!}$$

حال اگر در این بسط قرار دهیم $\Delta x = x - x_\circ$ و از روی آن $x = x_\circ + \Delta x$ را به دست آوریم، فرمول کلی تقریب خطی به دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$f(x_\circ+\Delta x) \simeq f(x_\circ)+f'(x_\circ)\frac{(\Delta x)^۱}{۱!}+f''(x_\circ)\frac{(\Delta x)^۲}{۲!}+\cdots+f^{(n)}(x_\circ)\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

حال اگر f تابعی مشتق‌پذیر و دارای مشتق مرتبه دوم باشد و α نقطه‌ای بین $x_\circ$ و $x_\circ+\Delta x$ باشد، در این صورت داریم:

$$\Delta y - dy = \frac{f''(\alpha)}{۲!}(\Delta x)^۲$$

و اگر مشتق دوم کران‌دار باشد و کوچک‌ترین کران بالای آن را k بنامیم داریم:

$$|\Delta y - dy| \le \frac{k}{۲}(\Delta x)^۲$$

پس در این مثال اگر $f(\alpha)=\sin\alpha$ را در نظر بگیریم، عبارت $\sin\alpha + x\cos\alpha$ در واقع عمل تقریب خطی در نقطه‌ی $(\alpha+x)$ است و داریم:

$$f(\alpha)=\sin\alpha \Rightarrow f'(\alpha)=\cos\alpha$$

پس داریم:

$$\sin(\alpha+x)\simeq\sin(\alpha)+x\cos\alpha \Rightarrow |\sin(\alpha+x)-\sin\alpha-x\cos\alpha| = |\frac{f''(c)}{۲!}(x^۲)| = \frac{۱}{۲}|\sin c|x^۲$$

که با توجه به نکته‌ی گفته شده c نقطه‌ای بین α و $\alpha+x$ است و داریم:

$$\frac{۱}{۲}|\sin c|x^۲ \xrightarrow{|\sin c|\le ۱} \frac{۱}{۲}kx^۲ \xrightarrow{k=۱} \frac{۱}{۲}x^۲$$

توجه داشته باشید که مشتق دوم $\sin\alpha$ برابر $-\sin\alpha$ می‌باشد که در بالا قدرمطلق آن منظور شده است.

۴۷۵ـ گزینه «۳» با استفاده از فرمول مجموع به حاصل‌ضرب، ابتدا حد داده شده را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\sin\alpha-\sin\beta = ۲\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt[۳]{x+۱}-\sin\sqrt[۳]{x}) = ۲\sin(\frac{\sqrt[۳]{x+۱}-\sqrt[۳]{x}}{۲})\cos(\frac{\sqrt[۳]{x+۱}+\sqrt[۳]{x}}{۲})$$

اکنون در پرانتز اول حالت مبهم $\infty-\infty$ را داریم که برای رفع ابهام از این حالت، باید کل کسر را در مزدوج صورت آن ضرب و تقسیم کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{۲}(\sqrt[۳]{x+۱}-\sqrt[۳]{x})\times\frac{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}+\sqrt[۳]{x(x+۱)}+\sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}+\sqrt[۳]{x(x+۱)}+\sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{۱}{۲}\lim_{x\to+\infty} = \frac{(x+۱)-x}{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{۱}{۲}\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} = ۰$$

با توجه به اینکه $\underset{u\to ۰}{\sin u \sim u}$ می‌باشد، پس کل عامل اول یعنی $\sin(\frac{\sqrt[۳]{(x+۱)}-\sqrt[۳]{x}}{۲})$ به صفر میل می‌کند، عامل دوم نیز به‌صورت $\cos(\frac{۲\sqrt[۳]{x}}{۲})$ تبدیل می‌شود که وقتی $x\to+\infty$ یک عامل کراندار می‌شود، پس کل حاصل حد به‌صورت (کراندار $\times ۰$) می‌شود که این یعنی حاصل حد صفر است.

۴۷۶ـ گزینه «۴» با استفاده از نتیجه هم‌ارزی استرلینگ وقتی $n\to+\infty$ داریم:

$$\sqrt[n]{(an+b)!} \sim (\frac{an}{e})^a$$

که دراین هم‌ارزی اگر $a=۱$ و $b=۰$ باشد، داریم:

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$$

پس درحد داده شده در صورت و مخرج آن هم‌ارزی‌های فوق را قرار می‌دهیم و داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\times\frac{\sqrt[n]{(۲n+۱)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\times(\frac{(\frac{۲n}{e})^۲}{\frac{n}{e}}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\times(\frac{(\frac{۴n^۲}{e^۲})}{\frac{n}{e}}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{۴n^۲e}{n^۲e^۲} = \frac{۴}{e}$$

۴۷۷ـ گزینه «۲» با استفاده از رابطه $\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$ داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{1}{\cos^2 2x}\times\frac{1}{\cos^2 2x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}(1+tg^2 2x)(1+tg^2 2x)dx$$

اکنون با استفاده از تغییر متغیر $u=tg2x$ داریم:

$$du=2(1+tg^2 2x)dx$$

پس قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{2}\int(1+u^2)du=\frac{1}{2}\left(u+\frac{u^3}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(tg2x+\frac{tg^3 2x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

۴۷۸ـ گزینه «۲»

روش اول: ابتدا با استفاده از آزمون مشتق، نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم. سپس مقدار تابع را در مجموعه‌ای از آن نقاط که در بازه داده شده قرار دارند، به‌علاوه مقدار تابع در دو سر بازه‌ها را محاسبه می‌کنیم تا مینیمم و ماکزیمم آن به‌دست آید:

$$f(x,y)=(x^2-4x)\cos y$$

$$\begin{cases}f_x=(2x-4)\cos y=0\\ f_y=-(x^2-4x)\sin y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=n\pi\end{cases},\quad \begin{matrix}x=0,4\\ y=\frac{(2n+1)\pi}{2}\end{matrix}$$

در بازه داده شده، تنها نقطه بحرانی، $(2,0)$ است. حالا داریم:

$$\left.\begin{matrix}f(2,0)=(4-8)\cos 0=-4\\ f(1,\pm\frac{\pi}{4})=(1-4)\cos(\pm\frac{\pi}{4})=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ f(3,\pm\frac{\pi}{4})=(9-12)\cos(\pm\frac{\pi}{4})=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f_{min}=-4\ ,\ f_{max}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

روش دوم: با توجه به این‌که برای $-\frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{4}$ داریم $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos y\le 1$، پس می توانیم مسئله را به یافتن اکسترمم $g(x)=x^2-4x$ تبدیل کنیم. در این حالت خواهیم داشت:

$$g(x)=x^2-4x\Rightarrow g'(x)=2x-4=0\Rightarrow x=2$$

به ازای $x=2$، مقدار تابع دو متغیره ما در نامساوی $-2\sqrt{2}\le(x^2-4x)\cos y\le -4$ صدق می‌کند. همچنین مانند روش اول، مقدار تابع دو متغیره را در نقاط انتهای بازه‌ها نیز محاسبه می‌کنیم و به نتیجه مشابه می‌رسیم:

$$\left.\begin{matrix}-2\sqrt{2}\le f(2,y)\le -4\\ f(1,\pm\frac{\pi}{4})=(1-4)\cos(\pm\frac{\pi}{4})=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ f(3,\pm\frac{\pi}{4})=(9-12)\cos(\pm\frac{\pi}{4})=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f_{min}=-4\ ,\ f_{max}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

۴۷۹ـ گزینه «۴» برای حل این انتگرال، از دو روش می‌توان کمک گرفت:

روش اول: با استفاده از رابطه $e^{ix}=\cos x+i\sin x$، می‌توان فهمید که انتگرال خواسته شده، درواقع قسمت حقیقی انتگرال $J=\int_0^\infty x^2e^{ix}e^{-x}dx$ است. درنتیجه داریم:

$$J=\int_0^\infty x^2e^{x(i-1)}dx$$

x^2	$+$	$e^{x(i-1)}$
$2x$	$-$	$\frac{1}{i-1}e^{x(i-1)}$
2	$+$	$\frac{1}{(i-1)^2}e^{x(i-1)}=\frac{i}{2}e^{x(i-1)}$
0		$\frac{i}{2(i-1)}e^{x(i-1)}$

$$J=\frac{x^2e^{-x}}{i-1}e^{ix}\Big|_0^\infty-\frac{2ixe^{-x}}{2}e^{ix}\Big|_0^\infty+\frac{2ie^{-x}}{2(i-1)}e^{ix}\Big|_0^\infty=0-0+\left(0-\frac{i}{(i-1)}\right)=\frac{-i(-i-1)}{(i-1)(-i-1)}=\frac{-1+i}{1+1}=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$$

در محاسبه حدود ۳ تابع به‌دست‌آمده در بی‌نهایت، توجه داشته باشید که عامل e^{-x}، که درواقع به‌صورت e^{x} در مخرج قرار می‌گیرد، به‌مراتب سرعت رشد بیشتری نسبت به عوامل صورت دارد، درنتیجه بنا با قانون رشد، حد آن صفر است.

حالا با توجه به اینکه انتگرال خواسته شده، فقط قسمت حقیقی انتگرال J است، حاصل آن برابر است با: $\operatorname{Re}\{-\frac{۱}{۲}+i\frac{۱}{۲}\}=-\frac{۱}{۲}$

روش دوم: به خاطر سپردن دو رابطه زیر می‌توان در چنین مواردی به صرفه‌جویی در وقتتان در جلسه آزمون، کمک شایانی کند:

$$۱)\int_{۰}^{\infty}e^{-ax}\sin(bx)dx=\frac{b}{a^{۲}+b^{۲}},\ (a>۰)\qquad ۲)\int_{۰}^{\infty}e^{-ax}\cos(bx)dx=\frac{a}{a^{۲}+b^{۲}},\ (a>۰)$$

در نگاه اول، شاید این انتگرال‌ها با انتگرال مورد سؤال تفاوت داشته باشند؛ ولی درصورتی‌که از طرفین انتگرال (۲)، ۲ بار نسبت به a مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\int_{۰}^{\infty}e^{-ax}\cos(bx)dx=\frac{a}{a^{۲}+b^{۲}}\xrightarrow{\frac{d}{da}}\int_{۰}^{\infty}(-x)e^{-ax}\cos(bx)dx=\frac{b^{۲}-a^{۲}}{(a^{۲}+b^{۲})^{۲}}\xrightarrow{\frac{d}{da}}\int_{۰}^{\infty}(-x)^{۲}e^{-ax}\cos(bx)dx=\frac{۲a^{۳}-۶ab^{۲}}{(a^{۲}+b^{۲})^{۳}}$$

در انتگرال به‌دست‌آمده، با جایگذاری $a=b=۱$ داریم: $I=\frac{۲-۶}{(۱+۱)^{۳}}=\frac{-۴}{۸}=-\frac{۱}{۲}$

۴۸۰ـ گزینه «۴»

روش تشریحی: برای حل این انتگرال با روش تشریحی، ابتدا با یک تغییر متغیر ساده $t=\pi-\theta$، آن را به فرم $I=\int_{۰}^{۲\pi}\frac{d\theta}{۱+\sin^{۲}\theta}$ می‌نویسیم. حال با توجه به این‌که تابع زیر انتگرال، تابع زوجی از $\sin t$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$I=\int_{۰}^{۴\frac{\pi}{۲}}\frac{dt}{۱+\sin^{۲}t}=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dt}{۱+\sin^{۲}t}=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\frac{dt}{\sin^{۲}t}}{\frac{۱}{\sin^{۲}t}+۱}=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\frac{dt}{\sin^{۲}t}}{۱+\cot^{۲}t+۱}=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\frac{dt}{\sin^{۲}t}}{۲+\cot^{۲}t}$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $u=\cot t$ داریم:

$$u=\cot t\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{-dt}{\sin^{۲}t}\\ t\to۰^{+}\Rightarrow u\to\infty\\ t=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow u=۰\end{cases}\Rightarrow I=۴\int_{\infty}^{۰}\frac{-du}{۲+u^{۲}}=۴\int_{۰}^{\infty}\frac{du}{۲+u^{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}\tan^{-۱}\frac{u}{\sqrt{۲}}\Big|_{۰}^{\infty}=۲\sqrt{۲}(\frac{\pi}{۲}-۰)=\sqrt{۲}\pi$$

روش تستی: بعد از ساده‌سازی فرم انتگرال به شکل $I=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dt}{۱+\sin^{۲}t}$، با توجه به این‌که تابع زیر انتگرال همواره پیوسته و مقدار آن در دو سر بازه انتگرال برابر نیست، از این روش تقریبی برای محاسبه انتگرال کمک می‌گیریم:

$$I=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dt}{۱+\sin^{۲}t}\approx۴(\frac{\pi}{۲}-۰)f(\frac{۰+\frac{\pi}{۲}}{۲})=۲\pi\times f(\frac{\pi}{۴})=\frac{۲\pi}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۴\pi}{۳}\approx۱.۳۳\pi$$

با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{۲}=۱/۴$، گزینه «۴» نزدیک‌ترین گزینه به این مقدار است.

۴۸۱ـ گزینه «۱» برای حل این سؤال، از دو روش اقدام می‌کنیم:

روش اول: با توجه به این‌که توان تابع $\sin\theta$ در زیر انتگرال، زوج است، از فرمول طلایی برای کاهش توان کمک می‌گیریم:

$$I=\int_{۰}^{\pi}\sin^{۶}\theta d\theta=\int_{۰}^{\pi}(\frac{۱-\cos۲\theta}{۲})^{۳}d\theta=\frac{۱}{۸}\int_{۰}^{\pi}(۱-۳\cos۲\theta+۳\cos^{۲}۲\theta+\cos^{۳}۲\theta)d\theta$$

از طرفی برای توان‌های فرد تابع $\cos a\theta$، در هر بازه به طول ضریبی صحیح از دوره تناوب آن ($\frac{۲\pi}{|a|}$) که در این مثال $\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ است، انتگرال برابر صفر خواهد بود. در نتیجه، می‌توانیم از آن‌ها در تابع زیر انتگرال چشم‌پوشی کنیم:

$$I=\frac{۱}{۸}\int_{۰}^{\pi}[۱+۳(\frac{۱+\cos۴\theta}{۲})]d\theta=\frac{۱}{۸}\int_{۰}^{\pi}(\frac{۵}{۲})d\theta=\frac{۱}{۸}\times\frac{۵}{۲}\times\pi=\frac{۵\pi}{۱۶}$$

روش دوم: درصورتی‌که خواص توابع بتا و گاما، ازجمله $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{۲m-۱}\theta\cos^{۲n-۱}\theta d\theta=\frac{۱}{۲}\beta(m,n)$، $\Gamma(\alpha+۱)=\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha!$ و $\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi}$ را به خاطر سپرده باشید، می‌توانیم ابتدا با استفاده از خاصیت زوج بودن تابع زیر انتگرال نسبت به $\sin\theta$، آن را به فرم $I=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{۶}\theta d\theta$ بنویسیم؛ سپس داریم:

$$2m-1=6 \Rightarrow m=\frac{7}{2} \;,\; 2n-1=0 \Rightarrow n=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I=2\times\frac{1}{2}\beta(\frac{7}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})}=\frac{\Gamma(\frac{5}{2}+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4)}=\frac{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2})\sqrt{\pi}}{3!}=\frac{5\sqrt{\pi}}{12}\Gamma(\frac{3}{2}+1)=\frac{5\sqrt{\pi}}{12}\times\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})$$

$$=\frac{5\sqrt{\pi}}{8}\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{5\sqrt{\pi}}{8}\times\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{5\sqrt{\pi}}{16}\times\sqrt{\pi}=\frac{5\pi}{16}$$

۴۸۲ـ گزینه «۳» با توجه به رابطه اصلی گرادیان یک تابع، داریم:

$$\vec{\nabla}f(x,y,z)=(x,y,z)\Rightarrow(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=(x,y,z)$$

یک روش حل این دستگاه معادله دیفرانسیلی، انتگرال‌گیری نسبت به یک متغیر و تعریف تابع‌های تکمیلی و مشتق‌گیری از آن‌ها و قرار دادن آن‌ها در دستگاه اولیه است. ولی در این مورد، به‌سادگی می‌توان فهمید که تابع f درواقع همان $[\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+c]$ است. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱» درست است. $\quad 1)\; f(-1,1,0)=\frac{1}{2}(1+1+0)+c=\frac{1}{2}(0+0+2)+c=f(0,0,\sqrt{2})$

گزینه «۲» درست است. $\quad 2)\; f(1,-1,0)=\frac{1}{2}(1+1+0)+c=\frac{1}{2}(1+0+1)+c=f(1,0,1)$

گزینه «۳» نادرست است. $\quad 3)\; f(1,-\sqrt{2},1)=\frac{1}{2}(1+2+1)+c\neq\frac{1}{2}(2+1+2)+c=f(\sqrt{2},-1,-\sqrt{2})$

گزینه «۴» درست است. $\quad 4)\; f(\sqrt{2},-1,0)=\frac{1}{2}(2+1+0)+c=\frac{1}{2}(1+1+1)+c=f(1,-1,-1)$

۴۸۳ـ گزینه «۴» ابتدا نقاط بحرانی تابع f را می‌یابیم، یعنی جاهایی که در آن‌ها مشتق تابع صفر است و یا موجود نیست:

واضح است که $x=0,-1$ نقاط بحرانی f هستند چرا که f' در این نقاط تعریف نشده است:

$$f'(x)=1-\frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}\xrightarrow{f'(x)=0}1=\frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}=3x^2+2x=x(3x+2)\xrightarrow{\text{به‌توان}3}$$

$$27\underbrace{(x^3+x^2)^2}_{(x^2(x+1))^2}=x^3(3x+2)^3\Rightarrow 27x^4(x+1)^2=x^3(27x^3+54x^2+36x+8)\xrightarrow{\div x^3}$$

$$27x(x^2+2x+1)=27x^3+54x^2+36x+8\Rightarrow\cancel{27x^3}+\cancel{54x^2}+27x=\cancel{27x^3}+\cancel{54x^2}+36x+8$$

$$\Rightarrow -9x=8\Rightarrow x=\frac{-8}{9}\;,\; f(-\frac{8}{9})=-\frac{4}{3}$$

از طرفی $f(0)=0$ و $f(-1)=-1$ لذا ماکزیمم f برابر با صفر و مینیمم آن برابر با $-\frac{4}{3}$ است. لذا برد به‌صورت $\left[-\frac{4}{3},0\right]$ است.

۴۸۴ـ گزینه «۲» به کمک انتگرال معین مساحت مورد نظر را محاسبه می‌کنیم، بنابراین:

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

با تغییر متغیر $x=\frac{\pi}{2}-t$، $dx=-dt$ داریم:

$$A=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}-t)\cos(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin(\frac{\pi}{2}-t)+\cos(\frac{\pi}{2}-t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t\sin t}{\cos t+\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\cos xdx}{\sin x+\cos x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\sin xdx}{\sin x+\cos x})=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x(\cancel{\sin x+\cos x})dx}{\cancel{\sin x+\cos x}}$$

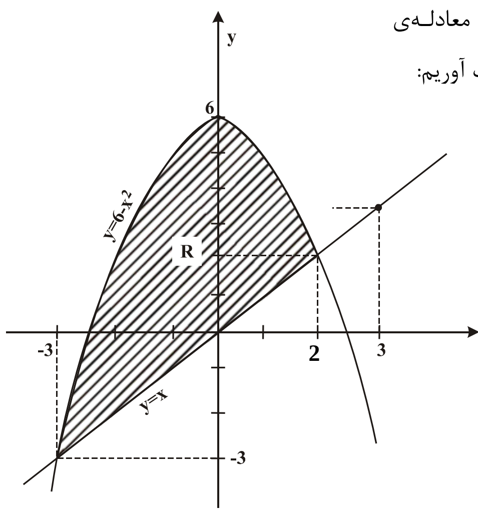
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=-\frac{1}{8}\cos 2x)_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{8}(\underbrace{\cos\pi}_{-1}-\underbrace{\cos 0}_{+1})=\frac{1}{4}$$

۴۸۵ـ گزینه «۴» در حقیقت می‌توان این‌گونه فرض کرد که چنبره‌ی توصیف شده در صورت سوال از دوران دایره‌ی به معادله‌ی $(x-2)^2+y^2=1$ حول محور yها حاصل شده است. با تغییر متغیر $x=2+\cos t$ و $y=\sin t$ و باتوجه به فرمول محاسبه‌ی مساحت سطح رویه‌های دواری که مولدشان یک منحنی پارامتری است و از دوران حول محور yها حاصل شده‌اند، داریم:

$$A=2\pi\int_a^b x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=2\pi\int_0^{2\pi}(2+\cos t)\sqrt{\underbrace{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}_{1}}\,dt=2\pi(2t+\sin t)\Big|_0^{2\pi}=2\pi((2(2\pi)+0)-0)=8\pi^2$$

روش دیگر: چنبره در اثر دوران دایره‌ای به شعاع یک، محیط 2π حول یک محور حاصل شده است و چون مرکز هندسی دایره روی دایره به شعاع ۲ حرکت می‌کند، فاصله آن تا محور دوران $d=2$ است و از قضیه دوم پاپوس داریم: مساحت سطح = محیط $\times 2\pi d=2\pi(2\pi\times 2)8\pi^2$

۴۸۶ـ گزینه «۲» بنا به توضیحات آورده شده در صورت سوال باید حجم زیر رویه به معادله‌ی $z=M(x,y)=x^2$ و بالای ناحیه‌ی R که در شکل زیر نمایش داده شده است، به دست آوریم:



$$\text{حجم } V=\iint_R M(x,y)\,dA=\int_{-3}^{2}\int_x^{6-x^2}x^2\,dy\,dx$$

$$=\int_{-3}^{2}x^2y\Big|_x^{6-x^2}dx=\int_{-3}^{2}(x^2(6-x^2)-x^2(x))\,dx$$

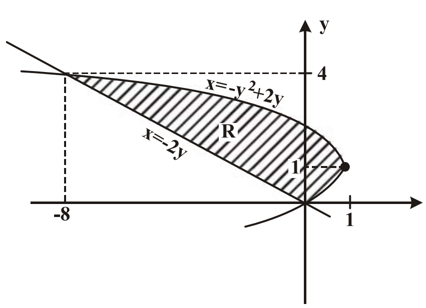
$$=\int_{-3}^{2}(6x^2-x^4-x^3)\,dx=2x^3-\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}\Big|_{-3}^{2}$$

$$=(16-\frac{32}{5}-4)-(-54+\frac{243}{5}-\frac{81}{4})=31/25$$

۴۸۷ـ گزینه «۲» اگر طول مرکز ثقل را با $\tilde{x}$ نمایش دهیم، آن‌گاه $\tilde{x}=\frac{1}{A}\iint_R x\,dA$ است که در آن A مساحت ناحیه‌ی R محصور بین $x=-2y$ و $x=-y^2+2y$ است. بنابراین:

$$\begin{cases}x=-2y\\ x=-y^2+2y\end{cases}\Rightarrow -2y=-y^2+2y\Rightarrow y^2-4y=0\Rightarrow y(y-4)=0\Rightarrow y=0,+4$$

در نتیجه نقاط $(0,0)$ و $(-8,4)$ محل تقاطع دو نمودار است:



$$A=\int_0^4\int_{-2y}^{-y^2+2y}dx\,dy=\int_0^4(-y^2+4y)\,dy=\frac{-y^3}{3}+2y^2)_0^4=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}$$

بنابراین طبق فرمول $\tilde{x}$ داریم:

$$\tilde{x}=\frac{1}{A}\iint_R x\,dA=\frac{3}{32}\int_0^4\int_{-2y}^{-y^2+2y}x\,dx\,dy=\frac{3}{32}\int_0^4(\frac{x^2}{2})\Big|_{-2y}^{-y^2+2y}dy=\frac{3}{64}\int_0^4((-y^2+2y)^2-(-2y)^2)\,dy$$

$$=\frac{3}{64}\int_0^4(y^4-4y^3+\cancel{4y^2}-\cancel{4y^2})\,dy=\frac{3}{64}(\frac{y^5}{5}-y^4)\Big|_0^4=\frac{3}{64}(\frac{4^5}{5}-4^4)=\frac{3(4^4)}{64}(\frac{4}{5}-1)=-\frac{12}{5}=-2/4$$

۴۸۸ـ گزینه «۴» ابتدا بردار قائم بر رویه‌ی $z=(x^2+y^2+1)\sqrt{x^2+y^2}$ را در نقطه‌ی $M(x,y,z)$ به دست می‌آوریم، می‌دانیم که $\vec{N}=(-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1)$ بنابراین:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sqrt{x^2+y^2}+(x^2+y^2+1)\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x(3x^2+3y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y\sqrt{x^2+y^2}+(x^2+y^2+1)\dfrac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y(3x^2+3y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$\vec{N}=\left(\frac{-x(3x^2+3y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y(3x^2+3y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)$$

$$\Rightarrow\left|\vec{N}\right|=\sqrt{\frac{x^2(3x^2+3y^2+1)^2+y^2(3x^2+3y^2+1)^2}{x^2+y^2}+1}=\sqrt{(3x^2+3y^2+1)^2+1}$$

از طرفی بنا به تعریف ضرب داخلی و با در نظر گرفتن $\vec{k}$ به عنوان برداری که در جهت مثبت محور z ها واقع است، داریم:

$$\vec{N}.\vec{k}=\left|\vec{N}\right|\left|\vec{k}\right|\cos\alpha\Rightarrow 1=\sqrt{(3x^2+3y^2+1)^2+1}\ (1)\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{(3x^2+3y^2+1)^2+1}}$$

وقتی $(x,y,z)\to(0,0,0)$، آن‌گاه $\cos\alpha\to\frac{1}{\sqrt{2}}$ چرا که $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{(3x^2+3y^2+1)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

۴۸۹ـ گزینه «۳» توجه داریم که:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{2^x}{4^x+1}dx=\lim_{b\to-\infty}\int_b^0\frac{2^x}{4^x+1}dx$$

پس ابتدا $\int_b^0\frac{2^x}{4^x+1}dx$ را بررسی می‌کنیم. داریم $4^x=(2^2)^x=(2^x)^2$ پس داریم $\int_b^0\frac{2^x}{(2^x)^2+1}dx$ با قرار دادن $y=2^x$ داریم:

$$\text{Ln}y=x\ \text{Ln}\,2\Rightarrow\frac{dy}{y}=dx\ \text{Ln}2$$

لذا:

$$\int\frac{2^x}{(2^x)^2+1}dx=\frac{1}{\text{Ln}2}\int\frac{y}{y^2+1}\frac{dy}{y}=\frac{1}{\text{Ln}2}\text{tg}^{-1}(y)\Rightarrow\int_b^0\frac{2^x}{(2^x)^2+1}=\frac{1}{\text{Ln}\,2}\text{tg}^{-1}(2^x)\Big|_b^0=\frac{1}{\text{Ln}\,2}(\text{tg}^{-1}(1)-\text{tg}^{-1}(2^b))$$

$$\Rightarrow\lim_{b\to-\infty}\frac{1}{\text{Ln}\,2}(\text{tg}^{-1}(1)-\text{tg}^{-1}(2^b))=\frac{1}{\text{Ln}2}(\text{tg}^{-1}(1)-\text{tg}^{-1}(0))=\frac{1}{\text{Ln}2}(\frac{\pi}{4}-0)=\frac{\pi}{4\text{Ln}2}$$

۴۹۰ـ گزینه «۲» طبق اتحاد $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ داریم:

$$(n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}=\frac{(n+1)-n}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$$

عبارت با $\frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}$ هم‌ارز است.

پس سری به‌صورت $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3n^{\frac{2}{3}}})^P$ است که برای $P>\frac{3}{2}$ سری همگراست.

۴۹۱ـ گزینه «۱» با فرض $f(x)=x^2$، $g(x)=x$ و لذا گزینه (۲) و (۳) رد می‌شوند. با فرض $f(x)=-x$، $f'(x)=-1$ که چون تابع ثابت است، صعودی نیز می‌باشد، پس $g(x)=\frac{f(x)}{x}=-1$ که تابعی مثبت نیست لذا گزینه (۴) نیز رد می‌شود.

۴۹۲ـ گزینه «۳» از قضیه‌ی مقدار میانگین برای یافتن کران بالای $|f(x)|$ استفاده می‌کنیم. طبق این قضیه در بازه‌ی $[0,x]$ داریم:

$$f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)\quad ;\quad \exists c\in(0,x)\xrightarrow{f(0)=0} f(x)=xf'(c)\Rightarrow f(x)=x\frac{c^2}{1+c^2}$$

اکنون از طرفین قدرمطلق می‌گیریم و از این نکته استفاده می‌کنیم که $\frac{c^2}{1+c^2}\le 1$ است در نتیجه داریم: $|f(x)|\le|x|$

۴۹۳ـ گزینه «۴» این سؤال را به دو روش حل می‌کنیم، روش اول براساس مفاهیم آنالیز ریاضی و روش دوم با استفاده از مفاهیم ریاضی (۱) می‌باشد.

روش اول: ابتدا در تابع زیر انتگرال از عامل $\sin^n x$ فاکتور می‌گیریم و آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\sin^n x-\sin^{n+2}x=\sin^n x(1-\sin^2 x)=\sin^n x\cos^2 x$$

پس داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)\sin^n x\cos^2 x\,dx$$

اکنون باید ببینیم که آیا می‌توان حد را از این انتگرال عبور داد یا خیر؟

در واقع اگر همگرایی دنباله‌ای که داخل انتگرال قرار دارد از نوع یکنواخت باشد، می‌توانیم حد را از انتگرال عبور دهیم.

براساس قضیه‌ای در آنالیز ریاضی چون مقدار حد $\sin^n x$ در بازه‌ی $(0,\frac{\pi}{2})$ وقتی $n\to+\infty$ برابر صفر می‌باشد، اگر به جای x دنباله‌ی x_n را قرار دهیم به دلیل آن که در بازه‌ی $(0,\frac{\pi}{2})$ این دنباله مقداری بین صفر و یک دارد، پس در $n\to+\infty$ نیز مقدار حد این دنباله برابر صفر می‌باشد (چرا که x_n هر دنباله‌ای باشد $\sin x_n$ در بازه‌ی $(0,\frac{\pi}{2})$ مقداری بین صفر و یک دارد. که حد آن در بی‌نهایت صفر می‌شود.) که در این صورت می‌گوییم همگرایی این دنباله از نوع یکنواخت (uniformlly) می‌باشد و در این صورت می‌توانیم حد را از انتگرال عبور دهیم.

از طرفی با توجه به این که $n\to+\infty$ از هم‌ارزی $(n+1)\sim n$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x\,dx$$

در عبارت مانند $f_n(x)=\sin^{2n}(x)$ در بازه‌ی $0\le x\le 2\pi$ مقدار حد وقتی که $n\to+\infty$ میل می‌کند، در همه نقاط به جز نقاط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sin^{2n}(x)=0$$

اما به ازای این دو نقطه مقدار حد برابر با یک می‌باشد.

حال اگر فرض کنیم $f_n(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ دنباله‌ای است که در همه نقاط به جز نقطه‌ی c مقدارش صفر می‌شود، اگر این دنباله در تابع پیوسته‌ی دیگری مانند $h(x)$ ضرب شود، دو رابطه‌ی زیر را داریم:

$$1)\quad \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)h(x)dx=0$$

$$2)\quad \lim_{n\to+\infty}n\int_a^b f_n(x)h(x)dx=f(c)h(c)$$

به عبارت دیگر اگر n در انتگرال ضرب نشده باشد، مقدار انتگرال به صفر میل می‌کند و اگر n در انتگرال ضرب شده باشد، فقط باید مقدار انتگرالده را در نقطه‌ی c حساب کنیم که در این‌جا منظور از $f(c)$ همان مقدار حد $f_n(x)$ در $x=c$ است.

پس در این مثال، با توجه به این که در تابع $f_n(x)=\sin^n x$ در بازه‌ی $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ مقدار حد تابع وقتی $n\to+\infty$ میل می‌کند، در همه نقاط به جز $x=\frac{\pi}{2}$ برابر صفر می‌باشد و داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}n\int_a^b f_n(x)h(x)dx=f(c)h(c)$$

که $f(c)$ مقدار حد $f_n(x)$ در $x=c$ می‌باشد که در این مثال $c=\frac{\pi}{2}$ است، پس داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}n\sin^n x\cos^2 x\,dx=\sin^n(\frac{\pi}{2})\cos^2(\frac{\pi}{2})=1\times 0=0$$

روش دوم: قطعاً مدنظر طراح همان روش اول بوده چون با روش دوم حل انتگرال بسیار وقت‌گیر است! ابتدا در تابع زیر انتگرال از عامل $\sin^n x$ فاکتور می‌گیریم و تابع زیر انتگرال را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sin^n x-\sin^{n+2}x=\sin^n x(1-\sin^2 x)=\sin^n x\cos^2 x$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}t\cos^{2n-1}t\,dt=\frac{1}{2}\beta(m,n)$ از خواص مهم تابع β داریم:

$$\begin{cases}2m-1=n\\ 2n-1=2\end{cases}\Rightarrow m=\frac{n+1}{2},n=\frac{3}{2}$$

پس داریم:
$$I_n=\frac{1}{2}\beta(\frac{n+1}{2},\frac{3}{2})=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{2\Gamma(\frac{n+4}{2})}$$

اکنون باید حاصل مقادیر $\Gamma(\frac{n+1}{2})$ و $\Gamma(\frac{n+4}{2})$ را بیابیم که باید یکبار n را عددی زوج و یکبار عددی فرد درنظر بگیریم.

حالت اول: اگر n عدد زوج $n=2k$ باشد، داریم:
$$\Gamma(\frac{n+1}{2})\xrightarrow{n=2k}\Gamma(\frac{2k+1}{2})=\Gamma(k+\frac{1}{2})=\Gamma(k-\frac{1}{2}+1)$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ داریم:
$$(k-\frac{1}{2})\Gamma(k-\frac{1}{2})=(k-\frac{1}{2})\Gamma(k-\frac{3}{2}+1)=(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\Gamma(k-\frac{3}{2})$$

به همین ترتیب اگر ادامه دهیم $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید:
$$\Gamma(n+\frac{1}{2})=(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\times\cdots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma(\frac{1}{2})$$
$$=(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\times\cdots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}(\sqrt{\pi})=\frac{(2k-1)(2k-3)\times\cdots\times3\times1}{2^k}\sqrt{\pi}=\frac{(2k)!}{2^k(2\times4\times\cdots\times2k)}\sqrt{\pi}=\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\sqrt{\pi}$$

همچنین داریم:
$$\Gamma(\frac{n+4}{2})=\Gamma(\frac{2k+4}{2})=\Gamma(k+2)=(k+1)!$$

پس داریم:
$$I_n=\frac{(2k)!\sqrt{\pi}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2(k+1)!2^{2k}(k!)}\Rightarrow(n+1)I_n=(2k+1)\frac{\pi\times(2k)!}{2^{k+2}(k!)(k+1)!}=\frac{2k+1}{k+1}\cdot\frac{\pi\times(2k)!}{2^{2k+2}(k!)^2}$$

حال اگر $n\to+\infty$ در نتیجه $k\to+\infty$ و چون رشد مخرج به دلیل وجود عامل نمائی 2^{k+2} از صورت بیشتر است پس حاصل حد صفر است.

حالت دوم: اگر n عددی فرد باشد، داریم: $n=2k+1$، پس:
$$\Gamma(\frac{n+1}{2})=\Gamma(\frac{2k+2}{2})=\Gamma(k+1)=k!$$

و همچنین:
$$\Gamma(\frac{n+4}{2})=\Gamma(\frac{2k+5}{2})=\frac{(2k+3)(2k+1)\times\cdots\times3\times1}{2^{k+2}}\sqrt{\pi}=\frac{(2k+4)!\sqrt{\pi}}{2^{k+2}(2\times4\times\cdots\times(2k+4))}=\frac{(2k+4)!}{2^{2k+4}(k+2)!}$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{k!\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times2^{2k+4}(k+2)!}{2(2k+4)!\sqrt{\pi}}\Rightarrow(n+1)I_n=\frac{(2k+2)(k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)}\cdot\frac{(k!)^2\times2^{2k+2}}{(2k)!}$$

اکنون اگر $n\to+\infty$ آنگاه $k\to+\infty$ و به دلیل وجود عامل‌های $(k!)$ و $(2k)!$ در صورت و مخرج از هم‌ارزی استرلینگ $\underset{n\to+\infty}{n!}\sim(\frac{n}{e})^n\sqrt{2n\pi}$ استفاده می‌کنیم و داریم:
$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\lim_{k\to+\infty}\frac{2k^3}{16k^4}\times\frac{((\frac{k}{e})^k\sqrt{2k\pi})^2\times2^{2k+2}}{(\frac{2k}{e})^{2k}\sqrt{2(2k)\pi}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{(2k\pi)\times4}{8k\times2\sqrt{k\pi}}=0$$

پس حد تابع در کل نیز برابر صفر می‌باشد.

۴۹۴ـ گزینه «۲» با تقسیم طرفین بر 5^x خواهیم داشت:
$$(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x=1\Rightarrow f(x)=(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x-1=0$$

حالا مسأله تبدیل به یافتن تعداد ریشه‌های تابع $f(x)$ شد. این تابع به وضوح نزولی است؛ زیرا $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{5}$ اعدادی کوچکتر از یک هستند و هرچه توان بزرگتری داشته باشند، حاصل کوچکتر می‌شود. با این حال با توجه به علامت $f'(x)$ هم می‌توانیم از نزولی بودن f مطمئن شویم:
$$f'(x)=(\frac{3}{5})^x\operatorname{Ln}(\frac{3}{5})+(\frac{4}{5})^x\operatorname{Ln}(\frac{4}{5})<0$$

$\frac{4}{5}$ و $\frac{3}{5}$ کوچکتر از یک هستند پس $\operatorname{Ln}\frac{4}{5}<0$ و $\operatorname{Ln}\frac{3}{5}<0$. تا اینجا می‌دانیم که $f'(x)$ منفی است، پس $f(x)$ اکیداً نزولی است. هر تابع اکیداً نزولی حداکثر یک ریشه دارد. پس در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (۲) می‌تواند صحیح باشد. با این حال برای اطمینان از وجود یک ریشه، کافی است به این مطلب دقت کنید که $f(0)=1+1-1>0$ و $f(3)=\frac{27}{125}+\frac{64}{125}-1<0$. پس طبق قضیه‌ی مقدار میانی، $f(x)$ حداقل یک ریشه در این بازه دارد.

توضیح: با کمی دقت به اعداد ۳، ۴ و ۵ به خاطر می‌آوریم که این‌ها اعداد فیثاغورثی هستند، یعنی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که دو ضلع قائمه‌ی ۳ و ۴ دارد، وتری به اندازه‌ی ۵ دارد، در واقع $5^2=4^2+3^2$. پس $x=2$ ریشه‌ی $f(x)$ است و ما باید نشان می‌دادیم که ریشه‌ی دیگری وجود ندارد.

۴۹۵ـ گزینه «۱» فرض می‌کنیم $u=\dfrac{x^۲+y^۲}{xy}$ باشد. در این صورت داریم $z=f(u)$. حالا توجه کنید که z تابعی همگن از مرتبه‌ی صفر است؛ زیرا در کسر $\dfrac{x^۲+y^۲}{xy}$ صورت و مخرج هم‌درجه هستند. پس طبق فرمول اویلر داریم:

$$xz_x+yz_y=۰$$

در نتیجه:

$$(x+۱)z_x+(y+۱)z_y=(xz_x+yz_y)+(z_x+z_y)=۰+z_x+z_y$$

حالا از قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$z_x=f_x=\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)(\frac{yx^۲-y^۳}{x^۲y^۲})$$

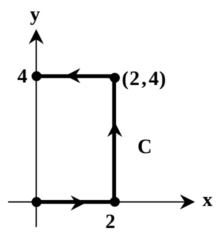
$$z_y=f_y=\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)(\frac{xy^۲-x^۳}{x^۲y^۲})$$

در نقطه‌ی $(۲,۱)$ داریم $u=\frac{۵}{۲}$، پس $z_x=f'(\frac{۵}{۲})(\frac{۳}{۴})$. مشتق z نسبت به y به صورت مشابه برابر است با:

پس در نقطه‌ی $(۲,۱)$ داریم: $z_y=f'(\frac{۵}{۲})(\frac{-۶}{۴})$. در نتیجه:

$$\text{جواب}=z_x+z_y=\frac{۳}{۴}f'(\frac{۵}{۲})-\frac{۶}{۴}f'(\frac{۵}{۲})=-\frac{۳}{۴}f'(\frac{۵}{۲})$$

۴۹۶ـ گزینه «۳» منحنی C بسته نیست. میدان برداری $\vec{F}$ هم پایستار نیست.



زیرا برای میدان برداری $\vec{F}=(\underbrace{\cos x\sin y}_{P}\,,\,\underbrace{xy+\sin x\cos y+۱}_{Q})$ داریم:

$$\begin{cases}Q_x=y+\cos x\cos y\\ P_y=\cos x\cos y\end{cases}\Rightarrow Q_x-P_y=y\neq ۰$$

پس در حال حاضر نه از قضیه گرین می‌توان استفاده کرد و نه از پایستار بودن F می‌توان کمک گرفت. یک راه خوب آن است که با اضافه کردن منحنی C' که از نقطه‌ی $(۰,۴)$ روی محور yها به نقطه‌ی $(۰,۰)$ می‌آید، مرز بسته‌ی $C+C'$ را ایجاد کنیم و با استفاده از قضیه‌ی گرین حاصل $\oint_{C+C'}Pdx+Qdy$ را به دست آوریم. سپس انتگرال روی C' را از جواب به دست آمده کم می‌کنیم:

$$I_۱=\oint_{C+C'}Pdx+Qdy=\iint_D(Q_x-P_y)dydx=\int_۰^۲\int_۰^۴ ydydx=\int_۰^۲[\frac{y^۲}{۲}]_۰^۴dx=\int_۰^۲ ۸dx=۸\times۲=۱۶$$

حالا $I_۲=\int_{C'}Pdx+Qdy$ را حساب می‌کنیم. روی مسیر C' داریم $x=۰$ پس $dx=۰$. همچنین روی این مسیر مقدار y از $y=۴$ تا $y=۰$ تغییر می‌کند. با این جایگذاری‌ها داریم:

$$I_۲=\int_{C'}P\times۰+Qdy=\int_۴^۰(۰+۰+۱)dy=y\Big|_۴^۰=-۴$$

بنابراین داریم:

$$I=\int_C Pdx+Qdy=I_۱-I_۲=۱۶-(-۴)=۲۰$$

۴۹۷ـ گزینه «۳» ناحیه موردنظر را D می‌نامیم. حجم این ناحیه برابر است با:

$$V=\iiint_D dzdydx$$

با توجه به معادله‌ی $\frac{(x+y-z)^۲}{۴}+\frac{(y-z)^۲}{۹}+z^۲=۱$ بهتر است از تغییر دستگاه (u,v,w) به این صورت استفاده کنیم:

$$u=\frac{x+y-z}{۲}\ ,\ v=\frac{y-z}{۳}\ ,\ w=z$$

در این صورت معادله‌ی رویه‌ی داده شده، در دستگاه جدید به شکل $u^۲+v^۲+w^۲=۱$ نوشته می‌شود که کره‌ی واحد است (ناحیه درون این کره را D' می‌نامیم). ژاکوبین دستگاه جدید را هم حساب می‌کنیم.

$$J_{xyz}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ ۰ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳}\\ ۰ & ۰ & ۱\end{vmatrix}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow J_{uvw}=\frac{۱}{J_{xyz}}=۶$$

بنابراین داریم:

$$V=\iiint_D dzdydx=\iiint_{D'}۶dwdvdu=۶\times(D'\ \text{حجم})=۶\times\frac{۴}{۳}\pi(۱^۳)=۸\pi$$

۴۹۸ـ گزینه «۱»

روش اول: می‌توانیم رابطه‌ی بازگشتی داده شده را حل کنیم: $a_n - ۲a_{n-۱} = ۱$

معادله‌ی مشخصه‌ی قسمت همگن یعنی $a_n - ۲a_{n-۱} = ۰$ به صورت $r - ۲ = ۰$ که جواب آن $r = ۲$ می‌شود. پس جواب عمومی همگن $a_n^{(h)} = C \times ۲^n$ است. با در نظر گرفتن قسمت ناهمگن معادله خواهیم داشت $a_n^{(p)} = b$. با جایگذاری در معادله ناهمگن داریم:

$$a_n^{(p)} - ۲a_{n-۱}^{(p)} = ۱ \Rightarrow b - ۲b = ۱ \Rightarrow b = -۱ \Rightarrow a_n^{(p)} = -۱$$

با جمع کردن جواب‌های همگن و ناهمگن داریم: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = C۲^n - ۱$

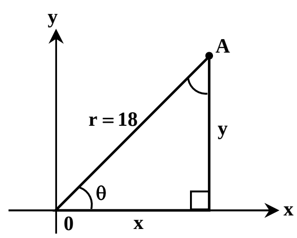
از شرط $a_۱ = ۱$ داریم $۲C - ۱ = ۱$ پس $C = ۱$ است. $a_n = ۲^n - ۱ \Rightarrow a_{۱۰} = ۲^{۱۰} - ۱ = ۱۰۲۳ \ ,\ a_۹ = ۲^۹ - ۱ = ۵۱۱ \Rightarrow a_{۱۰} - a_۹ = ۵۱۲$

روش دوم: با محاسبه‌ی چند جمله‌ی اول می‌توان فرم عمومی جواب را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} a_۱ = ۱ \\ a_۲ = ۲a_۱ + ۱ = ۳ \end{cases} \Rightarrow a_۲ - a_۱ = ۲^۱ \qquad \begin{cases} a_۲ = ۳ \\ a_۳ = ۲a_۲ + ۱ = ۷ \end{cases} \Rightarrow a_۳ - a_۲ = ۴ = ۲^۲$$

به همین ترتیب داریم: $a_{۱۰} - a_۹ = ۲^۹ = ۵۱۲$

۴۹۹ـ گزینه «۴» مطابق شکل، مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $r = ۱۸$ و اضلاع قائم x و y در نظر می‌گیریم. با توجه به آن که نرخ تغییرات مساحت را نسبت به زمان می‌خواهیم، فرمول مساحت را می‌نویسیم: $S = \frac{۱}{۲}xy$



از صورت سؤال می‌دانیم که $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{۹۰}$ پس سعی می‌کنیم رابطه‌ی بین S و θ را به‌دست آوریم. از روابط موجود در دستگاه قطبی استفاده می‌کنیم.

$$x = r\cos\theta = ۱۸\cos\theta \ ,\ y = r\sin\theta = ۱۸\sin\theta$$

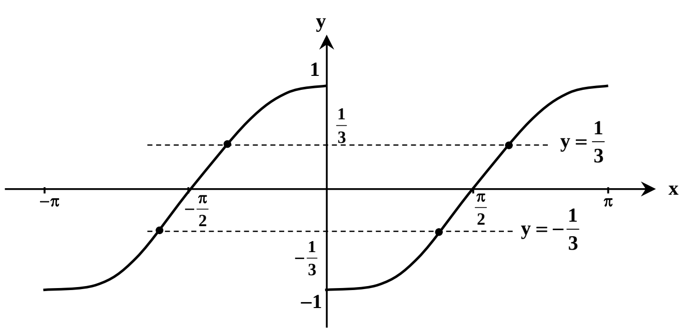
$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}(۱۸\cos\theta)(۱۸\sin\theta) = \frac{۱۸\times۱۸}{۲}\cos\theta\sin\theta \Rightarrow S = \frac{۱۸\times۱۸}{۴}\sin۲\theta = ۸۱\sin۲\theta$$

با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به t داریم: $\frac{dS}{dt} = (۱۶۲\cos۲\theta)\frac{d\theta}{dt}$

طبق صورت سؤال $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{۹۰}$ و $\theta = \frac{\pi}{۶}$ پس داریم: $\frac{dS}{dt} = (۱۶۲\cos\frac{۲\pi}{۶})(\frac{\pi}{۹۰}) = \frac{۱۶۲}{۲}\times\frac{\pi}{۹۰} = \frac{۹\pi}{۱۰}$

۵۰۰ـ گزینه «۳» با استفاده از انتقال‌های مثلثاتی می‌دانیم که $\cos(\pi - x) = -\cos(-x) = -\cos x$، پس ضابطه‌ی $f(x)$ چنین است:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & ; -\pi \le x \le ۰ \\ -\cos x & ; ۰ < x \le \pi \end{cases}$$



با رسم نمودار $f(x)$ و خطوط $y = \pm\frac{۱}{۳}$ متوجه می‌شویم که چهارضلعی موردنظر یک متوازی‌الاضلاع است که ارتفاع آن $h = \frac{۲}{۳}$ و طول قاعده‌ی آن π است، پس مساحت این چهارضلعی برابر با $S = \frac{۲}{۳}\pi$ است.

۵۰۱ـ گزینه «۴» منحنی $r = \sin۲\theta$ و خط $\theta = \frac{\pi}{۳}$ را برخورد می‌دهیم: $r = \sin۲\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

بنابراین نقطه‌ی $(r, \theta) = (\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{\pi}{۳})$ به دست می‌آید. در مختصات دکارتی داریم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \\ y = r\sin\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳}{۴} \end{cases}$$

پس نقطه‌ی $(x, y) = (\frac{\sqrt{۳}}{۴}, \frac{۳}{۴})$ به دست می‌آید. محور قطبی همان جهت مثبت محور x ها است. فاصله‌ی این نقطه از محور قطبی برابر است با عرض این نقطه یعنی داریم: جواب $= y = \frac{۳}{۴}$

توضیح کامل‌تر: کامل‌تر برای هر نقطه A در دستگاه محورهای مختصات داریم:

فاصله تا مبدأ مختصات $= r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$،

فاصله تا محور x ها $= y = r\sin\theta$

فاصله تا محور y ها $= x = r\cos\theta$

۵۰۲ـ گزینه «۴» می‌دانیم $tgh\theta=\dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}$ در این سؤال $\theta=\frac{1}{2}Lnx=Ln\sqrt{x}$ و بنابراین داریم:

$$tgh(\frac{1}{2}Lnx)=\frac{e^{Ln\sqrt{x}}-e^{-Ln\sqrt{x}}}{e^{Ln\sqrt{x}}+e^{-Ln\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{x-1}{x+1}$$

به جای سمت چپ عبارت معادل را قرار می‌دهیم:

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3x-3=x+1\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2$$

۵۰۳ـ گزینه «۴» اگر فاصله‌ی A که مرکز مکعب است را از صفحه $2x+y-2z-2=0$ حساب کنیم، نصفِ ضلع مکعب به دست آمده است.

$$\text{فاصله } A \text{ از وجه مکعب}=\frac{|2(1)+(-2)-2(5)-2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{12}{3}=4$$

بنابراین اندازه‌ی ضلع این مکعب $8=4\times 2$ و حجم آن $V=8\times8\times8=512$ است.

۵۰۴ـ گزینه «۳» سؤال را به دو روش حل می‌کنیم، یکبار به روش دانشجوهای رشته‌ی ریاضی و یکبار به روش دانشجوهای رشته‌ی مهندسی!

روش اول: با توجه به این که اگر x_n دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد، داریم:

$$\liminf\frac{x_{n+1}}{x_n}\le\liminf\sqrt[n]{x_n}\le\limsup\sqrt[n]{x_n}\le\limsup\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

حال اگر دنباله‌ی $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ به L همگرا باشد، لذا $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=L$.

اگر قرار دهیم $x_n=\dfrac{1}{\cos1}\times\dfrac{1}{\cos\frac{1}{2}}\times\dots\dfrac{1}{\cos\frac{1}{n}}$ در این صورت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{\cos(0)=1}$$

با توجه به توضیحات بالا می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\cos(1)}\times\dots\times\frac{1}{\cos\frac{1}{n}}}=1$$

روش دوم: اگر $a_n=\dfrac{1}{\cos\frac{1}{n}}$ آنگاه با فرض $b_n=\sqrt{a_1\times a_2\times\dots\times a_n}$ می‌باشد که میانگین هندسی جملات دنباله a_n است. طبق نکته داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\cos\frac{1}{n}}=1$$

۵۰۵ـ گزینه «۳» ابتدا قضیه مقدار میانگین (فرم کلی) را بیان می‌کنیم:

« توابع $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ را درنظر بگیرید که بر این بازه پیوسته‌اند و بر (a,b) مشتق‌پذیرند. در این‌صورت:

$$\exists c;a<c<b:[f(b)-f(a)]g'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c) \text{»}$$

با توجه به فرض سؤال، اگر تابع $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$ را با فرض $a>0$ درنظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم که در شرایط قضیه بالا صدق می‌کنند. لذا:

$$\exists c;a<c<b:$$

$$\left[\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}\right]\left(-\frac{1}{c^2}\right)=\left[\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right]\left[\frac{cf'(c)-f(c)}{c^2}\right]\Rightarrow\frac{bf(a)-af(b)}{abc^2}=[cf'(c)-f(c)]\frac{(a-b)}{abc^2}$$

حال با توجه به ناصفر بودن c و b و a خواهیم داشت:

$$\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(c)-cf'(c)$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۵۰۶ـ گزینه «۲» اگر تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L_1\ ,\ \lim_{x\to\infty}f'(x)=L_2$$

که $L_1,L_2\in\mathbb{R}$ باشند، در این صورت حتماً $L_2=0$. حال با توجه به این سؤال چون $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=L_2=1\neq0$، لذا حتماً $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ پس گزینه‌های ۱ و ۳ نادرست هستند. برای اثبات درستی گزینه‌ی دوم اگر بر بازه‌ی $[x,x+1]$, $x\in\mathbb{R}$ قضیه مقدار میانگین را بنویسیم، آنگاه یک $x<\eta_x<x+1$ وجود دارد که:

$$|f(x+1)-f(x)|=1\times f'(\eta_x)$$

حال اگر از طرفین حد بگیریم:

$$\lim_{x\to\infty}|f(x+1)-f(x)|=\lim_{x\to\infty}f'(\eta_x)=1$$

توجه کنید که در مورد گزینه (۴) نیز داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to\infty}f'(\eta_x)=1\ ;\ x<\eta_x<x+h$$

لذا گزینه‌ی چهارم نادرست است.

۵۰۷ــ گزینه «۲» با توجه به خاصیت تابع سینوس، می‌دانیم که $-۱ \le \sin\frac{\pi x}{۵} \le ۱$ است. حالا داریم:

$$-۱ < \sin\frac{\pi x}{۵} < ۱ \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\sin\frac{\pi x}{۵})^n = ۰$$

$$\sin\frac{\pi x}{۵} = ۱ \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\sin\frac{\pi x}{۵})^n = \lim_{n\to\infty}(۱)^n = ۱$$

$$\sin\frac{\pi x}{۵} = -۱ \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\sin\frac{\pi x}{۵})^n = \lim_{n\to\infty}(-۱)^n = \begin{cases} ۱ \ ; & n\in E \\ -۱ \ ; & n \in O \end{cases}$$

پس تابع ما می‌تواند ۲ مقدار اختیار کند. توجه داشته باشید که در حالت $\sin\frac{\pi x}{۵} = -۱$، دنباله کراندار و فاقد حد است. پس فقط مقادیر ۰ و ۱ به‌عنوان برد تابع قابل قبول هستند.

۵۰۸ــ گزینه «۲» گزینه‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه (۱): اثر (trace) ماتریس A برابر است با مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس:

$$tr(A) = ۰+۰+۰ = ۰$$

گزینه (۱) صحیح است.

بررسی گزینه (۲): برای محاسبه‌ی ماتریس الحاقی برای هر درایه، سطر و ستون مربوط بـه آن را حـذف مـی‌کـنیم و از مـاتریس دو در دوی بـاقی‌مانـده، دترمینان می‌گیریم. درایه‌هایی که مجموع شماره سطر و ستون آن‌ها فرد باشد، باید قرینه شوند.

$$adj(A) = \begin{bmatrix} ۰-۲ & -(۰-۱) & ۴-۰ \\ -(۰-۴) & ۰-۲ & -(۰-۱) \\ ۱-۰ & -(۰-۴) & ۰-۲-(۰-۱) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۴ & -۲ & ۱ \\ ۱ & ۴ & -۲ \end{bmatrix}$$

گزینه (۲) صحیح نیست.

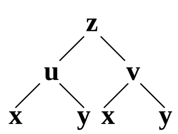
بررسی گزینه (۳): اگر دترمینان A صفر باشد، ماتریس A وارون‌پذیر نخواهد بود. با محاسبه‌ی دترمینان به روش ساروس داریم:

$$\det(A) = (۰+۱+۸)-(۰+۰+۰) = ۹$$

چون $\det(A) \ne ۰$ پس ماتریس A وارون‌پذیر است. گزینه (۳) صحیح است.

بررسی گزینه (۴): از آنجا که $\det(A) \ne ۰$ پس همه‌ی سطرهای A نسبت به هم مسـتقل خطـی هسـتند. A دارای ۳ سـطر مسـتقل خطـی اسـت پـس رتبه‌ی A برابر با ۳ است. گزینه (۴) صحیح است.

۵۰۹ــ گزینه «۳» درخت متغیرها رسم شده است. داریم $u_x = ۱$ و $v_x = ۲$ و $u_t = -۱$ و $v_t = ۱$. طبق قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:



$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u + ۲z_v \Rightarrow z_{xx} = (z_{uu}u_x + z_{uv}v_x) + ۲(z_{vu}u_x + z_{vv}v_x)$$
$$= (z_{uu} + ۲z_{uv}) + ۲(z_{vu} + ۲z_{vv}) = z_{uu} + ۴z_{uv} + ۴z_{vv}$$

حالا z_{tt} را حساب می‌کنیم.

$$z_t = z_u u_t + z_v v_t = -z_u + z_v$$
$$z_{tt} = -(z_{uu}u_t + z_{uv}v_t) + (z_{vu}u_t + z_{vv}v_t) = -(-z_{uu} + z_{uv}) + (-z_{vu} + z_{vv}) = z_{uu} - ۲z_{uv} + z_{vv}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$z_{xx} + ۲z_{tt} = ۰ \Rightarrow (z_{uu} + ۴z_{uv} + ۴z_{vv}) + ۲(z_{uu} - ۲z_{uv} + z_{vv}) = ۰ \Rightarrow ۳z_{uu} + ۶z_{vv} = ۰ \Rightarrow z_{uu} + ۲z_{vv} = ۰$$

۵۱۰ــ گزینه «۴» دترمینان را نسبت به سطر اول بسط می‌دهیم:

$$(-۱)^{۱+۱}(۱)\begin{vmatrix} ۱ & -۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۲}(۲)\begin{vmatrix} ۲ & -۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۳}(۱)\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۴}(-۱)\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۲ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ -۲ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

حال دترمینان هر یک از ماتریس‌های ۳×۳ را به روش ساروس به دست می‌آوریم:

$$\text{دترمینان} = (-۱۲) - ۲(۸) + (-۱۲) + (-۸) = -۴۸$$

۵۱۱ــ گزینه «۳» با توجه به این نکته که برای تابع خطی $f(x,y) = ax+by+c$ اگر ناحیه مورد بررسی از تقاطع خطوط راست بوجود آمده باشد، نقاط اکسترمم تابع در گوشه‌های ناحیه (یعنی محل برخورد خطوط ناحیه) اتفاق می‌افتد، در نتیجه در مورد این سوال نیز، کافیست محل برخورد خطوط محدودکننده نواحی را به دست آوریم. از طرفی با توجه به این که $x > ۰$ و $y > ۰$ است، باید توجه کرد که برای x و y مقدار صفر وجود ندارد، پس کافیست فقط محل برخورد دو خط دیگر را به دست آوریم:

$$\begin{cases} y + ۲x = ۱۴ \\ ۳y + x = ۲۱ \end{cases} \Rightarrow y = ۵/۶ \ , \ x = ۴/۲ \Rightarrow \max(x+y) = ۹/۸$$

۵۱۲ـ گزینه «۴» با توجه به تعریف دامنه تابع $\frac{g}{f}$ داریم:

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = ۰\}$$

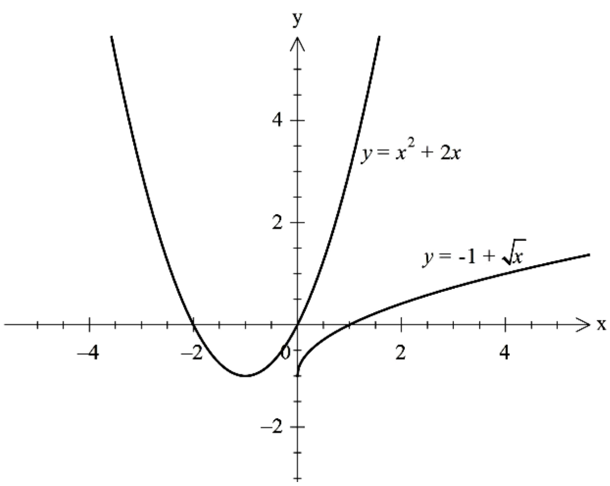
$$\left.\begin{array}{l} D_f = \mathbb{R} \\ D_g :\ ۴ - ۹x^۲ > ۰ \Rightarrow -\frac{۲}{۳} < x < \frac{۲}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f \cap D_g = (-\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}) \qquad (۱)$$

$$f(x) = ۰ \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{۲}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor x - \frac{۱}{۳} \right\rfloor + ۱ = ۰ \Rightarrow \left\lfloor x - \frac{۱}{۳} + ۱ \right\rfloor + \left\lfloor x - \frac{۱}{۳} \right\rfloor + ۱ = \left\lfloor x - \frac{۱}{۳} \right\rfloor + ۱ + \left\lfloor x - \frac{۱}{۳} \right\rfloor + ۱ = ۲\left\lfloor x - \frac{۱}{۳} \right\rfloor + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \left\lfloor x - \frac{۱}{۳} \right\rfloor = -۱ \Rightarrow -۱ \le x - \frac{۱}{۳} < ۰ \Rightarrow -\frac{۲}{۳} \le x < \frac{۱}{۳} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = [\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$$

۵۱۳ـ گزینه «۱»



یک روش برای حل این سؤال، رسم توابع دو طرف تساوی در یک دستگاه مختصات و بررسی وجود نقاط تقاطع است:

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید این دو تابع به هیچ وجه با هم تقاطع نخواهند داشت.

روش دیگر: می‌توان معادله را به شکل زیر نوشت:

$$(x+۱)^۲ = \sqrt{x}$$

می‌توان نتیجه گرفت به دلیل $x \ge ۰$ که $(x+۱)^۲ > \sqrt{x}$ و این یعنی هیچ‌وقت تساوی برقرار نمی‌شود.

۵۱۴ـ گزینه «۲» ابتدا توجه داشته باشید که مرتبه هر ماتریس کوچکتر یا مساوی مینیمم تعداد سطر و ستون ماتریس است. در نتیجه مرتبه این ماتریس حداکثر ۳ است. حالا با کمی دقت مشاهده می‌شود که $R_۳ = ۲R_۱ + R_۲$ پس مرتبه ماتریس حداکثر ۲ است. حالا با انتخاب هر یک از سطرهای ۱ یا ۳ به همراه سطر ۲، دو سطر مستقل خطی داریم، پس مرتبه این ماتریس ۲ است.

۵۱۵ـ گزینه «۲» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: طبق فرمول عبارت $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ برابر با $\frac{(y'_x)_t}{x'_t}$ است. پس ابتدا باید y'_x را حساب کنیم و می‌دانیم $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ است. یادآوری می‌کنیم مشتق Lnu برابر با $\frac{u'}{u}$ است:

$$y'_x = \frac{\frac{۲t}{t^۲-۱}}{\frac{۱}{۱+t}} = \frac{\frac{۲t}{(t+۱)(t-۱)}}{\frac{۱}{t+۱}} = \frac{۲t}{t-۱}$$

حالا باید $(y'_x)_t$ را حساب کنیم:

$$(y'_x)_t = \frac{۲(t-۱) - ۱ \times (۲t)}{(t-۱)^۲} = -\frac{۲}{(t-۱)^۲}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t} = \frac{-\frac{۲}{(t-۱)^۲}}{\frac{۱}{t+۱}} = -\frac{۲(t+۱)}{(t-۱)^۲}$$

مقدار عبارت فوق به ازای $x = ۲\text{Ln}۲$ و به عبارتی به ازای $x = \text{Ln}۴$ خواسته شده، ولی ما عبارت را برحسب t داریم. از تساوی $x = \text{Ln}(t+۱)$ داریم:

$$۲\text{Ln}۲ = \text{Ln}(t+۱) \Rightarrow \text{Ln}۴ = \text{Ln}(t+۱) \Rightarrow ۴ = t+۱ \Rightarrow t = ۳$$

بنابراین داریم:

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}(t=۳) = -\frac{۲(۳+۱)}{(۳-۱)^۲} = -\frac{۸}{۲^۲} = -\frac{۸}{۴} = -۲$$

روش دوم: می‌توانیم y را برحسب x تعیین کرده و مشتق‌گیری انجام دهیم؛ (البته در تمام این‌گونه سؤالات، نمی‌توان y را برحسب x به دست آورد.)

$$y=\mathrm{Ln}(t^{۲}-۱)=\mathrm{Ln}(t-۱)(t+۱)\xrightarrow{\mathrm{Ln}AB=\mathrm{Ln}A+\mathrm{Ln}B}y=\mathrm{Ln}(t+۱)+\mathrm{Ln}(t-۱)\xrightarrow{x=\mathrm{Ln}(t+۱)}y=x+\mathrm{Ln}(t-۱)\quad(*)$$

برای تبدیل $\mathrm{Ln}(t-۱)$ برحسب x می‌توان به شکل مقابل عمل کرد: $x=\mathrm{Ln}(t+۱)\Rightarrow t+۱=e^{x}\Rightarrow t=e^{x}-۱$

حالا داریم: $\mathrm{Ln}(t-۱)=\mathrm{Ln}(e^{x}-۱-۱)=\mathrm{Ln}(e^{x}-۲)$

با قرار دادن عبارت فوق در ضابطه‌ی $(*)$ داریم:

$$y=x+\mathrm{Ln}(e^{x}-۲)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=۱+\frac{e^{x}}{e^{x}-۲}\Rightarrow\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{e^{x}(e^{x}-۲)-e^{x}(e^{x})}{(e^{x}-۲)^{۲}}\Rightarrow\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{-۲e^{x}}{(e^{x}-۲)^{۲}}$$

$$\xrightarrow{x=\mathrm{Ln}۴}\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{-۲e^{\mathrm{Ln}۴}}{(e^{\mathrm{Ln}۴}-۲)^{۲}}=\frac{-۲\times۴}{(۴-۲)^{۲}}=\frac{-۸}{۴}=-۲$$

۵۱۶ـ گزینه «۴» ابتدا تابع را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$F(x)=x^{۲}\times\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۰}^{n}\mathrm{tg}(\frac{i}{n}x^{۲})}_{g(x)}$$

حد فوق یک سری ریمان است که به فرم $\frac{۱}{n}\sum_{i=۰}^{\infty}g(\frac{i}{n})$ نوشته شده و در آن $g(\frac{i}{n})=\mathrm{tg}(\frac{i}{n}x^{۲})$ است. لذا می‌توان با توجه به تعریف، حد را محاسبه کرد:

$$g(x)=\int_{۰}^{۱}\mathrm{tg}(tx^{۲})dt=\frac{-۱}{x^{۲}}\mathrm{Ln}\left|\cos(tx^{۲})\right|\Big|_{۰}^{۱}=\frac{-۱}{x^{۲}}\mathrm{Ln}\left|\cos(x^{۲})\right|$$

$$F(x)=x^{۲}\times\frac{-۱}{x^{۲}}\mathrm{Ln}\left|\cos(x^{۲})\right|=-\mathrm{Ln}\left|\cos(x^{۲})\right|\quad\Rightarrow\quad F'(x)=\frac{۲x\sin x^{۲}}{\cos x^{۲}}=۲x\mathrm{tg}x^{۲}$$

۵۱۷ـ گزینه «۴» همان‌طور که در متن درس گفته شده، وقتی کسر $\frac{ax+by}{cx+dy}$ در ضابطه $f(x,y)$ به کار رفته باشد، تغییر متغیرهای $u=ax+by$ و $v=cx+dy$ می‌تواند باعث ساده‌تر شدن انتگرال شود.

$$\begin{matrix}u=y-x\\v=y+x\end{matrix}\longrightarrow J_{xy}=\begin{vmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-۱&۱\\۱&۱\end{vmatrix}=-۲\longrightarrow J_{uv}=\frac{۱}{|J_{xy}|}=\frac{۱}{۲}$$

حالا باید ناحیه را در صفحه xoy مشخص کرده و سپس تبدیل آن را در دستگاه uov پیدا کنیم:

ناحیه D در صفحه xoy دارای سه مرز است که عبارتند از $x+y=۱$، $y=۰$ و $x=۰$. با قرار دادن این معادله‌ها در ضابطه $u=y-x$ و $v=y+x$ هر کدام از این مرزها را به معادله‌ای برحسب u و v تبدیل می‌کنیم. از مرز $x+y=۱$ به وضوح به $v=۱$ می‌رسیم. همچنین از $y=۰$ به این نتیجه می‌رسیم که $u=-x$ و $v=+x$ که معادل است با $u=-v$. با قرار دادن $x=۰$ نیز خواهیم داشت $u=y$ و $v=y$، یعنی $u=v$. بنابراین ناحیه D در دستگاه جدید دارای سه مرز به معادله‌های $u=v$، $u=-v$ و $v=۱$ است. کران‌های v عبارتند از $۰\le v\le۱$ و اگر در امتداد محور u حرکت کنیم، $u=-v$ مرز ورودی و $u=v$ مرز خروجی است. پس $-v\le u\le v$ است. تابع زیر انتگرال را در $J_{uv}=\frac{۱}{۲}$ ضرب کرده و آن را برحسب u و v می‌نویسیم:

$$I=\iint e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy=\int_{۰}^{۱}\int_{-v}^{v}\frac{۱}{۲}e^{\frac{u}{v}}dudv=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱}(ve^{\frac{u}{v}})\Big|_{-u}^{u}du=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱}(ue-ue^{-۱})du=\frac{۱}{۲}(e-e^{-۱})\int_{۰}^{۱}udu=\frac{۱}{۴}(e-e^{-۱})$$

۵۱۸ـ گزینه «۱» ابتدا سری را به صورت مقابل بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\frac{۱}{n^{۲}}}\times\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}(\frac{k\sqrt{k}+۱}{n\sqrt{n}})\sin\frac{k}{n}$$

در مورد کسر $\frac{k\sqrt{k}+۱}{n\sqrt{n}}$ با تفکیک جملات داریم $\frac{۱}{n\sqrt{n}}+\frac{k\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$، حال توجه کنید که با میل کردن n به ∞، کسر $\frac{۱}{n\sqrt{n}}$ به صفر میل خواهد کرد، پس در بی‌نهایت هم‌ارزی مقابل را داریم:

$$\frac{k\sqrt{k}+۱}{n\sqrt{n}}\cong\frac{k\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}=(\frac{k}{n})^{\frac{۳}{۲}}$$

با این توضیحات داریم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\frac{۱}{n^{۲}}}\times\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}(\frac{k}{n})^{\frac{۳}{۲}}\sin\frac{k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\sqrt{n}}\int_{۰}^{۱}x^{\frac{۳}{۲}}\sin xdx$$

نیازی به محاسبه انتگرال نیست. فقط باید توجه داشت که با توجه به پیوسته بودن تابع زیر انتگرال در بازه $۰\le x\le۱$، این انتگرال یک مقدار حقیقی (مثلاً C) است. در این صورت:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{I}{\sqrt{n}}=۰$$

۵۱۹ـ گزینه «۱» برای بررسی این سری، از هم‌ارزی $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\cong \mathrm{Ln}\,n$ استفاده می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n})^{\alpha}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\mathrm{Ln}\,n)^{\alpha}}$$

(برای آن که صفر شدن $\mathrm{Ln}\,1$ در مخرج اشکال ایجاد نکند، جملات سری را برای $n\geq 2$ در نظر گرفته‌ایم. البته می‌دانیم که کنار گذاشتن یک یا چند جمله اول در بررسی همگرایی سری اشکالی ایجاد نمی‌کند.) همان‌طور که می‌دانیم سری‌های به فرم $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{p}(\mathrm{Ln}\,n)^{q}}$ اگر $p=1$ باشد، با شرط $q>1$ همگرا هستند. پس سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\mathrm{Ln}\,n)^{\alpha}}$ با شرط $\alpha>1$ همگراست.

۵۲۰ـ گزینه «۲» با استفاده از آزمون ریشه برای سری‌های تابعی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!\,x^{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e}\right)\sqrt[n]{x^{n(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e}\right)\left|x^{(n-1)!}\right|$$

در حد اخیر اگر $|x|\geq 1$، آنگاه حد برابر ∞، لذا سری واگراست و اگر $|x|<1$ آنگاه حاصل حد برابر با صفر و سری همگرا می‌شود، پس شعاع همگرایی ۱ است.

۵۲۱ـ گزینه «۱» با توجه به وجود تابع $\lfloor x\rfloor$ در ضابطه تابع، ممکن است در نقاط صحیح مشتق‌پذیر نباشد. اما با توجه به این که تابع در این نقاط دارای ریشه مرتبه ۲ است (در همسایگی هر عدد صحیح z، $\sin^2\pi x \underset{x\to z}{\cong} \sin^2\pi(x-z) \underset{x-z\to 0}{\cong} \pi^2(x-z)^2$) پس دارای مشتق اول خواهد بود. همچنین در نقاط غیرصحیح، مشتق تابع $\lfloor x\rfloor$ صفر است. پس داریم:

$$f'(x)=(\lfloor x\rfloor)'\sin^2\pi x+\pi\lfloor x\rfloor\sin 2\pi x$$

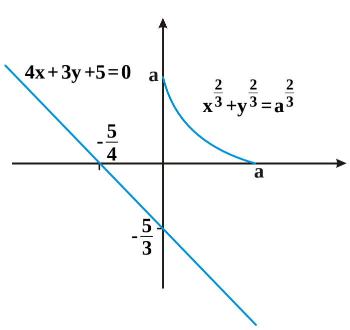
$$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow f'(x)=(\lfloor x\rfloor)'\sin^2\overset{0}{\cancel{\pi x}}+\pi\lfloor x\rfloor\sin 2\overset{0}{\cancel{\pi x}}$$

$$x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow f'(x)=(\overset{0}{\cancel{\lfloor x\rfloor}})'\sin^2\pi x+\pi\lfloor x\rfloor\sin 2\pi x=\pi\lfloor x\rfloor\sin 2\pi x$$

با توجه به این که در نقاط صحیح هم مشتق تابع و هم تابع $\pi\lfloor x\rfloor\sin 2\pi x$ برابر با صفر است، می‌توان مشتق کلی را برابر این تابع در نظر گرفت.

۵۲۲ـ گزینه «۳» ابتدا توجه داشته باشید که برای رسم منحنی نظیر $r(t)$ می‌توان به صورت زیر پارامتر t را حذف کرد.

$$\begin{cases}x(t)=a\cos^3 t\\ y(t)=a\sin^3 t\end{cases}\to\begin{cases}x^{\frac{2}{3}}(t)=a^{\frac{2}{3}}\cos^2 t\\ y^{\frac{2}{3}}(t)=a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t\end{cases}\Rightarrow x^{\frac{2}{3}}(t)+y^{\frac{2}{3}}(t)=a^{\frac{2}{3}}(\cos^2 t+\sin^2 t)=a^{\frac{2}{3}}$$



با توجه به اینکه محور دوران خطی مایل است که منحنی را قطع نمی‌کند بهتر است از قضیه گلدن-پاپوس استفاده کنیم. طول این منحنی برابر است با:

$$\begin{cases}x'_t=3a\cos^2 t\sin t\\ y'_t=3a\sin^2 t\cos t\end{cases}$$

$$\to x_t'^{۲}+y_t'^{۲}=۹a^{۲}\cos^{۴}t\sin^{۲}t+۹a^{۲}\sin^{۴}t\cos^{۲}t=۹a^{۲}\cos^{۲}t\sin^{۲}t(\underbrace{\cos^{۲}t+\sin^{۲}t}_{۱})=۹a^{۲}\cos^{۲}t\sin^{۲}t$$

$$L=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۹a^{۲}\cos^{۲}t\sin^{۲}t}\,dt=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}|۳a\cos t\sin t|\,dt=\frac{۳a}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}۲\cos t\sin t\,dt=\frac{۳a}{۲}\sin^{۲}t\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۳a}{۲}$$

مختصات مرکز ثقل منحنی‌های پارامتری از روابط زیر به دست می‌آید.

$$\bar{x}=\frac{۱}{L}\int_{t_۱}^{t_۲}x_t\sqrt{x_t'^{۲}+y_t'^{۲}}\,dt$$
$$\bar{y}=\frac{۱}{L}\int_{t_۱}^{t_۲}y_t\sqrt{x_t'^{۲}+y_t'^{۲}}\,dt$$

با توجه به تقارن منحنی نسبت به نیمساز ربع اول، $\bar{x}=\bar{y}$ خواهد بود. پس:

$$\bar{x}=\bar{y}=\frac{۱}{L}\int_{t_۱}^{t_۲}x_t\sqrt{x_t'^{۲}+y_t'^{۲}}\,dt=\frac{۱}{\frac{۳a}{۲}}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}a\cos^{۳}t(۳a\cos t\sin t)dt=۲a\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos^{۴}t\sin t\,dt=-\frac{۲a}{۵}\cos^{۵}t\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۲a}{۵}$$

حال طبق قضیه گلدن- پاپوس داریم $S=L\times ۲\pi d$ که d فاصله مرکز تقارن از محور دوران بوده و برابر است با:

$$d=\frac{|۴\bar{x}+۳\bar{y}+۵|}{\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}}=\frac{\left|۴(\frac{۲a}{۵})+۳(\frac{۲a}{۵})+۵\right|}{\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}}=\frac{\frac{۱۴a}{۵}+۵}{۵}=\frac{۱۴a}{۲۵}+۱\Rightarrow S=\frac{۳a}{۲}\times ۲\pi\times(\frac{۱۴a}{۲۵}+۱)=\frac{۴۲a^{۲}}{۲۵}\pi+۳a\pi$$

۵۲۳ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه x، y و z زوایای یک مثلث هستند، مجموع آنها π رادیان خواهد بود. حال با استفاده از روش ساده شده لاگرانژ داریم:

$$\left.\begin{array}{c}x+y+z=\pi\\ \frac{\cos x\sin y\sin z}{۱}=\frac{\sin x\cos y\sin z}{۱}=\frac{\sin x\sin y\cos z}{۱}\end{array}\right\}\Rightarrow tgx=tgy=tgz$$

با توجه به اینکه با زوایای مثلث روبرو هستیم (و همواره در ربع اول و دوم قرار می‌گیرند) از تساوی اخیر می‌توان نتیجه گرفت که $x=y=z$ یعنی مثلث متساوی الاضلاع بوده و داریم:

$$w=\sin^{۳}\frac{\pi}{۳}=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۳}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$$

۵۲۴ـ گزینه «۳» حد داده شده را به ۲ حد تفکیک می‌کنیم:

$$L=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{۱^{۲}}{n^{۳}}+\frac{۲^{۲}}{n^{۳}}+\cdots+\frac{(n-۱)^{۲}}{n^{۳}}\right]}_{L_۱}+\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n-۱}{n}}_{L_۲}$$

$$L_۲=\lim_{n\to\infty}\frac{n-۱}{n}=۱\quad ,\quad L_۱=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{۱^{۲}}{n^{۳}}+\frac{۲^{۲}}{n^{۳}}+\cdots+\frac{(n-۱)^{۲}}{n^{۳}}\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n-۱}\frac{k^{۲}}{n^{۳}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n-۱}(\frac{k}{n})^{۲}$$

حد به دست آمده یک مجموع ریمان است که $f(\frac{i}{n})=(\frac{i}{n})^{۲}$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$L_۱=\int_{۰}^{۱}x^{۲}dx=\frac{۱}{۳}\Rightarrow L=L_۱+L_۲=\frac{۱}{۳}+۱=\frac{۴}{۳}$$

۵۲۵ـ گزینه «۳» با توجه به این که در مخرج $(۱-x)^{۳}$ را داریم، پس باید از سری $\frac{۱}{۱-x}=\sum_{k=۰}^{\infty}x^{k}$ دو بار مشتق بگیریم؛ یعنی:

$$\frac{۱}{(۱-x)^{۲}}=\sum_{k=۱}^{\infty}kx^{k-۱}\xrightarrow{\frac{d}{dx}}\frac{۲}{(۱-x)^{۳}}=\sum_{k=۲}^{\infty}k(k-۱)x^{k-۲}\xrightarrow{\times x^{۴}}\frac{۲x^{۴}}{(۱-x)^{۳}}=\sum_{k=۲}^{\infty}k(k-۱)x^{k+۲}\quad(۱)$$

$$k+۲=n\Rightarrow\sum_{k=۲}^{\infty}k(k-۱)x^{k+۲}=\sum_{n=۴}^{\infty}(n-۲)(n-۳)x^{n}\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{x^{۴}}{(۱-x)^{۳}}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۴}^{\infty}(n-۲)(n-۳)x^{n}$$

۵۲۶ــ گزینه «۱» ابتدا تصویر ناحیه انتگرال‌گیری بر صفحه xoy را به دست می‌آوریم:

$$x^۲+y^۲+z^۲=۹ \xrightarrow{z=۰} x^۲+y^۲=۹$$

که در واقع دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۳ است. از طرفی برای سطح یک کره به شعاع R داریم:

$$d\sigma=\frac{R}{\sqrt{R^۲-x^۲-y^۲}}dxdy$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$I=\iint_S z^۳\sqrt{x^۲+y^۲}\,d\sigma=\iint_S(\sqrt{۹-x^۲-y^۲})^۳\sqrt{x^۲+y^۲}\,\frac{۳}{\sqrt{۹-x^۲-y^۲}}dA=\iint_S ۳(۹-x^۲-y^۲)\sqrt{x^۲+y^۲}\,dA$$

$$=\iint_S ۳(۹-r^۲)\times r\times rdrd\theta=۳\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۳ r^۲(۹-r^۲)drd\theta=۶\pi\int_۰^۳(۹r^۲-r^۴)dr=۶\pi(۳r^۳-\frac{r^۵}{۵})\Big|_۰^۳=۶\pi(۳\times۲۷-\frac{۳^۵}{۵})=\frac{۹۷۲\pi}{۵}$$

۵۲۷ــ گزینه «۲» در نیم‌دایره‌ی بالایی از دایره به شعاع ۲ داریم: $۰\le\theta\le\pi$ و $۰\le r\le۲$. در نتیجه با استفاده از مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$I=\int_۰^\pi\int_۰^۲ r\sin\theta\cos r\sin r(rdrd\theta)=[\int_۰^\pi\sin\theta\,d\theta]\times[\int_۰^۲ r^۲\cos r\sin rdr]$$

از فرمول مثلثاتی $\cos r\sin r=\frac{۱}{۲}\sin ۲r$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$I=[-\cos\theta]_۰^\pi\times\frac{۱}{۲}\int_۰^۲ r^۲\sin ۲rdr=\frac{۲}{۲}\int_۰^۲ r^۲\sin ۲rdr$$

حالا از روش جدول استفاده می‌کنیم:

$r^۲$	$\sin ۲r$
$۲r$	$\oplus\ -\frac{۱}{۲}\cos ۲r$
۲	$\ominus\ -\frac{۱}{۴}\sin ۲r$
۰	$\oplus\ \frac{۱}{۸}\cos ۲r$

$$I=[-\frac{r^۲}{۲}\cos ۲r+\frac{r}{۲}\sin ۲r+\frac{۱}{۴}\cos ۲r]_۰^۲=-۲\cos ۴+\sin ۴+\frac{۱}{۴}\cos ۴-\frac{۱}{۴}=-\frac{۷}{۴}\cos ۴+\sin ۴-\frac{۱}{۴}$$

۵۲۸ــ گزینه «۲» هر دو انتگرال در نقطه $x=۰$ ناسره هستند. برای بررسی همگرایی انتگرال A ابتدا با کمی تغییر متغیر آن را ساده‌تر می‌کنیم:

$$A=\int_۰^۱\frac{(Lnx)^{۱۳۹۵}}{\sqrt{x}}dx \qquad x=t^۲\ \Rightarrow\ dx=۲tdt\ \Rightarrow\ A=\int_۰^۱\frac{(Lnt^۲)^{۱۳۹۵}}{t}۲tdt=۲\int_۰^۱(۲Lnt)^{۱۳۹۵}dt=۲^{۱۳۹۶}\int_۰^۱(Lnt)^{۱۳۹۵}dt$$

$$Lnt=-u\ \Rightarrow\ \frac{dt}{t}=-du\ \Rightarrow\ dt=-e^{-u}du$$

$$\Rightarrow\ A=۲^{۱۳۹۶}\int_\infty^۰(-u)^{۱۳۹۵}(-e^{-u})du=-۲^{۱۳۹۶}\int_۰^\infty u^{۱۳۹۵}e^{-u}du=-۲^{۱۳۹۶}\Gamma(۱۳۹۶)=-۲^{۱۳۹۶}(۱۳۹۵!)$$

اگر بخواهیم انتگرال را حل نکنیم می‌توانیم مثلاً از آزمون مقایسه استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{\frac{(Lnx)^{۱۳۹۵}}{\sqrt{x}}}{\frac{۱}{\sqrt[۸]{x^۵}}}=\lim_{x\to۰^+}\sqrt[۸]{x}(Lnx)^{۱۳۹۵}=۰$$

و چون $\int_۰^۱\frac{dx}{x^{\frac{۵}{۸}}}$ همگراست، لذا انتگرال اصلی هم همگراست.

$$B=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{(\sin x)^{۱۳۹۵}}{x^{۱۳۹۷}}dx\sim\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{x^{۱۳۹۵}}{x^{۱۳۹۷}}dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{x^۲}dx$$

با توجه به این که انتگرال $\int_۰^a\frac{۱}{x^p}dx$ به ازای $p<۱$ همگرا ست، پس انتگرال B واگرا خواهد بود.

۵۲۹ـ گزینه «۱» باید پیوستگی هرکدام را به صورت جداگانه بررسی کنیم:

با توجه به این که تابع همگن و اختلاف درجه صورت و مخرج برابر یک است، پس حد تابع در $(0,0)$ وجود دارد و برابر صفر است یعنی تابع در این نقطه پیوسته است.

ابتدا $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در هر نقطه به غیر از مبدا به دست می‌آوریم، سپس برای محاسبه این مشتقات جزئی در مبدأ، از تعریف استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-3y^2(x^2+y^2)+2y(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2yx^3-3x^2y^2-2y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

با توجه به این که اختلاف درجه صورت و مخرج صفر است، $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ هر دو در صفر فاقد حد هستند پس بدون محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ می‌توان نتیجه گرفت در مبدأ پیوسته نیستند.

۵۳۰ـ گزینه «۲» فاصله مرکز ثقل از محور xها در واقع همان $\bar{y}$ است. در نتیجه با توجه به فرمول محاسبه عرض مرکز ثقل یک جسم همگن داریم:

$$\bar{y}=\frac{M_x}{S}$$

$$S=\left|\int_0^b y\,dx\right|=\left|\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin 3x)dx\right|=\left|(-\frac{2}{3}\cos 3x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right|=\frac{4}{3}$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin 3x)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(4\sin^2 3x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 6x)dx=(x-\frac{\sin 6x}{6})\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}\qquad\Rightarrow \bar{y}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{\pi}{4}$$

۵۳۱ـ گزینه «۴» برای پیدا کردن حجم مطلوب، از روش پوسته استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. توجه داشته باشید که در این حالت شعاع دوران $|y+2|$ و ارتفاع استوانه $|x-1|$ خواهد بود. حدود y نیز به سادگی به دست می‌آید:

$$x=1\ \Rightarrow\ y^2=4x=4\ \Rightarrow\ y=-2\ ,\ y=2$$

$$V=2\pi\int_{-2}^{2}|y+2||x-1|dy=2\pi\int_{-2}^{2}(y+2)(1-\frac{y^2}{4})dy=2\pi\int_{-2}^{2}(2+y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{4})dy=4\pi\int_0^2(2-\frac{y^2}{2})dy$$

$$=4\pi(2y-\frac{y^3}{6})\Big|_0^2=4\pi(4-\frac{8}{6})=\frac{32\pi}{3}$$

۵۳۲ـ گزینه «۴» توجه داشته باشید که $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ یک میدان برداری است اما $R=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ یک تابع حقیقی است، بنابراین طبق رابطه $\mathrm{div}(\phi\vec{F})=\phi(\vec{\nabla}.\vec{F})+(\vec{\nabla}\phi).\vec{F}$ خواهیم داشت:

$$\mathrm{div}(R^{-1}\vec{r})=R^{-1}(\vec{\nabla}.\vec{r})+(\vec{\nabla}R^{-1}).\vec{r}=R^{-1}\left[(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}).(x,y,z)\right]+\left[(\frac{\partial R^{-1}}{\partial x},\frac{\partial R^{-1}}{\partial y},\frac{\partial R^{-1}}{\partial z}).(x,y,z)\right]$$

$$=R^{-1}(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z})+(x\frac{\partial R^{-1}}{\partial x}+y\frac{\partial R^{-1}}{\partial y}+z\frac{\partial R^{-1}}{\partial z})$$

حالا با توجه به تعریف تابع R و استفاده از مشتق‌گیری ضمنی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{R}\quad,\quad\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{y}{R}\quad,\quad\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{z}{R}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial R^{-1}}{\partial x}=-1R^{-2}\frac{\partial R}{\partial x}=-R^{-3}x\quad,\quad\frac{\partial R^{-1}}{\partial y}=-R^{-3}y\quad,\quad\frac{\partial R^{-1}}{\partial z}=-R^{-3}z$$

$$\Rightarrow\mathrm{div}(R^{-1}\vec{r})=R^{-1}(1+1+1)+(-R^{-3}x^2-R^{-3}y^2-R^{-3}y^2)=3R^{-1}-R^{-3}(x^2+y^2+z^2)=3R^{-1}-R^{-3}(R^2)=3R^{-1}-R^{-1}=2R^{-1}$$

۵۳۳ـ گزینه «۴» ابتدا توجه کنید که نقطه داده شده یعنی $(2,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$ روی منحنی قرار ندارد زیرا روی منحنی داده شده $\phi=\frac{\pi}{3}$ می‌باشد، پس ابتدا آن را به صورت $(2,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})$ اصلاح می‌کنیم. می‌دانیم در مختصات کروی $x=\rho\sin\phi\cos\theta$ و $y=\rho\sin\phi\sin\theta$ و $z=\rho\cos\phi$ می‌باشد پس منحنی داده شده را می‌توان به صورت $\vec{R}(\theta)=(\sqrt{3}\cos\theta\,,\sqrt{3}\sin\theta\,,1)$ نوشت. از معادله به دست آمده واضح است که خم در صفحه $z=1$ قرار دارد و بنابراین تاب در تمام نقاط آن صفر است. از طرفی خم دایره‌ای به صورت $x^2+y^2=3$ و به ارتفاع $z=1$ می‌باشد و می‌دانیم انحنای دایره برابر عکس شعاع آن است پس $\kappa=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

۵۳۴ـ گزینه «۱» با توجه به شکل داده شده هدف محاسبه مساحت قسمتی از کره $\rho=2$ است که داخل مخروط $\phi=\frac{\pi}{3}$ قرار دارد.

معادله کره $x^2+y^2+z^2=4$ و معادله مخروط $z=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد.

پس مساحت قسمتی از کره که داخل مخروط $z^2=\frac{1}{3}(x^2+y^2)$ و $z\ge 0$ واقع است را محاسبه می‌کنیم. چون قسمت بالایی کره مدنظر است داریم $ds=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. برای یافتن تصویر ناحیه بر صفحه xy باید z را بین معادله کره و مخروط حذف کنیم.

$$z^2=\frac{1}{3}(x^2+y^2)\ \Rightarrow x^2+y^2+\frac{1}{3}(x^2+y^2)=4\ \Rightarrow x^2+y^2=3\ \Rightarrow r=\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت}=\iint_S ds=\iint_D\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}drd\theta=(\int_0^{2\pi}2d\theta)(\int_0^{\sqrt{3}}\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}dr)=4\pi(-\sqrt{4-r^2}\Big|_0^{\sqrt{3}})=4\pi$$

۵۳۵ـ گزینه «۴» فاصله دو صفحه داده شده برابر قطر کره می‌باشد، یعنی:

$$2R=\frac{|9-3|}{\sqrt{1+1+1}}=2\sqrt{3}\ \Rightarrow R=\sqrt{3}$$

مرکز کره را نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ فرض می‌کنیم، در این صورت با توجه به اینکه طبق فرض مرکز کره روی صفحات $y=2x$ و $z=3x$ قرار دارد پس نقطه P به صورت $P(x_0,2x_0,3x_0)$ در می‌آید. فاصله این نقطه از صفحه مماس برابر شعاع کره است، بنابراین:

$$\frac{|x_0+2x_0+3x_0-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}\ \Rightarrow|6x_0-3|=3\ \Rightarrow x_0=0,1$$

مقدار $x_0=0$ قابل قبول نیست و به ازای $x_0=1$ نقطه P یعنی مرکز کره $P(1,2,3)$ می‌شود. حال فاصله نقطه P تا صفحه $ax-y+2z=0$ را به دست می‌آوریم و برابر شعاع کره قرار می‌دهیم:

$$\frac{|a-2+6|}{\sqrt{a^2+1+4}}=\sqrt{3}\ \Rightarrow|a+4|=\sqrt{15+3a^2}\ \Rightarrow a=2\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

۵۳۶ـ گزینه «۱»

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد و داشته باشیم $e^A=I+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots$ آن‌گاه حاصل e^A برابر است با: $e^A=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n}\end{bmatrix}$

پس در این مثال چون $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است، حاصل e^A برابر است با:

$$e^A=\begin{bmatrix}e^{-1} & 0\\ 0 & e^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

۵۳۷ـ گزینه «۴» اگر $z=x+iy$، می‌دانیم $\operatorname{Re}(z)=x$ و همچنین $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. با محاسبه‌ی $\frac{1}{z+i}+2i$ داریم:

$$\frac{1}{z+i}+2i=\frac{1}{x+(y+1)i}+2i=\left(\frac{1}{x+(y+1)i}\times\frac{x-(y+1)i}{x-(y+1)i}\right)+2i=\frac{x-(y+1)i}{x^2+(y+1)^2}+2i$$

$$\begin{cases}\text{سمت چپ}=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z+i}+2i\right)=\dfrac{x}{x^2+(y+1)^2} & (I)\\[2mm] \text{سمت راست}=\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|^2}=\dfrac{\operatorname{Re}(x+iy)}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2} & (II)\end{cases}$$

از تساوی این دو عبارت خواهیم داشت:

$$\frac{x}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

پس یا $x=0$ است یا با حذف x از طرفین داریم:

$$x^2+(y+1)^2=x^2+y^2\Rightarrow y^2+2y+1=y^2\Rightarrow 2y+1=0\Rightarrow y=-\frac12$$

پس یا $x=0$ یا $y=-\frac12$ که نشان می‌دهد گزینه (۴) صحیح است.

۵۳۸ـ گزینه «۱»

روش اول: طبق صورت سؤال فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a\neq 0$ در این صورت شعاع همگرایی سری توانیِ $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ برابر است با $R=\frac1a$ حالا طبق متن درس اگر به جای x^n، در سری توانی، x^{2n} داشته باشیم شعاع همگرایی به توان $\frac12$ می‌رسد پس:

$$R=\left(\frac1a\right)^{\frac12}=\frac{1}{\sqrt a}\times\frac{\sqrt a}{\sqrt a}=\frac{\sqrt a}{a}$$

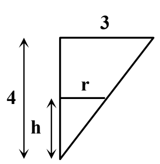
روش دوم: با استفاده از آزمون ریشه، ناحیه همگرایی و سپس شعاع همگرایی را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^{2n}|}=a|x|^2<1\Rightarrow |x|^2<\frac1a\Rightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt a}\Rightarrow |x|<\frac{\sqrt a}{a}\Rightarrow R=\frac{\sqrt a}{a}$$

۵۳۹ـ گزینه «۱» حد فوق مبهم و از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ است، پس با توجه به قاعده هوپیتال و مشتق از انتگرال داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}\ \underline{\underline{HOP}}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2\int_0^x e^{t^2}dt\right)\left(e^{x^2}\right)}{e^{2x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}\ \underline{\underline{HOP}}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac1x=\frac1\infty=0$$

۵۴۰ـ گزینه «۳» اگر زمانی که ارتفاع آب درون ظرف h باشد شعاع سطح مقطع آب را r بگیریم حجم آب درون ظرف $V=\frac13\pi r^2h$ است. با توجه به شکل داریم $\frac r3=\frac h4$ در نتیجه $r=\frac34h$ و لذا $V=\frac{3\pi}{16}h^3$، اکنون با مشتق‌گیری از رابطه حجم داریم:



$$\frac{dV}{dt}=\frac{3\pi}{16}\cdot 3h^2\frac{dh}{dt}\to 5=\frac{3\pi}{16}\times 3(2)^2\times\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{20}{9\pi}$$

۵۴۱ـ گزینه «۲» با استفاده از تغییر متغیرهای $u=4x-3y$ و $v=2x+y$، به معادله‌ی دایره‌ی $u^2+v^2=25$ می‌رسیم، واضح است؛ مساحت ناحیه محصور در مختصات جدید برابر 25π است. از طرفی ژاکوبین این تغییر متغیر به شکل زیر به دست می‌آید:

$$J_{xy}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4\times1-2(-3)=10\Rightarrow J_{uv}=\frac{1}{10}$$

$$\text{مساحت موردنظر}=\iint_A dy\,dx=\iint\left(\frac{1}{10}\right)du\,dv=\frac{1}{10}\iint du\,dv=\frac{1}{10}\,(\text{مساحت ناحیه در مختصات جدید})=\frac{1}{10}\times25\pi=\frac{25\pi}{10}=\frac{5\pi}{2}$$

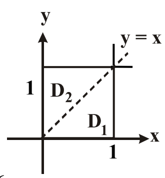
۵۴۲ـ گزینه «۴» انتگرال داده شده را به صورت مقابل ساده می‌کنیم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x\times\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 x\,tg^3 x\,dx$$

حالا از تغییر متغیر $u=tgx$ استفاده می‌کنیم. $du=\sec^2 xdx$ است.

$$I=\frac{tg^4 x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{(\sqrt{3})^4}{4}=\frac{9}{4}$$

۵۴۳ـ گزینه «۳» ناحیه‌ی انتگرال‌گیری یک مربع است. با توجه به گزینه‌ها از تغییر متغیر قطبی استفاده می‌کنیم:



$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

برای تبدیل ناحیه انتگرال‌گیری داریم:

$$D_1:\begin{cases}x=1\Rightarrow r\cos\theta=1\Rightarrow r=\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta\\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}y=1\Rightarrow r\sin\theta=1\Rightarrow r=\dfrac{1}{\sin\theta}=\operatorname{cosec}\theta\\ \dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

بنابراین انتگرال داده شده در مختصات قطبی برابر است با:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta}rf(r)\,dr\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\operatorname{cosec}\theta}rf(r)\,dr\,d\theta$$

۵۴۴ـ گزینه «۲» امتداد نیمساز دو بردار $\bar{u}$ و $\bar{v}$ برابر است با برآیند بردارهای یکه شده‌ی آن‌ها:

$$\text{بردار نیمساز}=\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}+\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}=\frac{(1,2,-2)}{\sqrt{1+4+4}}+\frac{(3,0,-4)}{\sqrt{9+16}}=\frac{(1,2,-2)}{3}+\frac{(3,0,-4)}{5}$$

$$\Rightarrow\ \text{بردار نیمساز}=(\frac{1}{3}+\frac{3}{5},\frac{2}{3}+0,-\frac{2}{3}-\frac{4}{5})=(\frac{14}{15},\frac{2}{3},\frac{-22}{15})$$

۵۴۵ـ گزینه «۱» از طرفین تساوی قدرمطلق می‌گیریم:

$$z=x+iy\Rightarrow\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n=\left|\frac{1+ai}{1-ai}\right|\Rightarrow\left|\frac{(1-y)+ix}{(1+y)-ix}\right|^n=\left|\frac{1+ai}{1-ai}\right|\Rightarrow\left(\frac{(1-y)^2+x^2}{(1+y)^2+x^2}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{1+a^2}{1+a^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1$$

$$\Rightarrow\frac{(1-y)^2+x^2}{(1+y)^2+x^2}=1\Rightarrow(1-y)^2+x^2=(1+y)^2+x^2\Rightarrow 1-2y+y^2+x^2=1+2y+y^2+x^2\Rightarrow -2y=2y\Rightarrow y=0$$

پس همه‌ی جواب‌های این معادله به صورت $z=x$ هستند یعنی حقیقی هستند.

۵۴۶ـ گزینه «۳» با توجه به اتحادهای مربوط به کرل و دیورژانس داریم: $div(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{\nabla}.(\vec{F}\times\vec{G})=(\vec{\nabla}\times\vec{F}).\vec{G}-\vec{F}.(\vec{\nabla}\times\vec{G})=\vec{G}.curl\vec{F}-\vec{F}.curl\vec{G}$

۵۴۷ـ گزینه «۳» برای یافتن محل تلاقی خط و صفحه کافیست که معادله‌ی پارامتری خط را در معادله‌ی صفحه قرار دهیم:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}\Rightarrow\ \text{معادله‌ی پارامتری خط}:\begin{cases}x=2t+1\\ y=3t+2\\ z=4t+3\end{cases}$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله‌ی صفحه داریم: $2t+1+3t+2+4t+3=15\Rightarrow 9t+6=15\Rightarrow t=1$

بنابراین مقدار y در نقطه‌ی تلاقی برابر است با: $y=3t+2=3\times1+2=5$

۵۴۸ـ گزینه «۱»

روش اول: طبق صورت سؤال فرض می‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a\neq0$ در این صورت شعاع همگرایی سری توانیِ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ برابر است با $R=\frac{1}{a}$ حالا طبق متن درس اگر به جای x^n، در سری توانی، x^{2n} داشته باشیم شعاع همگرایی به توان $\frac{1}{2}$ می‌رسد پس:

$$R=(\frac{1}{a})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

روش دوم: با استفاده از آزمون ریشه، ناحیه همگرایی و سپس شعاع همگرایی را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^{2n}|}=a|x|^2<1\Rightarrow|x|^2<\frac{1}{a}\Rightarrow|x|<\frac{1}{\sqrt{a}}\Rightarrow|x|<\frac{\sqrt{a}}{a}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

۵۴۹ـ گزینه «۴» رویه $f(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{c}$ را در نظر بگیریم. فرض کنیم $P(x_0,y_0,z_0)$ نقطه‌ای دلخواه از این رویه باشد.

معادله صفحه مماس بر رویه در نقطه P را می‌نویسیم. ابتدا مشتق‌های جزئی را حساب کنیم:

$$f_x(P)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\ ,\ f_y(P)=\frac{1}{2\sqrt{y_0}}\ ,\ f_z(P)=\frac{1}{2\sqrt{z_0}}$$

پس معادله صفحه مماس چنین است:

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

طول از مبدأ این صفحه را به‌دست آوریم:

$$\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)-\frac{y_0}{2\sqrt{y_0}}-\frac{z_0}{2\sqrt{z_0}}=0\Rightarrow x=\sqrt{x_0}(\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})+x_0=\sqrt{x_0}(\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}+\sqrt{x_0})=\sqrt{c}\sqrt{x_0}$$

به همین ترتیب با جایگذاری $x=0$ و $z=0$ عرض از مبدأ برابر است با $y=\sqrt{c}\sqrt{y_0}$ و به ازای $x=0$ و $y=0$ ارتفاع از مبدأ برابر است با $z=\sqrt{c}\sqrt{z_0}$.

مجموع این سه مقدار برابر است با:

$$\sqrt{c}\sqrt{x_0}+\sqrt{c}\sqrt{y_0}+\sqrt{c}\sqrt{z_0}=\sqrt{c}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{c}\sqrt{c}=c$$

۵۵۰ـ گزینه «۱» ناحیه‌ی D ربع اول از دایره‌ی واحد است. در این ناحیه داریم $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le r\le 1$.

$$\iint_D xy(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(r\cos\theta)(r\sin\theta)(r^2)^{\frac{3}{2}}rdrd\theta$$

انتگرال دوگانه را در مختصات قطبی حل می‌کنیم:

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}\sin 2\theta)(\frac{r^7}{7})\Big|_0^1 d\theta=\frac{1}{14}(\frac{-1}{2}\cos 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{28}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{1}{14}$$

۵۵۱ـ گزینه «۱» در انتگرال‌های شامل توابع هیپربولیک، معمولاً باید فرم توانی آن‌ها را جایگزین کرد، یعنی داریم:

$$I=\int \operatorname{sech} x dx=\int\frac{dx}{\cosh x}=\int\frac{2dx}{e^x+e^{-x}}\xrightarrow{e^x\ \text{صورت و مخرج ضرب در}}I=\int\frac{2e^x dx}{(e^x)^2+1}$$

حال اگر از تغییر متغیر $e^x=u$ استفاده کنیم، داریم:

$$e^x=u\Rightarrow e^x dx=du\ ,\ (e^x)^2=u^2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$I=\int\frac{2du}{1+u^2}=2\tan^{-1}u=2\tan^{-1}(e^x)$$

۵۵۲ـ گزینه «۳»

روش اول: با توجه به معادلات پارامتری داده شده متوجه می‌شویم که روی منحنی $\vec{r}(t)$ داریم:

$$x=3\cos 2t\quad ,\quad y=4\quad ,\quad z=3\sin 2t$$

بنابراین $x^2+z^2=9$ و $y=4$ است.

پس این منحنی یک دایره به شعاع $R=3$ است که در صفحه $y=4$ قرار دارد. انحنای دایره‌ای به شعاع R در هر نقطه برابر با $\kappa=\frac{1}{R}$ است، در نتیجه $\kappa=\frac{1}{3}$ است.

روش دوم: بردارهای $\vec{r}'(t)$ و $\vec{r}''(t)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\vec{r}'(t)=(-6\sin 2t\ ,\ 0\ ,\ 6\cos 2t)$$

$$\vec{r}''(t)=(-12\cos 2t\ ,\ 0\ ,\ -12\sin 2t)$$

بردار $\vec{r}'\times\vec{r}''$ را حساب می‌کنیم:

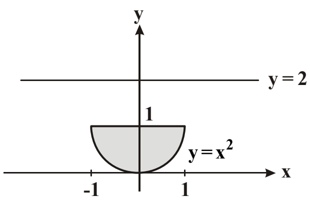
$$\vec{r}'\times\vec{r}''=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6\sin 2t & 0 & 6\cos 2t\\ -12\cos 2t & 0 & -12\sin 2t\end{vmatrix}=-(72\sin^2 2t+72\cos^2 2t)\vec{j}=-72\vec{j}$$

اکنون طبق فرمول انحنا داریم:

$$\kappa=\frac{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}=\frac{72}{(\sqrt{36})^3}=\frac{72}{6^3}=\frac{1}{3}$$

۵۵۳ـ گزینه «۱» حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی‌های $y_۱ = f(x)$ و $y_۲ = g(x)$ حول خط $y = k$ در بازه $a \le x \le b$ به این صورت به دست می‌آید:

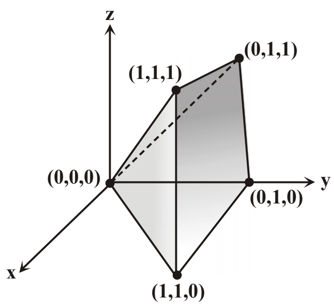
$$V = \pi\int_a^b [(f(x)-k)^۲ - (g(x)-k)^۲]dx$$



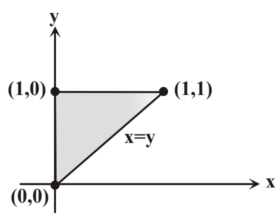
در این مثال منحنی‌های $f(x) = x^۲$ و $g(x) = ۱$ در نقاط $x = \pm ۱$ با هم برخورد می‌کنند؛ پس $-۱ \le x \le ۱$ است.

$$V = \pi\int_{-۱}^{۱}[(x^۲-۲)^۲-(۱-۲)^۲]dx = \pi\int_{-۱}^{۱}(x^۴-۴x^۲+۳)dx = \pi[\frac{x^۵}{۵}-\frac{۴x^۳}{۳}+۳x]_{-۱}^{۱} = \pi(\frac{۲}{۵}-\frac{۸}{۳}+۶) \Rightarrow V = \pi\frac{۶-۴۰+۹۰}{۱۵} = \frac{۵۶}{۱۵}\pi$$

۵۵۴ـ گزینه «۱» چهار تا از این نقاط یعنی نقاط (۰,۱,۰)، (۱,۱,۰)، (۰,۱,۱) و (۱,۱,۱) روی صفحه‌ی $y = ۱$ قرار دارند.



نقاط (۰,۰,۰)، (۰,۱,۱) و (۱,۱,۱) نیز روی صفحه‌ی $z = y$ قرار دارند، زیرا در همه‌ی آن‌ها مقدار y و z یکسان است. بنابراین حدود z به‌صورت $۰ \le z \le y$ به‌دست می‌آیند. در ضمن اگر فقط به مؤلفه‌های (x, y) در این نقاط توجه کنیم، متوجه می‌شویم که تصویر این هرم در صفحه xy مثلثی با رئوس (۰,۰)، (۱,۱) و (۰,۱) است.



این ناحیه را در شکل مقابل نشان داده‌ایم:

در این ناحیه داریم: $۰ \le y \le ۱$ و اگر از چپ به راست حرکت کنیم، $x = ۰$ مرز ورودی و $x = y$ مرز خروجی است. پس $۰ \le x \le y$.

با نوشتن حدود انتگرال سه‌گانه خواهیم داشت:

$$V = \int_۰^۱\int_۰^y\int_۰^y \sin(\pi y^۳)\,dz\,dx\,dy$$

در مورد ترتیب $dz\,dx\,dy$ توجه کنید که چون تابع زیر انتگرال برحسب متغیر y است، بهتر است انتگرال‌گیری نسبت به y را در آخرین مرحله انجام دهیم تا محاسبه انتگرال‌های میانی ساده‌تر شود.

$$V = \int_۰^۱\int_۰^y \sin(\pi y^۳)[z]_۰^y\,dx\,dy = \int_۰^۱\int_۰^y y\sin(\pi y^۳)\,dx\,dy = \int_۰^۱ y\sin(\pi y^۳)[x]_۰^y\,dy = \int_۰^۱ y^۲\sin(\pi y^۳)\,dy = \frac{-۱}{۳\pi}[\cos(\pi y^۳)]_۰^۱$$

$$\Rightarrow V = -\frac{۱}{۳\pi}[\cos(\pi)-\cos(۰)] = \frac{۲}{۳\pi}$$

۵۵۵ـ گزینه «۳» برای دستگاه ناهمگن، در صورتی بی‌شمار جواب داریم که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد و همچنین با جایگذاری ماتریس مقادیر به‌جای هریک از ستون‌های ماتریس ضرایب نیز، دترمینان ماتریس حاصل صفر باشد. یعنی داریم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ b & ۳ & b \\ ۲ & ۲ & a \end{vmatrix} = (۳a-۲b)-(ab-۲b)+(۲b-۶) = ۰ \Rightarrow ۳a-ab+۲b = ۶ \quad (*)$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ b & ۳ & ۳b \\ ۲ & ۲ & ۷ \end{vmatrix} = (۲۱-۶b)-(۷b-۶b)+۳(۲b-۶) = ۰ \Rightarrow b = ۳ \xrightarrow{(*)} ۳a-۳a+۶ = ۶$$

همان‌طور که می‌بینید، با قرار دادن مقدار ۳ برای b به یک معادله بدیهی رسیدیم که کمکی به محاسبه a نمی‌کند؛ ولی اگر دقت کنید، درصورتی‌که $a = ۲$ باشد، معادلات اول و سوم دستگاه ناسازگار می‌شوند و دستگاه جواب نخواهد داشت، پس باید $a \ne ۲$ باشد.

۵۵۶ـ گزینه «۱» یکی از فرمول‌های محاسبه‌ی تاب به این صورت است:

$$\tau = \frac{\vec{r}'.(\vec{r}''\times\vec{r}''')}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|^۲}$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{r}'.(\vec{r}''\times\vec{r}''') = \tau|\vec{r}'\times\vec{r}''|^۲$$

از طرفی می‌دانیم که انحنا از رابطه‌ی $\kappa = \frac{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}{|\vec{r}'|^۳}$ به دست می‌آید. در ضمن وقتی منحنی را بر حسب پارامتر طول قوس می‌نویسیم، اندازه‌ی بردار سرعت برابر با یک می‌شود یعنی $|\vec{r}'| = ۱$. در نتیجه: $\kappa = |\vec{r}'\times\vec{r}''|$. به این ترتیب عبارت مورد نظر به این شکل نوشته می‌شود:

$$\vec{r}'.(\vec{r}''\times\vec{r}''') = \tau\kappa^۲$$

۵۵۷ــ گزینه «۲» از فرمول انحنای منحنی‌های قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\kappa(\theta)=\frac{|2r'^2+r^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

در مبدأ مختصات داریم $r=0$ در نتیجه:

$$\kappa=|\frac{2r'^2}{r'^3}|\Rightarrow \kappa=|\frac{2}{r'}|$$

شعاع انحناء برابر است با:

$$\rho=\frac{1}{\kappa}=\frac{1}{2}|r'|=\frac{1}{2}|\frac{dr}{d\theta}|$$

با فرض مثبت بودن r'، گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۵۵۸ــ گزینه «۲» بردار $\vec{\nabla}f$، در هر نقطه از منحنی، بر آن عمود است. در نقطه‌ی (x_0,y_0) داریم: $\vec{\nabla}f=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$. پس معادله‌ی خط قائم بر منحنی، چنین است:

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}\Rightarrow f_y(x_0,y_0)(x-x_0)-f_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

۵۵۹ــ گزینه «۲» برای به دست آوردن مشتق جهتی مرتبه دوم، باید گرادیان مشتق جهتی مرتبه اول را به دست آوریم، یعنی داریم:

$$f(x,y,z)=xyz$$

$$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}f=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$$

$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{مشتق جهتی مرتبه‌ی اول}=\vec{\nabla}f.\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(yz-xz-xy)$$

حال گرادیان این عبارت را می‌گیریم و داریم:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}f.\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|})=\frac{1}{\sqrt{3}}(-z-y)\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}(z-x)\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}(y-x)\vec{k}\xrightarrow{(2,3,1)}=\frac{-4}{\sqrt{3}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\text{مشتق جهتی دوم}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-4\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}).\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{-4}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$$

۵۶۰ــ گزینه «۲» ضریب x^3 در بسط مک‌لورن برابر است با $\frac{f'''(0)}{3!}$ بنابراین ابتدا از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=1+f^{10}(x)\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}}f''(x)=10f'(x)\times f^9(x)\qquad(*)$$

با مشتق‌گیری مجدد از رابطه فوق داریم:

$$f'''(x)=10f''(x)\times f^9(x)+90f'^2(x)\times f^8(x)\qquad(**)$$

با جایگذاری $x=0$ در همه‌ی معادلات به دست آمده داریم:

$$f'(0)=1+f^{10}(0)=1+1=2\ ,\ f''(0)=10\times2\times1=20\ ,\ f'''(0)=200+180$$

$$\text{ضریب } x^3 \text{ در بسط مک‌لورن}=\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{380}{6}=\frac{190}{3}$$

۵۶۱ــ گزینه «۱» درواقع ضابطه‌ی دنباله a_n به‌صورت مقابل است:

$$a_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n-1}}$$

بنابراین حد دنباله a_n برابر است با:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^{n-1}}$$

با توجه به اینکه سرعت رشد مخرج بیشتر از صورت می‌باشد بنابراین مقدار حد فوق برابر صفر است.

۵۶۲ــ گزینه «۳» با توجه به اینکه $f(a)f(b)<0$ می‌باشد بنابراین معادله $f(x)=0$ در بازه $[a,b]$ حداقل یک ریشه دارد. از طرفی چون $f'(x)>0$ است بنابراین تابع $f(x)$ صعودی است و طبق متن درس معادله $f(x)=0$ تنها همان یک ریشه را دارا خواهد بود. در نتیجه گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۵۶۳ـ گزینه «۲» با جایگذاری $a=b=0$ در معادله‌ی داده شده داریم $f(0)=(f(0))^2$ پس با توجه به شرط $f(0)\neq 0$ داریم $f(0)=1$. مشتق تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

با توجه به تعریف تابع f داریم:

$$f(x+h)=f(x)f(h)\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}\Rightarrow f'(x)=f(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$

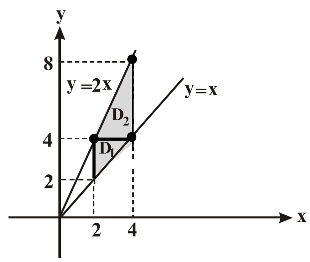
از آنجا که $f(0)=1$ است داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$$

با جایگزینی این مقدار در $f'(x)$ داریم:

$$f'(x)=f(x)\times f'(0)$$

۵۶۴ـ گزینه «۴» ابتدا ناحیه D را رسم کرده و ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم.



$$\begin{cases} y=x \\ y=2x \\ 2\leq x\leq 4\end{cases}\Rightarrow$$

همان‌طور که دیده می‌شود ناحیه D نسبت به x نامنظم می‌باشد و می‌توان آن را به دو ناحیه منظم D_1 و D_2 تبدیل کرد. برای هر از این ناحیه‌ها کران‌های انتگرال‌گیری به صورت زیر می‌باشد:

$$I=\iint_{D_1}f(x,y)\,dxdy+\iint_{D_2}f(x,y)\,dxdy\Rightarrow I=\int_2^4\int_2^y f(x,y)\,dxdy+\int_4^8\int_{\frac{y}{2}}^4 f(x,y)\,dxdy$$

۵۶۵ـ گزینه «۴» می‌دانیم که برای $|x|<1$ تساویِ $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ برقرار می‌باشد، با مشتق گرفتن از طرفین تساوی، نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\xrightarrow{x=\frac{2}{3}}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}=9$$

۵۶۶ـ گزینه «۲» طول قوس منحنی پارامتری $\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ برابر است با:

$$L=\int_a^b\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)}\,dt$$

بنابراین برای منحنی داده شده داریم:

$$x'_t(t)=2\sin t\cos t\times\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin^4 t\right)=\sin(2t).\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin^4 t\right)$$

$$y'_t(t)=2\sin t\cos t\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin^4 t\right)=\sin(2t).\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin^4 t\right)$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه L داریم:

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2(2t)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sin^4 t\right)+\sin^2(2t)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin^4 t\right)}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2(2t)\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sin^4 t\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin^4 t\right)\right]}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=-\frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

۵۶۷ـ گزینه «۳» با استفاده از تعریف حد مجموع ریمانی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin^2\pi x\,dx=\int_0^1\frac{1-\cos 2\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$$

۵۶۸ـ گزینه «۴» سری داده شده به دو سری مقابل تفکیک می‌شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(r^n+\frac{1}{r^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}$$

بنابراین اشتراک مقادیر همگرایی سری‌های سمت راست تساوی جواب مورد نظر می‌باشد، لذا:

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n\xrightarrow{\text{بازه همگرایی}}|r|<1\Rightarrow -1<r<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}\xrightarrow{\text{بازه همگرایی}}\frac{1}{|r|}<1\Rightarrow|r|>1\Rightarrow\begin{cases}r>1\\ r<-1\end{cases}$$

برای اعداد $-1<r<1$ سری $\sum_{n=0}^{\infty}r^n$ همگرا و سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}$ واگراست پس مجموع آن‌ها واگرا می‌باشد.

برای اعداد $r>1$ و $r<-1$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ واگرا و سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}$ همگراست پس مجموع آن‌ها واگرا می‌شود.

با توجه به گزینه‌ها نیازی به بررسی $r=1$ و $r=-1$ نیست و گزینه‌ی (۴) صحیح است.

با این حال در $r=1$ و $r=-1$ نیز یک سری واگرا به دست می‌آید. زیرا حد جمله‌ی عمومیِ سری $\sum_{n=0}^{\infty}(r^n+\frac{1}{r^n})$ صفر نمی‌شود.

۵۶۹ـ گزینه «۲» برای سادگی بیشتر؛ ابتدا e^{-h^2} را از انتگرال خارج می‌کنیم. یعنی می‌نویسیم $e^{x^2-h^2}=e^{-h^2}e^{x^2}$ و e^{-h^2} را از انتگرال خارج می‌کنیم چون نسبت به x ثابت است. در ضمن $e^{-h^2}=\frac{1}{e^{h^2}}$ است.

$$\text{جواب}=\lim_{h\to\infty}\frac{\int_0^h e^{x^2}(x^2+1)\,dx}{he^{h^2}}$$

حد داده شده فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ دارد. از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to\infty}\frac{e^{h^2}(h^2+1)}{e^{h^2}+2h^2e^{h^2}}=\lim_{h\to\infty}\frac{h^2+1}{1+2h^2}\simeq\lim_{h\to\infty}\frac{h^2}{2h^2}=\frac{1}{2}$$

۵۷۰ـ گزینه «۴»

$$A=a\vec{M}+b(\vec{M}\times\vec{N})$$

مطابق گزینه‌ها فرض کنیم برای اعداد حقیقی a و b داشته باشیم اکنون از فرض استفاده کنیم:

$$\vec{A}\times\vec{N}=\vec{M}-\vec{A}$$
$$(a\vec{M}+b(\vec{M}\times\vec{N}))\times\vec{N}=\vec{M}-a\vec{M}-b(\vec{M}\times\vec{N})$$
$$a(\vec{M}\times\vec{N})+b(\vec{M}\times\vec{N})\times\vec{N}=(1-a)\vec{M}-b(\vec{M}\times\vec{N})$$

و بردارهای $\vec{N}$ و $\vec{M}$ متعامد و یکه هستند پس $(\vec{M}\times\vec{N})\times\vec{N}=-\vec{M}$ بنابراین:

$$a(\vec{M}\times\vec{N})-b\vec{M}=(1-a)\vec{M}-b(\vec{M}\times\vec{N})$$

از این تساوی خواهیم داشت $a=-b$ و $-b=1-a$ پس $a=\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{1}{2}$.

۵۷۱ـ گزینه «۲» با توجه به ادبیاتی که در صورت سؤال به کار رفته است، S یک رویه‌ی بسته است که از سطح استوانه و در پوش‌های $x=2$ و $x=-1$ تشکیل می‌شود. پس از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\operatorname{div}\vec{F}=P_x+Q_y+R_z=3y^2+0+3z^2=3(y^2+z^2)$$

با توجه به معادله‌ی $y^2+z^2=1$ و معادلات $x=-1$ و $x=2$ می‌توانیم در صفحه‌ی yoz از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. به این ترتیب داریم:

$$y^2+z^2=r^2\ ,\ 0\le r\le 1\ ,\ 0\le\theta\le 2\pi\ ,\ -1\le x\le 2$$

$$I=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1}^2 3r^2 r\,dx\,dr\,d\theta=(\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^1 r^3dr)(\int_{-1}^2 3\,dx)=(2\pi)(\frac{1}{4})(9)=\frac{9\pi}{2}$$

۵۷۲ـ گزینه «۲» می‌دانیم که بردار نرمال صفحه مماس در هر نقطه از رویه، برابر با بردار گرادیان است. اگر می‌خواهیم صفحه مماس، صفحه‌ای افقی باشد، باید بردار نرمال آن به صورت $\vec{n}=(0,0,c)$ است که $c\neq 0$. به عبارتی باید داشته باشیم:

$$\vec{\nabla}f=(0,0,c)\Rightarrow f_x=0\ ,\ f_y=0\Rightarrow\begin{cases}2x-4y+12=0\\-4x-4y-12=0\end{cases}\Rightarrow 6x+24=0\Rightarrow x=-4\Rightarrow y=1$$

با جایگذاری این مقادیر در z داریم:

$$z=16+16-2-48-12-1=-31$$

یک صفحه‌ی مماس افقی به معادله‌ی $z=-31$ وجود دارد.

۵۷۳ـ گزینه «۲» یک سری تابعی داده شده است. با استفاده از آزمون ریشه برای سری‌ها داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left|\frac{x-1}{x}\right|^n}=\left|\frac{x-1}{x}\right|<1\xrightarrow{x\neq 0}|x-1|<|x|\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان ۲}}x^2-2x+1<x^2\Rightarrow 2x>1\Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

حالا کافیست که همگرایی سری داده شده در $x=\frac{1}{2}$ را بررسی کنیم:

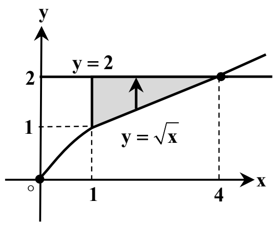
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

یک سری متناوب همگرا به دست آمد، پس $x=\frac{1}{2}$ متعلق به بازه‌ی همگرایی است. در نتیجه بازه‌ی همگرایی این سری $[\frac{1}{2},+\infty)$ است.

نکته: از آزمون نسبت هم می‌توان برای تعیین بازه‌ی همگرایی این سری تابعی استفاده نمود.

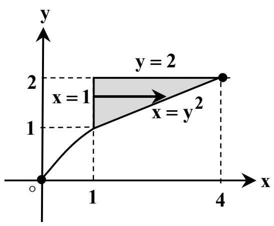
۵۷۴ـ گزینه «۴» به کمک تجزیه کسرها و با توجه به قاعده‌ی محاسبه‌ی سری‌های تلسکوپی داریم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{۳n(n-۱)}=\frac{۱}{۳}\sum_{n=۲}^{\infty}(\frac{۱}{n-۱}-\frac{۱}{n})=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲-۱}-\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n})=\frac{۱}{۳}(۱-۰)=\frac{۱}{۳}$$



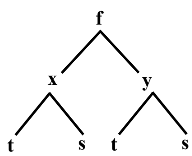
۵۷۵ـ گزینه «۴» ابتدا ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم. ناحیه‌ی مورد نظر بالاتر از منحنی $y=\sqrt{x}$ و زیرخط $y=۲$ قرار دارد و در این ناحیه $۱\le x\le ۴$ است.

$$\begin{cases}\sqrt{x}\le y\le ۲\\ ۱\le x\le ۴\end{cases}$$



طول و عرض نقاط گوشه‌ای را مشخص می‌کنیم. مثلاً $y=\sqrt{x}$ و $y=۲$ در $x=۴$ با هم برخورد می‌کنند. حالا با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\begin{cases}۱\le x\le y^{۲}\\ ۱\le y\le ۲\end{cases}\Rightarrow \int_{۱}^{۴}\int_{\sqrt{x}}^{۲}f(x,y)\,dy\,dx=\int_{۱}^{۲}\int_{۱}^{y^{۲}}f(x,y)\,dx\,dy$$



۵۷۶ـ گزینه «۱» ابتدا با استفاده از قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای $\frac{\partial f}{\partial s}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{۴y}{(y-۲x)^{۲}}(-۳)+\frac{-۴x}{(y-۲x)^{۲}}(۲)$$

با جایگذاری $x=۲t-۳s$ و $y=t+۲s$ در رابطه‌ی فوق داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{-۲۸t}{(۸s-۳t)^{۲}}$$

حالا با مشتق‌گیری دوباره نسبت به s خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^{۲}f}{\partial s^{۲}}=(\frac{-۲۸t}{(۸s-۳t)^{۲}})'=\frac{۰-۲(۸)(۸s-۳t)(-۲۸t)}{(۸s-۳t)^{۴}}=\frac{۲(۸)(۲۸t)}{(۸s-۳t)^{۳}}\bigg|_{t=۲\ ,\ s=۱}=۱۱۲$$

۵۷۷ـ گزینه «۴» همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-۱}{n})^{n}=e^{\lim_{n\to\infty}n(\frac{n-۱}{n}-۱)}=e^{\lim_{n\to\infty}n(\frac{-۱}{n})}=e^{-۱}\Rightarrow$ شرط لازم همگرایی را ندارد

گزینه (۲): $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+۱}{n})^{n}=e^{\lim_{n\to\infty}n(\frac{n+۱}{n}-۱)}=e^{\lim_{n\to\infty}n(\frac{۱}{n})}=e\Rightarrow$ شرط لازم همگرایی را ندارد

گزینه (۳): $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+۱}{n})^{n^{۲}}=e^{\lim_{n\to\infty}n^{۲}(\frac{n+۱}{n}-۱)}=e^{\lim_{n\to\infty}n^{۲}(\frac{۱}{n})}=e^{\infty}=\infty\Rightarrow$ شرط لازم همگرایی را ندارد

پس گزینه (۴) صحیح است. برای اثبات این موضوع از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n-۱}{n})^{n^{۲}-n}}=\lim_{n\to\infty}(۱-\frac{۱}{n})^{n-۱}=e^{\lim_{n\to\infty}(n-۱)(۱-\frac{۱}{n}-۱)}=e^{\lim_{n\to\infty}(n-۱)(-\frac{۱}{n})}=e^{-۱}<۱\Rightarrow$$ سری مورد نظر همگراست

۵۷۸ـ گزینه «۳» سعی می‌کنیم با استفاده از بسط مک‌لورن $\frac{۱}{۱-x}$ برای $|x|<۱$ به سری داده شده برسیم: (با توجه به این‌که $n(n-۱)$ در صورت داریم، پس بحث مشتق‌گیری مطرح است.)

$$\frac{۱}{۱-x}=\sum_{n=۰}^{\infty}x^{n}\xrightarrow{\frac{d}{dx}}\frac{۱}{(۱-x)^{۲}}=\sum_{n=۱}^{\infty}nx^{n-۱}\xrightarrow{\frac{d}{dx}}\frac{۲}{(۱-x)^{۳}}=\sum_{n=۲}^{\infty}n(n-۱)x^{n-۲}$$

توجه داشته باشید که به ازای $n=۱$ جمله اول سری به دست آمده برابر صفر است. در نتیجه:

$$\frac{۲}{(۱-x)^{۳}}=\sum_{n=۲}^{\infty}n(n-۱)x^{n-۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}n(n-۱)x^{n-۲}\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}}\frac{۲}{(۱-\frac{۱}{۴})^{۳}}=\sum_{n=۱}^{\infty}n(n-۱)(\frac{۱}{۴})^{n-۲}\Rightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n(n-۱)}{۴^{n-۲}}=\frac{۲}{\frac{۲۷}{۶۴}}=\frac{۱۲۸}{۲۷}$$

۵۷۹ـ گزینه «۲» با توجه به تعریف شیب خط قائم بر منحنی در هر نقطه داریم:

$$m' = -\frac{dx}{dy}$$

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{e^{-x}}{x-1} \Rightarrow dy = -(x-1)e^{x}dx \Rightarrow \int dy = \int -(x-1)e^{x}dx \Rightarrow y = -(x-1)e^{x} + e^{x} + c$$

$$y = (2-x)e^{x} + c \xrightarrow{(0,0)} 0 = (2-0)e^{0} + c \Rightarrow c = -2 \Rightarrow y = 2e^{x} - xe^{x} - 2$$

۵۸۰ـ گزینه «۴» ابتدا انتگرال داده شده را با تغییر متغیر $Lnx = t$ بازنویسی می‌کنیم:

$$Lnx = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \Rightarrow I = \int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^{m}}$$

این انتگرال فقط در بی‌نهایت ناسره است و شرط همگرایی آن $m > 1$ است.

۵۸۱ـ گزینه «۳» می‌دانیم حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ساخته می‌شود، برابر است با $\left|\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})\right|$. حالا فرض می‌کنیم یک مکعب در $\frac{1}{8}$ اول فضای سه‌بعدی داشته باشیم که یک رأس آن بر مبدأ مختصات و وجوه آن موازی صفحات مختصات است. در این صورت با توجه به اندازه ضلع مکعب، مختصات سه بردار قطر ذکر شده برابرند با:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A} = (0,a,a)\\ \vec{B} = (a,0,a)\\ \vec{C} = (a,a,0)\end{array}\right\} \Rightarrow V = \begin{vmatrix} 0 & a & a\\ a & 0 & a\\ a & a & 0\end{vmatrix} = -a(-a^{2}) + a(a^{2}) = 2a^{3}$$

۵۸۲ـ گزینه «۲» با فرض $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$، $\vec{B} = -2\vec{j}$ و $\vec{C} = -\vec{i} - 2\vec{j}$ داریم:

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} \quad , \quad \vec{v} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{(0,-2)}{2} = (0,-1) \quad , \quad \vec{w} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{(-1,-2)}{\sqrt{5}}$$

حال به محاسبه $\vec{\nabla}f(p_0)$ می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $\vec{\nabla}f(p_0) = (\alpha,\beta)$. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} D_{u}f(p_0) = \vec{\nabla}f(p_0).\vec{u} = \dfrac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\\ D_{v}f(p_0) = \vec{\nabla}f(p_0).\vec{v} = -\beta = -3\end{array}\right\} \Rightarrow \beta = 3 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \vec{\nabla}f(p_0) = (1,3)$$

$$\Rightarrow D_{w}f(p_0) = \vec{\nabla}f(p_0).\vec{w} = (1,3).\frac{(-1,-2)}{\sqrt{5}} = \frac{-7}{\sqrt{5}}$$

۵۸۳ـ گزینه «۴» با توجه به این که در تمام گزینه‌ها سه نقطه یکسان معرفی شده‌اند، احتیاجی به محاسبه نقاط بحرانی نیست. اما جهت اطمینان داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f_{x} = 4y - 4x^{3} = 0\\ f_{y} = 4x - 4y^{3} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow y = x^{3} = (y^{3})^{3} = y^{9} \Rightarrow y = 0,\pm 1 \ , \ x = 0,\pm 1$$

حالا برای مشخص کردن نوع هر یک از این نقاط بحرانی، از مبین $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^{2}$ کمک می‌گیریم:

$$f_{xx} = -12x^{2} \quad , \quad f_{yy} = -12y^{2} \quad , \quad f_{xy} = 4$$

$(0,0) \rightarrow \Delta = 0\times 0 - 16 = -16 < 0 \Rightarrow$ نقطه $(0,0)$ نقطه زینی است

$(1,1) \rightarrow \Delta = (-12)\times(-12) - 16 = 128 > 0 \xrightarrow{f_{xx}<0}$ نقطه $(1,1)$ ماکزیمم نسبی است

$(-1,-1) \rightarrow \Delta = (-12)\times(-12) - 16 = 128 > 0 \xrightarrow{f_{xx}<0}$ نقطه $(-1,-1)$ ماکزیمم نسبی است

۵۸۴ـ گزینه «۲» با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری، بهتر است از تغییر متغیرهای $u = x + y$ و $v = x - y$ کمک بگیریم. در این حالت داریم:

$$J_{xy} = \begin{vmatrix} u_{x} & u_{y}\\ v_{x} & v_{y}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -2 \Rightarrow J_{uv} = \frac{1}{|J_{xy}|} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = \iint_{|x|+|y|\le a} e^{x+y}dydx = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{u}\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}dv\int_{-a}^{a}e^{u}du = \frac{1}{2}(2a)(e^{a} - e^{-a}) = 2a\sinh a$$

۵۸۵ـ گزینه «۳» از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. تصویر ناحیه انتگرال‌گیری بر صفحه xoy، فضای بین دو دایره به مرکز مبدأ و شعاع‌های ۲ و ۴ است. زیرا:

$$x^۲+y^۲=۴ \to r=۲$$

$$x^۲+y^۲+z^۲=۱۶ \xrightarrow{z=0} r=۴$$

با توجه به اینکه محدودیتی برای θ تعیین نشده، $0 \le \theta \le ۲\pi$ خواهد بود. حدود z نیز از معادله کره معلوم می‌شود:

$$V=\iiint_D dv=\int_0^{۲\pi}\int_۲^۴\int_{-\sqrt{۱۶-r^۲}}^{\sqrt{۱۶-r^۲}} rdzdrd\theta=\int_0^{۲\pi}\int_۲^۴ ۲r\sqrt{۱۶-r^۲}\,drd\theta=۲\pi\times(-\frac{۲}{۳})(۱۶-r^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۲^۴=-\frac{۴\pi}{۳}(0-۱۲\sqrt{۱۲})=۳۲\sqrt{۳}\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۸۶ـ گزینه «۱» با توجه به تابع برداری $\vec{F}(x,y)=(e^y, xe^y)$ می‌بینیم که $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ و این یعنی میدان $\vec{F}$ پایستار است. لذا کافی است تابع پتانسیل را حساب کنیم. آنگاه:

$$f(x,y)=\int e^y dx+\int 0 dy=xe^y$$

$$\int \vec{F}.d\vec{r}=f(x_f,y_f)-f(x_s,y_s)=f(-۱,0)-f(۱,0)=(-۱)e^0-۱e^0=-۲$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۸۷- گزینه «۳» با توجه به این که مختصات نقطه $(۲,-۵)$ در معادله تابع $y=-x^۲-۲x+۳$ صدق می‌کند، پس ابتدا معادله‌ی خط مماس را که از نقطه $(۲,-۵)$ بر منحنی تابع رسم می‌شود به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از فرمول مساحت بین دو تابع، مساحت بین خط مماس و تابع داده شده و محور y ها را به دست می‌آوریم.

$$y'=-۲x-۲ \xrightarrow{x=۲} m=-۶$$

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-(-۵)=-۶(x-۲) \Rightarrow y=-۶x+۷$$

حل داریم:

$$S=\int_a^b(y_۱-y_۲)dx=\int_0^۲(-۶x+۷)-(-x^۲-۲x+۳))dx=\int_0^۲(x^۲-۴x+۴)dx=(\frac{x^۳}{۳}-۲x^۲+۴x)\Big|_0^۲=\frac{۸}{۳}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۸۸- گزینه «۴» به آسانی با استفاده از رابطه طول بردار تفاضل دو بردار خواهیم داشت:

$$|\vec{c}|=\sqrt{|\vec{b}\times\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲|\vec{b}\times\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

توجه داشته باشید که θ زاویه بین دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{a}$ است که با توجه به تعریف ضرب خارجی، برابر ۹۰ درجه است. پس:

$$|\vec{c}|=\sqrt{۲^۲+۱^۲-۲\times۲\times۱\times0}=\sqrt{۵}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۸۹- گزینه «۱» تنها نکته مهم این سوال تشخیص محدوده θ است. می‌دانیم نمودار پروانه $r^۲=۴\cos ۲\theta$ در واقع شامل دو بال در دو طرف محور yهاست که نسبت به این محور و همچنین محور قطبی متقارنند. پس کافیست فقط محدوده زاویه یکی از بال‌ها را به دست آورده، و با استفاده از رابطه مساحت یک منحنی قطبی، مساحت محصور در این بازه را محاسبه کنیم:

$$r^۲=۴\cos ۲\theta \ge 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{۲}\le ۲\theta \le \frac{\pi}{۲} \Rightarrow -\frac{\pi}{۴}\le\theta\le\frac{\pi}{۴}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\int_a^b r^۲ d\theta=\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}(۴\cos ۲\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{۴}}(۴\cos ۲\theta)d\theta=۲\sin ۲\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{۴}}=۲(۱-0)=۲$$

البته توجه داشته باشید که خواسته سؤال نصف این مساحت است. پس گزینه (۱) صحیح است.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۹۰ـ گزینه «۴»

$$I=\iiint_D e^{\sqrt{(x^۲+y^۲+z^۲)^۳}}dx\,dy\,dz \quad , \quad ۱\le x^۲+y^۲+z^۲\le ۴ \quad , \quad z>0$$

با توجه به کروی بودن ناحیه‌ی D از مختصات کروی استفاده می‌کنیم.

در دستگاه کروی همیشه $0\le\theta\le ۲\pi$ است مگر آن‌که محدودیت خاصی روی x و y داشته باشیم.

در نیم‌کره‌ی $z>0$ داریم $0\le\phi\le\frac{\pi}{۲}$ و حدود ρ هم شعاع کره‌ها هستند: $۱\le\rho\le\rho$.

$$I=\int_0^{۲\pi}\int_0^{\frac{\pi}{۲}}\int_۱^۲ e^{\rho^۳}\rho^۲\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=(\frac{۱}{۳}e^{\rho^۳}\Big]_۱^۲)(۱)(۲\pi)=\frac{۲\pi}{۳}(e^۸-e)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۹۱ـ گزینه «۴» سطح S بسته است. فرض می‌کنیم D ناحیه‌ی درون S باشد. از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌کنیم.

$$\text{شار} = \iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dv \quad , \quad \operatorname{div}\vec{F} = ۱+۱+۱ = ۳$$

$$\text{شار} = \iiint_D ۳dv = ۳(\text{حجم}\ D) \quad , \quad x^۲ + ۴y^۲ + ۴z^۲ = ۴ \to \frac{x^۲}{۴} + y^۲ + z^۲ = ۱$$

می‌دانیم که حجم بیضی گون با معادله‌ی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ از رابطه‌ی $v = \frac{۴}{۳}\pi abc$ محاسبه می‌گردد؛ پس خواهیم داشت:

$$(\text{حجم}\ D) = \frac{۴}{۳}\pi \times ۲ \times ۱ \times ۱ = \frac{۸}{۳}\pi \Rightarrow \text{شار} = ۳ \times \frac{۸}{۳}\pi = ۸\pi$$

۵۹۲ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه سطح S بسته است، از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}dv \qquad (*)$$

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^۳, y^۳, z^۳) \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial(x^۳)}{\partial x} + \frac{\partial(y^۳)}{\partial y} + \frac{\partial(z^۳)}{\partial z} = ۳(x^۲+y^۲+z^۲)$$

با جایگذاری عبارت فوق در رابطه (*) داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint_D ۳(x^۲+y^۲+z^۲)dv$$

ناحیه‌ی D درون کره‌ی واحد است، پس برای حل این انتگرال از دستگاه کروی استفاده می‌کنیم.

کران‌های انتگرال در مختصات کروی عبارتند از:

$$x^۲+y^۲+z^۲ = ۱ \ \text{درون کره‌ی} \Rightarrow \begin{cases} ۰ \le \rho \le ۱ \\ ۰ \le \theta \le ۲\pi \\ ۰ \le \phi \le \pi \end{cases}$$

با جایگذاری این کران‌ها در انتگرال داریم:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \int_۰^{\pi}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۳\rho^۲ \times \rho^۲ \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \left(\int_۰^{\pi}\sin\phi d\phi\right)\left(\int_۰^{۲\pi}d\theta\right)\left(\int_۰^۱ ۳\rho^۴ d\rho\right)$$

$$= (-\cos\phi)\Big|_۰^{\pi} \times ۲\pi \times \frac{۳\rho^۵}{۵}\Big|_۰^۱ = ۲ \times ۲\pi \times \frac{۳}{۵} = \frac{۱۲\pi}{۵}$$

۵۹۳ـ گزینه «۴»

روش اول: برای یافتن معادله خط مماس ابتدا باید ضریب زاویه خط مماس را بیابیم، لذا:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \quad , \quad \begin{cases} x = \cos^۲\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -۲\sin\theta\cos\theta \\ y = \sin^۲\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = ۲\sin\theta\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{۲\sin\theta\cos\theta}{-۲\sin\theta\cos\theta} = -۱$$

برای نقطه $\theta = \frac{\pi}{۴}$ داریم:

$$\begin{cases} x = \cos^۲\theta \xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{۴}} x = \cos^۲\frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{۲} \\ y = \sin^۲\theta \xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{۴}} y = \sin^۲\frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

بنابراین معادله خط مماس بر منحنی داده شده برابر است با:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - \frac{۱}{۲} = -۱(x - \frac{۱}{۲}) \Rightarrow y + x = ۱$$

روش دوم: با حذف θ معادله منحنی داده شده به‌صورت $x + y = ۱$ خواهد بود و لذا معادله‌ی خط مماس آن هم $x + y = ۱$ خواهد بود.

۵۹۴ـ گزینه «۴» در منحنی $y = \sqrt{x - x^۲} + \sin^{-۱}(\sqrt{x})$ باید داشته باشیم $-۱ \le \sqrt{x} \le ۱$ و $x \ge ۰$ و $x - x^۲ \ge ۰$. بنابراین $۰ \le x \le ۱$.

طول منحنی برابر است با $L = \int_۰^۱ \sqrt{۱+(y')^۲}dx$. با محاسبه مشتق داریم:

$$y' = \frac{۱-۲x}{۲\sqrt{x-x^۲}} + \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\sqrt{۱-x}} = \frac{۱-۲x}{۲\sqrt{x-x^۲}} + \frac{۱}{۲\sqrt{x-x^۲}} = \frac{۲-۲x}{۲\sqrt{x-x^۲}} = \frac{۲(۱-x)}{۲\sqrt{x(۱-x)}} = \sqrt{\frac{۱-x}{x}}$$

بنابراین:

$$L = \int_۰^۱ \sqrt{۱+(y')^۲}dx = \int_۰^۱ \sqrt{۱+\frac{۱-x}{x}}dx = \int_۰^۱ \sqrt{\frac{۱}{x}}dx = \int_۰^۱ x^{-\frac{۱}{۲}}dx = ۲x^{\frac{۱}{۲}}\Big|_۰^۱ = ۲$$

۵۹۵ـ گزینه «۲» وقتی $x \to ۰$ داریم $\frac{\sinh(ax)}{\sinh(\pi x)} \simeq \frac{ax}{\pi x} = \frac{a}{\pi}$ پس تابع زیر انتگرال در $x = ۰$ ناسره نیست. بنابراین کافیست شرط همگرایی را در کران بالایی (∞) انتگرال بررسی کنیم:

هرگاه $x \to \infty$ خواهیم داشت:

$$\frac{\sinh(ax)}{\sinh(\pi x)} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} \simeq \frac{\pm e^{|a|x}}{e^{\pi x}} = \pm(\frac{e^{|a|}}{e^{\pi}})^x$$

در واقع اگر $a > ۰$ باشد داریم $e^{ax} - e^{-ax} \simeq e^{ax}$ و اگر $a < ۰$ باشد $e^{ax} - e^{-ax} \simeq e^{-ax}$.

بنابراین شرط همگرایی انتگرال آن است که $|a| < \pi$ باشد. گزینه (۲) در این ناحیه قرار ندارد.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۹۶ـ گزینه «۲» در سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n (x - x_۰)^n$ شعاع همگرایی برابر است با:

$$R = \frac{۱}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

در این تمرین داریم $a_n = (\frac{n^۲ - ۲}{n^۲ - ۱})^{n^۳}$. بنابراین:

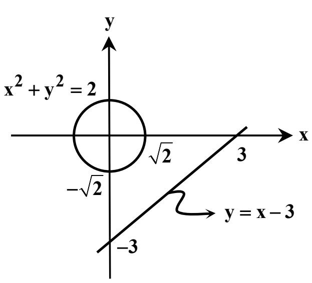
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n^۲ - ۲}{n^۲ - ۱})^{n^۲} = \lim_{n\to\infty} (\frac{(n^۲ - ۱) - ۱}{n^۲ - ۱})^{n^۲} = \lim_{n\to\infty} (۱ - \frac{۱}{n^۲ - ۱})^{n^۲} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-n^۲}{n^۲ - ۱}} = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$$

بنابراین شعاع همگرایی برابر است با $R = e$.

توجه: حد $\lim\limits_{n\to\infty} (۱ - \frac{۱}{n^۲ - ۱})^{n^۲}$ دارای فرم ۱^{∞} است. در چنین مواردی از قاعده $(۱ + u)^v \simeq e^{vu}$ کمک می‌گیریم تا حالت مبهم سریع‌تر رفع شده مقدار حد معلوم شود.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۹۷ـ گزینه «۴»



روش اول: تلاقی رویه‌ی $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۱$ با صفحه $z = ۱$ استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲$ است. اکنون برخورد صفحه‌ی $y = x - ۳$ با این استوانه را بررسی کنیم. از آن‌جا که مطابق شکل، خطِ $y = x - ۳$ با دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲$ هیچ نقطه برخوردی ندارد بنابراین صفحه‌ی $y = x - ۳$ و استوانه $x^۲ + y^۲ = ۲$ نیز برخوردی با هم ندارند.

روش دوم: به صورت جبری معادلات را برخورد دهیم:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۱ \\ z = ۱ \\ y = x - ۳ \end{cases} \Rightarrow x^۲ + (x - ۳)^۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow ۲x^۲ - ۶x + ۷ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۳۶ - ۵۶ < ۰ \Rightarrow \text{نقطه برخوردی وجود ندارد}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۹۸ـ گزینه «۳» معادله پارامتری پاره‌خطی که از $C(۰,۰,۰)$ به $B(۱,۱,۱)$ کشیده می‌شود چنین است: $\vec{R}(t) = C + t(B - C) = (t, t, t)$ که $۰ \le t \le ۱$.

بنابراین $x = y = z = t$ و $dx = dy = dz = dt$ پس با پارامتری‌کردن مسیر خواهیم داشت:

$$\int \vec{A}.dr = \int_C (۳x^۲ - ۶yz)dx + (۲y + ۳xz)dy + (۱ - ۴xyz^۲)dz = \int_۰^۱ (۳t^۲ - ۶t^۲) + (۲t + ۳t^۲) + (۱ - ۴t^۴)dt$$

$$= \int_۰ (۱ + ۲t - ۴t^۴)dt = (t + \frac{۲}{۲}t^۲ - \frac{۴}{۵}t^۵)\Big|_۰^۱ = \frac{۶}{۵}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۹۹ـ گزینه «۳» می‌دانیم که $-۱ < \operatorname{tgh} x < ۱$، بنابراین: $۰ \le \operatorname{tgh}^۴ x < ۱$ داریم و با جمع‌کردن یک واحد به طرفین داریم:

$$۱ \le ۱ + \operatorname{tgh}^۴ x < ۲ \xrightarrow{\text{وارون}} \frac{۱}{۲} < \frac{۱}{۱ + \operatorname{tgh}^۴ x} \le ۱$$

با ضرب طرفین در $x^۴$، $f(x)$ را به‌وجود می‌آوریم:

$$\frac{x^۴}{۲} < \frac{x^۴}{۱ + \operatorname{tgh}^۴ x} < x^۴ \Rightarrow \frac{x^۴}{۲} < f(x) < x^۴ \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int_۰^۱ \frac{x^۴}{۲}dx < \int_۰^۱ f(x)dx < \int_۰^۱ x^۴ dx \to \frac{x^۵}{۱۰}\Big|_۰^۱ < b < \frac{x^۵}{۵}\Big|_۰^۱ \Rightarrow \boxed{\frac{۱}{۱۰} < b < \frac{۱}{۵}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

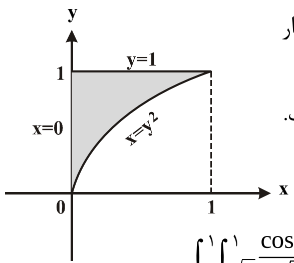
۶۰۰ـ گزینه «۱» با توجه به فرمول اویلر می‌دانیم که $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$، بنابراین: $ie^{i\theta}=i\cos\theta-\sin\theta \Rightarrow -ie^{i\theta}=\sin\theta-i\cos\theta$

به کمک تساوی اخیر داریم:

$$(\sin\theta_1-i\cos\theta_1)(\sin\theta_2-i\cos\theta_2)(\sin\theta_3-i\cos\theta_3)=(-ie^{i\theta_1})(-ie^{i\theta_2})(-ie^{i\theta_3})=-i^3e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=-i^2(i)e^{i\pi}=+i(\underbrace{\cos\pi}_{-1}+\underbrace{i\sin\pi}_{0})=-i$$

۶۰۱ـ گزینه «۱» انتگرال‌گیری با این ترتیب مشکل است، پس ناحیه‌ی انتگرال‌گیری را که بین $y=\sqrt{x}$ و $y=1$ قرار دارد و در آن $0\le x\le 1$ است، رسم می‌کنیم و سپس با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری، مسأله را حل می‌کنیم.

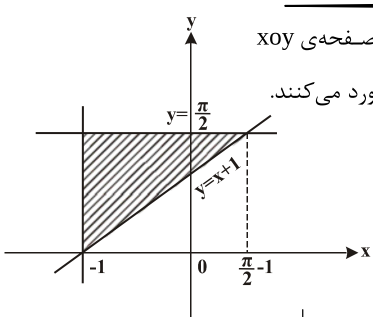
حدود y عبارتند از $0\le y\le 1$ و اگر در جهت محور xها حرکت کنیم، $x=0$ مرز ورودی و $x=y^2$ مرز خروجی است.



با این ترتیب، انتگرال به سادگی حل می‌شود:

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{\cos y^2}{\sqrt{x}}\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{y^2}\frac{\cos y^2}{\sqrt{x}}\,dx\,dy=\int_0^1(\cos y^2)2\sqrt{x}\Big|_0^{y^2}dy=\int_0^1 2y\cos y^2\,dy=\sin y^2\Big|_0^1=\sin 1-\sin 0=\sin 1$$

۶۰۲ـ گزینه «۱» کران‌های z واضح هستند. در این ناحیه داریم $0\le z\le y$. برای تعیین حدود x و y، در صفحه‌ی xoy خطوط $y-x=1$، $x=-1$ و $y=\frac{\pi}{2}$ را رسم می‌کنیم. خطوط $y=x+1$ و $y=\frac{\pi}{2}$ در $x=\frac{\pi}{2}-1$ با هم برخورد می‌کنند.



پس در این ناحیه داریم: $-1\le x\le\frac{\pi}{2}-1$ و $x+1\le y\le\frac{\pi}{2}$

$$I=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}\int_{x+1}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^y y\cos z\,dz\,dy\,dx=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}\int_{x+1}^{\frac{\pi}{2}}[y\sin z]_0^y\,dy\,dx=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}\int_{x+1}^{\frac{\pi}{2}}y\sin y\,dy\,dx$$

به کمک انتگرال‌گیری جزء به جز (روش جدول) داریم:

$$I=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}(\sin y-y\cos y)\Big|_{x+1}^{\frac{\pi}{2}}dx=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}(1-\sin(x+1)+(x+1)\cos(x+1))\,dx=x+2\cos(x+1)+(x+1)\sin(x+1)\Big|_{-1}^{\frac{\pi}{2}-1}=\pi-2$$

۶۰۳ـ گزینه «۲» با فرض $u=\sin^2 x$ داریم $du=2\sin x\cos x\,dx$. از اتحاد مثلثاتی $2\sin x\cos x=\sin 2x$ خواهیم داشت: $du=\sin 2x\,dx$

به ازای $x=0$ داریم $u=0$ و به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ داریم $u=1$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\sin 2x\,dx=\int_0^1 e^{\sqrt{u}}\,du$$

با استفاده از صورت سؤال حاصل این انتگرال برابر با A است: $I=A$

۶۰۴ـ گزینه «۳» انتگرال A در $x=5$ ناسرگی ندارد زیرا $x=5$ ریشه‌ی مخرج نیست. فقط آن را در $x\to\infty$ بررسی می‌کنیم. همگرایی A واضح است، زیرا مخرج کسر دارای رشد نمایی است. در واقع وقتی $x\to\infty$ طبق قاعده‌ی سرعت رشد داریم $e^{3x}-12e^{x}\simeq e^{3x}$ بنابراین:

$$A\simeq\int_5^\infty\frac{dx}{e^{3x}}=\int_5^\infty e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_5^\infty=0+\frac{e^{-15}}{3}$$

انتگرال B هم در $x=1$ ناسرگی ندارد. در $x\to\infty$ داریم $\frac{1}{xe^x}=\frac{e^{-x}}{x}$ و حالا که رشد مخرج کسر نمایی است، همگرا بودن B واضح است. برای توضیح کامل‌تر می‌توانیم از آزمون مقایسه استفاده کنیم:

$$B=\int_1^\infty\frac{e^{-x}}{x}dx\le\int_1^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_1^\infty=0+e^{-1}=\frac{1}{e}$$

۶۰۵ـ گزینه «۴» برای سری A از آزمون ریشه‌ی nام استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p}=1$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{Lnn}=1$ در نتیجه داریم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{3^n Lnn}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\frac{1}{2}}}{3^n Lnn}}=\frac{1}{3\times 1}\Rightarrow L<1\Rightarrow \text{سری } A \text{ همگراست}$$

برای بررسی سری B ابتدا توجه کنید که وقتی $n\to\infty$ داریم: $Ln(3n)=Ln3+Lnn\simeq Lnn$

اکنون یادآوری می‌کنیم که سری $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(Lnn)^q}$ به شرطی همگراست که $(p>1)$ یا $(p=1$ و $q>1)$ باشد. در سری B داریم $p=0$ و $q=1$ پس این سری واگراست.

۶۰۶ـ گزینه «۴» (البته ایراد تایپی دارد). معادله‌ی مرزهای ناحیه‌ی A را می‌توان به صورت $\frac{y}{x^{۲}}=۱$، $\frac{y}{x^{۲}}=۳$، $\frac{x}{y^{۲}}=۱$ و $\frac{x}{y^{۲}}=۲$ نوشت. با نام‌گذاری مرزها به صورت $u=\frac{y}{x^{۲}}$ و $v=\frac{x}{y^{۲}}$ داریم: $u=۱$، $u=۳$، $v=۱$ و $v=۲$. ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xy}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{۲y}{x^{۳}} & \frac{۱}{x^{۲}} \\ \frac{۱}{y^{۲}} & -\frac{۲x}{y^{۳}} \end{vmatrix}=\frac{۴}{x^{۲}y^{۲}}-\frac{۱}{x^{۲}y^{۲}} \Rightarrow J_{xy}=\frac{۳}{x^{۲}y^{۲}} \Rightarrow J_{uv}=\frac{۱}{J_{xy}}=\frac{x^{۲}y^{۲}}{۳}$$

با ضرب این عبارت در تابع زیر انتگرال داریم:

$$\frac{۱}{xy}\times\frac{x^{۲}y^{۲}}{۳}=\frac{۱}{۳}xy=\frac{۱}{۳uv}$$

حدود u و v نیز در دستگاه جدید واضح هستند:

$$I=\iint_D\frac{dydx}{xy}=\int_{۱}^{۳}\int_{۱}^{۲}\frac{۱}{۳uv}dvdu=\frac{۱}{۳}\left(\int_{۱}^{۲}\frac{۱}{u}du\right)\left(\int_{۱}^{۳}\frac{۱}{v}dv\right)=\frac{۱}{۳}\times[Lnu]_{۱}^{۲}\times[Lnv]_{۱}^{۳}=\frac{۱}{۳}Ln۳Ln۲$$

◆◆◆◆

۶۰۷ـ گزینه «۳» مرز C بسته است. فرض می‌کنیم $g=x+y+z=۱$ قطعه‌ای از صفحه باشد که C مرز آن است و از قضیه‌ی استوکس استفاده می‌کنیم:

$$I=\oint_C\vec{F}.d\vec{r}=\iint_S curl\vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

$$curl\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^x+y & -y^{۲}-z & ze^z+۲x \end{vmatrix}=\vec{i}-۲\vec{j}-\vec{k}$$

ناحیه‌ی A یعنی تصویر S بر صفحه‌ی xoy ناحیه درون دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۱$ است. در این صفحه داریم $\vec{p}=-\vec{k}$ در نتیجه داریم:

$$\vec{n}.d\sigma=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g.\vec{k}|}dA=\frac{(۱,۱,۱)dA}{|۱|}=(۱,۱,۱)dA$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

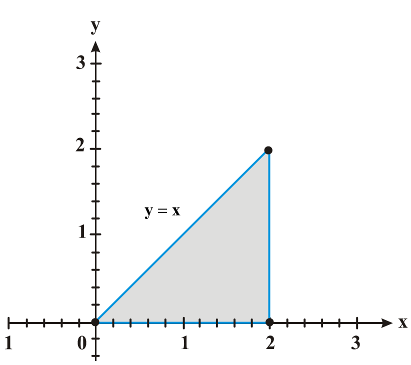
$$curl\vec{F}.\vec{n}d\sigma=(۱,-۲,-۱).(۱,۱,۱)dA=(۱-۲-۱)dA=-۲dA$$

بنابراین داریم:

$$I=\iint_A -۲dA=-۲\times(\text{مساحت } A)=-۲\pi$$

◆◆◆◆

۶۰۸- گزینه «۲» با توجه به نتیجه قضیه استوکس، به جای حل انتگرال خواسته شده روی سطح S، انتگرال را روی سطح $z=۰$ محاسبه می‌کنیم. در این حالت توجه داشته باشید که بردار عمود، در راستای بردار عمود بر سطح S و رو به خارج آن است که در این مورد، برابر $\vec{k}$ است. از همین بردار نتیجه می‌شود که در محاسبه کرل تابع برداری F، لازم نیست مؤلفه‌های اول و دوم را محاسبه کنیم، زیرا هرچه باشند در مؤلفه اول و دوم بردار $\vec{k}$ ضرب داخلی می‌شوند که حاصل آن صفر است. پس داریم:



$$\iint_S curl\vec{F}.\vec{ds}=\iint_{S'} curl\vec{F}.\vec{ds}=\iint_{S'} curl\vec{F}.\vec{n}d\sigma$$

$$curl\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & \sin(x^{۷}y^{۸}z^{۹}) \end{vmatrix}=(\text{هرچه باشد})\vec{i}+(\text{هرچه باشد})\vec{j}+(۱+۱)\vec{k}$$

$$C: z=۹-x^{۲}-y^{۲}\ ,\ z=۰ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۹ \Rightarrow S':\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}\le ۹ \\ z=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_{S'} curl\vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iint_{S'}(\dots,\dots,۲).(۰,۰,۱)d\sigma=\iint_{S'}۲d\sigma=۲\iint_{S'}d\sigma$$

انتگرال اخیر در واقع مساحت سطح S' است که یک دایره به شعاع ۳ است. در نتیجه حاصل انتگرال اولیه، $۲\times۹\pi=۱۸\pi$ است.

◆◆◆◆

۶۰۹ـ گزینه «۴» یادآوری می‌کنیم که ضابطه‌ی معکوس تابع $y=\sinh(x)$ به این صورت است: $\sinh^{-۱}(x)=Ln(x+\sqrt{x^{۲}+۱})$

طبق فرض $\sinh c=\frac{۳}{۴}$ پس $\sinh^{-۱}(\frac{۳}{۴})=c$ یعنی $Ln(\frac{۳}{۴}+\sqrt{(\frac{۳}{۴})^{۲}+۱})=c$. حالا معادله‌ی خواسته شده را حل می‌کنیم:

$$Ln(e^x+\sqrt{e^{۲x}+۱})=c=Ln(\frac{۳}{۴}+\sqrt{(\frac{۳}{۴})^{۲}+۱}) \Rightarrow e^x+\sqrt{e^{۲x}+۱}=\frac{۳}{۴}+\sqrt{(\frac{۳}{۴})^{۲}+۱} \Rightarrow e^x=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین با Ln گرفتن از طرفین داریم:

$$Lne^x=Ln\frac{۳}{۴} \Rightarrow x=Ln۳-Ln۴ \Rightarrow x=Ln۳-۲Ln۲$$

◆◆◆◆

۶۱۰ـ گزینه «۳» اگر فرض کنیم $f(x) = xe^x - 2e^x + 1$؛ آنگاه خواهیم داشت:

$$f'(x) = e^x + xe^x - 2e^x = (x-1)e^x$$

با توجه به ضابطه‌ی $f'(x) = (x-1)e^x$ متوجه می‌شویم که $f'(x)$ در بازه‌ی $(-\infty, 1)$ منفی است و در بازه‌ی $(1, \infty)$ مثبت است. پس $f(x)$ در بازه‌ی $(-\infty, 1)$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $[1, \infty)$ اکیداً صعودی است. پس $f(x)$ در هر کدام از این دو بازه حداکثر یک ریشه خواهد داشت. برای اطمینان از وجود ریشه، به علامت $f(x)$ در دو سرِ بازه دقت می‌کنیم.

در بازه‌ی $[1, +\infty)$داریم:

$$f(+\infty) = +\infty > 0 \ , \ f(1) = 1 - e < 0$$

بنابراین f بر $[1, +\infty)$ دقیقاً یک ریشه دارد و در بازه‌ی $(-\infty, 1]$ داریم:

$$f(-\infty) = 1 > 0 \ , \ f(1) = 1 - e < 0$$

پس f بر $(-\infty, 1]$ دقیقاً یک ریشه دارد، بنابراین f در مجموع دقیقاً دو ریشه دارد.

تذکر: استفاده از قضیه‌ی مقدار میانی برای $+\infty$ یا $-\infty$ ایرادی ندارد. اگر $f(a) < 0$ و $f(\infty) > 0$ باشد، معلوم است $f(x)$ در بازه‌ی $[a, \infty)$ حداقل یک ریشه دارد.

۶۱۱ـ گزینه «۲»

روش اول: برای عدد ۱− داریم $\theta = \pi$ و $r = 1$ در نتیجه:

$$z^{2n} + 1 = 0 \Rightarrow z^{2n} = -1 \ \Rightarrow \ z^{2n} = e^{i\pi}$$

$$z = e^{\frac{i(\pi + 2k\pi)}{2n}} \ , \ k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$$

باید توجه داشت که z^{2n} دارای $2n$ جواب می‌باشد به همین دلیل مقدار k از صفر تا $2n-1$ می‌باشد.

روش دوم: کافیست به ازای $n = 1$ جواب‌های معادله را در گزینه‌های داده شده چک کنیم:

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i$$

با قرار دادن $n = 1$ در گزینه‌ها داریم:

گزینه (۱) $\Rightarrow k = 0 \Rightarrow z = i$

گزینه (۲) $\Rightarrow k = 0, 1 \Rightarrow z = i, -i$

گزینه (۳) $\Rightarrow k = 0 \Rightarrow z = 0$

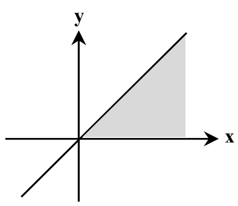
تنها گزینه (۲) است که به ازای $n = 1$ جواب‌های $z = \pm i$ را به دست می‌دهد.

۶۱۲ـ گزینه «۳» برای حل انتگرال دوگانه داده شده از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم، لذا:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \ , \ dxdy = rdrd\theta$$

ناحیه انتگرال‌گیری در مختصات قطبی چنین است با:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x \\ 0 \le x \le \infty \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{matrix} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \end{matrix}$$

بنابراین انتگرال داده شده برابر است با:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} (1 + r^2)^{-2} r \, dr \, d\theta$$

از تغییرمتغیر استفاده می‌کنیم لذا:

$$1 + r^2 = u \ \Rightarrow rdr = du \ , \begin{cases} r = 0 \Rightarrow u = 1 \\ r = \infty \Rightarrow u = \infty \end{cases}$$

با جایگذاری تغییرمتغیر و کران‌های فوق در انتگرال داریم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^{\infty} u^{-2} du \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{u}\Big|_1^{\infty} d\theta = (0 + 1) \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

۶۱۳ـ گزینه «۲» تنها نقطه بحرانی درون این ناحیه، $(0, 0)$ است زیرا در این نقطه داریم $f_x = 0$ و $f_y = 0$. با محاسبه‌ی f در این نقطه به مقدار $f(0, 0) = 0$ می‌رسیم. حالا کافیست نقاط اکسترمم تابع بر روی مرز ناحیه داده شده یعنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را بیابیم:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{b^2 - y^2}{b^2} \Rightarrow x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

با جایگذاری این عبارت در رابطه $f(x, y) = xy$ داریم:

$$f(y) = \pm \frac{a}{b} y \sqrt{b^2 - y^2}$$

نقاط اکسترمم تابع تک‌متغیره فوق را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(y) = 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{b^2 - y^2}} = 0 \Rightarrow b^2 - y^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{\sqrt{2}}$$

با جایگذاری این نقاط در $f(y)$ داریم:

$$f(\pm \frac{b}{\sqrt{2}}) = \pm \frac{a}{b} \times \frac{b}{\sqrt{2}} \times \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{2}} = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \times b \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm \frac{ab}{2}$$

بنابراین ماکزیمم و مینیمم تابع در ناحیه داده شده برابرند با:

$$M = \frac{ab}{2} \ , \ m = -\frac{ab}{2}$$

۶۱۴ـ گزینه «۲» با فرض $x^2+y^2=t$، ضابطهٔ f به صورت $f(t)=te^{-t}$ در می‌آید. البته $t\ge 0$ است، پس رفتار f را در $0\le t<\infty$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(t)=e^{-t}-te^{-t}=(1-t)e^{-t}\xrightarrow{f'(t)=0} t=1 \text{ :نقطه‌ی بحرانی}$$

با توجه به جدول تغییرات f داریم:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0
	min مطلق		max مطلق		

در نتیجه $f(x\,,\,y)$ در نقاطی که $t=1$ باشد یعنی نقاطی که روی دایره‌ی به معادلهٔ $x^2+y^2=1$ واقعند، دارای ماکزیمم مطلق است. پس گزینه‌های (۱) و (۳) صحیح هستند. اما گزینه‌ی (۲) نادرست است چراکه $(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ روی دایره‌ی مذکور قرار دارد، پس تابع f در این نقطه دارای ماکزیمم مطلق است و نه نقطه‌ی زینی.

همچنین تابع f در $t=0$ دارای می‌نیمم است یعنی در نقطه‌ای که $x^2+y^2=0$ باشد (یعنی $(0,0)$)، در این نقطه داریم $f(0)=0$ که کمترین مقدار f است.

◆ ◆ ◆ ◆

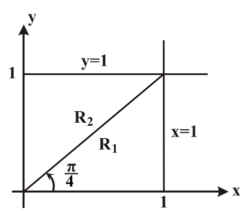
۶۱۵ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه در مختصات قطبی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$، هر کدام از نواحی انتگرال‌گیری را جداگانه رسم می‌کنیم. در اولین انتگرال داریم $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ و $0\le r\le\sec\theta$. این ناحیه را با R_1 نشان می‌دهیم:

$$R_1:\begin{cases} r=\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}\Rightarrow r\cos\theta=1\Rightarrow x=1\quad,\quad r=0\Rightarrow (0,0)\ \text{نقطه‌ی مبدأ} \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

پس ناحیه‌ی R_1 در بازه‌ی $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ قرار دارد و حالا ناحیه‌ی R_2 را بررسی می‌کنیم:

$$R_2:\begin{cases} r=\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}\Rightarrow r\sin\theta=1\Rightarrow y=1\quad,\quad r=0\Rightarrow (0,0)\ \text{نقطه‌ی مبدأ} \\ \dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

با رسم R_1 و R_2 در صفحهٔ xoy می‌بینیم که $R_1\cup R_2$ یک مربع در ناحیه‌ی $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ است.



بنابراین مجموع انتگرال‌های داده شده برابر است با: $\int_0^1\int_0^1 f(x\,,\,y)\,dx\,dy$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۱۶ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست می‌توان دو مثال زیر را در نظر گرفت که در یکی از آن‌ها $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ همگراست ولی برای دیگری سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ واگراست.

$$\text{برای } a_n=\frac{1}{n^4}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Rightarrow \text{همگراست}$$

$$\text{برای } a_n=\frac{1}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Rightarrow \text{واگراست}$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) و (۳) غلط می‌باشند و گزینه‌ی (۴) صحیح است.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۱۷ـ گزینه «۴» با استفاده از تغییر متغیر $u=\sin^2 x$ داریم:

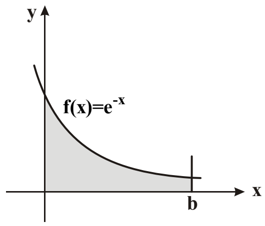
$$\sin^2 x=u\Rightarrow 2\sin x\cos x\,dx=du\Rightarrow \sin 2x\,dx=du\ ,\ \begin{cases} x=0\Rightarrow u=0\\ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow u=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

با جایگذاری این روابط در انتگرال داده شده داریم:

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{du}{1+u^2}=\operatorname{tg}^{-1}u\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۱۸ـ گزینه «۲» حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محصور به نمودار $y=f(x)$ و خط $y=۰$ در بازه‌ی $۰\le x\le b$ با استفاده از روش واشر و با فرمول $v=\pi\int_{۰}^{b}f^{۲}(x)\,dx$ قابل محاسبه است:



$$V=\pi\int_{۰}^{b}(e^{-x})^{۲}\,dx=\pi\int_{۰}^{b}e^{-۲x}\,dx=-\frac{\pi}{۲}[e^{-۲x}]_{۰}^{b}=-\frac{\pi}{۲}(e^{-۲b}-۱)$$

هرگاه b به سمت بی‌نهایت میل کند، خواهیم داشت:

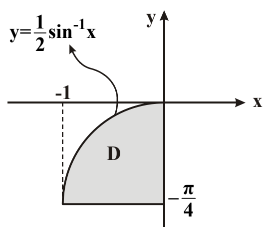
$$\lim_{b\to\infty}e^{-۲b}=e^{-\infty}=۰$$

درنتیجه داریم:

$$\lim_{b\to\infty}V=-\frac{\pi}{۲}(۰-۱)=\frac{\pi}{۲}$$

۶۱۹ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. [گزینه (۲) می‌توانست جواب باشد، اما علامت آن اشتباه است.]

تابع زیر انتگرال یک متغیره و به‌صورت $f(y)=e^{\cos ۲y}$ است، به همین دلیل با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری و نوشتن فرم $I=\iint_{D}e^{\cos ۲y}\,dx\,dy$ محاسبه انتگرال ساده‌تر می‌شود. [در واقع ترتیب داده‌شده در صورت سؤال، برحسب توابع مقدماتی قابل حل نیست.]



برای تعیین حدود انتگرال با ترتیب جدید، ابتدا ناحیه‌ی D را رسم می‌کنیم. طبق حدود داده‌شده در صورت سؤال می‌دانیم که این ناحیه بین نمودار $y=\frac{۱}{۲}\sin^{-۱}x$ و خط $y=-\frac{\pi}{۴}$ قرار دارد و در آن $-۱\le x\le ۰$ است.

با رسم این ناحیه می‌بینیم که در آن $-\frac{\pi}{۴}\le y\le ۰$ است و اگر در جهت محور xها از ناحیه‌ی D عبور کنیم، مرز ورودی همان $x=\sin ۲y$ است و مرز خروجی $x=۰$ است.

بنابراین انتگرال در ترتیب جدید به این صورت نوشته می‌شود:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{۰}\int_{\sin ۲y}^{۰}e^{\cos ۲y}\,dx\,dy=\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{۰}e^{\cos ۲y}[x]_{\sin ۲y}^{۰}\,dy=\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{۰}-\sin ۲y\,e^{\cos ۲y}\,dy$$

$$=[\frac{۱}{۲}e^{\cos ۲y}]_{-\frac{\pi}{۴}}^{۰}=\frac{۱}{۲}[e^{\cos(۰)}-e^{\cos(\frac{-\pi}{۲})}]\Rightarrow I=\frac{۱}{۲}(e^{۱}-e^{۰})=\frac{۱}{۲}(e-۱)$$

۶۲۰ـ گزینه «۱» مساحت شکل حاصل از دوران منحنی $y=f(x)$ حول محور xها از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$\boxed{S=۲\pi\int_{a}^{b}y\sqrt{۱+y'^{۲}}\,dx}$$

در این سؤال $y=\frac{۱}{۳}x^{۳}$ و در نتیجه $y'=x^{۲}$ و $۰\le x\le ۱$، بنابراین داریم:

$$S=۲\pi\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۳}x^{۳}\sqrt{۱+(x^{۲})^{۲}}=\frac{۲\pi}{۳}\int_{۰}^{۱}x^{۳}\sqrt{۱+x^{۴}}\,dx$$

با فرض $۱+x^{۴}=u$، آن‌گاه $۴x^{۳}dx=du$ و به عبارت دیگر $x^{۳}dx=\frac{du}{۴}$ و لذا داریم:

$$\text{حاصل انتگرال}=\frac{۲\pi}{۳}\int u^{\frac{۱}{۲}}(\frac{du}{۴})=\frac{\pi}{۶}\int u^{\frac{۱}{۲}}du=\frac{\pi}{۶}[\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}]\Rightarrow S=\frac{\pi}{۶}[\frac{۲}{۳}(۱+x)^{\frac{۳}{۲}}]_{۰}^{۱}=\frac{\pi}{۶}(\frac{۲}{۳}(۱+۱)^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۲}{۳})$$

$$=\frac{\pi}{۶}(\frac{۲\times ۲\sqrt{۲}}{۳}-\frac{۲}{۳})=\frac{۲\pi}{۱۸}(۲\sqrt{۲}-۱)=\frac{\pi}{۹}(۲\sqrt{۲}-۱)$$

۶۲۱ـ گزینه «۱» یادآوری می‌کنیم که در تابع $f(x,y)$ منظور از $f_{۱}$ همان f_{x} است و منظور از $f_{۲}$ همان f_{y} است.

$$f_{x}(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(h,۰)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۳h^{۴}}{h^{۳}}-۰}{h}=۳\quad;\quad f_{y}(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰,h)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{-۵h^{۴}}{h^{۳}}}{h}=-۵$$

۶۲۲ـ گزینه «۴» از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. منحنی C مرز قسمتی از صفحه‌ی $S: x+2y+z=7$ است.

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -2y+e^{x^2} & 3x+\cos y^2 & e^{z^2}\end{vmatrix}=5\vec{k}$$

صفحه تصویر را همان‌طور که در صورت سؤال گفته صفحه xoy در نظر می‌گیریم؛پس بردار قائم بر آن $\vec{n}=\vec{k}$ است. تصویر S بر صفحه xoy درون دایره $x^2+y^2=1$ است، این ناحیه را R می‌نامیم. بنابراین داریم:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}.\vec{n}dS=\iint_R 5\vec{k}.\vec{k}dxdy=\iint_R 5dxdy=5\times(\text{مساحت دایره به شعاع یک})=5\pi$$

۶۲۳ـ گزینه «۴» می‌دانیم که اگر تابع f در بازه $[0,1]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$.

با ضرب صورت و مخرج کسر داده شده در $\frac{1}{n}$ داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{Ln}(\frac{i}{n})}=\frac{\int_0^1 e^x dx}{\int_0^1 \operatorname{Ln}x dx}=\frac{e^x\Big|_0^1}{(x\operatorname{Ln}x-x)\Big|_0^1}=\frac{e-1}{-1-0}=1-e$$

توجه کنید که $\lim\limits_{x\to 0^+} x\operatorname{Ln}x=0$.

۶۲۴ـ گزینه «۱» انحنای منحنی پارامتری با فرمول $\kappa=\frac{|x'y''-y'x''|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$ به دست می‌آید. با توجه به ضابطه داده شده داریم:

$$C:\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=-3a\sin t\cos^2 t\ ,\ x''(t)=-3a\cos^3 t+6a\sin^2 t\cos t\\ y'(t)=3a\cos t\sin^2 t\ ,\ y''(t)=-3a\sin^3 t+6a\sin t\cos^2 t\end{cases}$$

با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه انحنا داریم:

$$\kappa=\frac{|(-3a\sin t\cos^2 t)(-3a\sin^3 t+6a\sin t\cos^2 t)-(3a\cos t\sin^2 t)-(-3a\cos^3 t+6a\sin^2 t\cos t)|}{((-3a\sin\cos^2 t)^2+(3a\cos t\sin^2 t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{|9a^2\sin^4 t\cos^2 t-18a^2\sin^2 t\cos^4 t+9a^2\cos^4 t\sin^2 t-18a^2\sin^4 t\cos^2 t|}{(9a^2\sin^2 t\cos^4 t+9a^2\cos^2 t\sin^4 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|-9a^2\sin^4 t\cos^2 t-9a^2\sin^2 t\cos^4 t|}{(9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t))^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{|-9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)|}{((3a\sin t\cos t)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}{|(3a\sin t\cos t)^3|}=\frac{1}{|3a\sin t\cos t|}=\frac{1}{|\frac{3}{2}a\sin 2t|}=\frac{2}{|3a\sin 2t|}$$

۶۲۵ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

روش اول: با حذف z از دو محدودیت داده شده، داریم:

$$\begin{cases}x+y+z=1\\ y^2+z^2=1\end{cases}\Rightarrow y^2+(1-x-y)^2=1\Rightarrow 2y^2+x^2-2x-2y+2xy=0$$

این محدودیت جدید را با $h(x,y)=0$ نشان می‌دهیم. اکنون اکسترموم‌های مطلق w را با قید $h(x,y)=0$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{w_x}{h_x}=\frac{w_y}{h_y}\Rightarrow\frac{1}{2x+2y-2}=\frac{2}{4y+2x-2}\Rightarrow 4y+2x-2=4x+4y-4\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$$

با جایگذاری $x=1$ در معادله‌ی h داریم:

$$2y^2-1=0\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

پس نقاط $A(1,\frac{1}{\sqrt{2}})$ و $B(1,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ نقاط بحرانی w هستند.

در نقطه‌ی A داریم $w=1+\frac{2}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$ و در نقطه‌ی B داریم $w=1-\sqrt{2}$ بیشترین و کمترین مقدار w عبارتند از $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$.

روش دوم: با فرض $g(x,y,z)=y^2+z^2-1$ و $h(x,y,z)=x+y+z-1$، تابع لاگرانژ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$F(x,y,z,\lambda,\gamma)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\gamma h(x,y,z)=x+2y+\lambda(y^2+z^2-1)+\gamma(x+y+z-1)$$

معادلات زیر باید همزمان برقرار باشد، یعنی:

$$\begin{cases} F_x=0 \Rightarrow 1+\gamma=0 \Rightarrow \boxed{\gamma=-1} \\ F_y=0 \Rightarrow 2+2y\lambda+\gamma=0 \xrightarrow{\gamma=-1} 2y\lambda+1=0 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{2\lambda}} \\ F_z=0 \Rightarrow 2\lambda z+\gamma=0 \xrightarrow{\gamma=-1} 2\lambda z-1=0 \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2\lambda}} \\ F_\lambda=0 \Rightarrow y^2+z^2-1=0 \xrightarrow[z=\frac{1}{2\lambda}]{y=\frac{-1}{2\lambda}} (\frac{-1}{2\lambda})^2+(\frac{1}{2\lambda})^2-1=0 \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}-1=0 \Rightarrow \frac{2}{4\lambda^2}=1 \Rightarrow \lambda^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ F_\gamma=0 \Rightarrow x+y+z-1=0 \end{cases}$$

در نتیجه اگر $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}$، آنگاه $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x=1$ است، که در این صورت مقدار تابع w در این نقطه برابر است با $w=x+2y=1+2(-\frac{\sqrt{2}}{2})=1-\sqrt{2}$. و اگر $\lambda=\frac{-1}{\sqrt{2}}$، آنگاه $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x=1$ است، که در این صورت مقدار تابع w در این نقطه برابر است با:

$$w=x+2y=1+2(\frac{\sqrt{2}}{2})=1+\sqrt{2}$$

۶۲۶ـ گزینه «۲» با جایگذاری $h=0$ فرم مبهم 1^∞ ایجاد می‌شود. از قاعده‌ی $u^v\simeq e^{v(u-1)}$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{جواب حد} = \lim_{h\to 0^+} e^{\frac{1}{h}(\frac{\cosh(1394+h)}{\cosh(1394)}-1)}$$

محاسبه‌ی حدِ توان e را ادامه می‌دهیم:

$$\text{حدِ توان e} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\frac{\cosh(1394+h)-\cosh(1394)}{\cosh(1394)}$$

حالا توجه کنید که طبق تعریف مشتق یا با استفاده از هوپیتال داریم:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\cosh(1394+h)-\cosh(1394)}{h}=\sinh(1394)$$

بنابراین حد توان e برابر است با $\frac{\sinh(1394)}{\cosh(1394)}$ یعنی $tgh(1394)$ و در نهایت جواب حد برابر است با:

$$\text{جواب حد} = e^{tgh(1394)}$$

۶۲۷ـ گزینه «۳» از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$u=Ln(1+x^2) \Rightarrow du=\frac{2x}{1+x^2}$$
$$dv=dx \Rightarrow v=x$$

$$\int Ln(1+x^2)dx=xLn(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx=xLn(1+x^2)-2\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=xLn(1+x^2)-2\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$
$$=xLn(1+x^2)-2(x-tg^{-1}x)+c$$

با جایگذاری حدود انتگرال معین داریم:

$$I=[xLn(1+x^2)-2(x-tg^{-1}x)]_0^1=Ln(2)-2(1-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}-2+Ln2$$

۶۲۸ـ گزینه «۴» به ازای $t=1$ داریم $\begin{cases}x=e\\ y=1-Ln1=1\end{cases}$، شیب خط مماس بر منحنی برابر با $m=\frac{dy}{dx}$ است:

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1-\frac{2}{t}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}}=\frac{1-2}{\frac{1}{2}e}=-\frac{2}{e}$$

پس معادله‌ی خط مماس به این صورت است:

$$y-1=-\frac{2}{e}(x-e) \Rightarrow y=-\frac{2}{e}x+2+1$$

در محل برخورد با محور xها $y=0$ است، در نتیجه داریم:

$$0=-\frac{2}{e}x+3 \Rightarrow x=\frac{3}{\frac{2}{e}}=\frac{3}{2}e$$

۶۲۹ـ گزینه «۱» با استفاده از تغییر متغیر $u = 3x - 2y + z$ ، $v = 3x + 2y$ و $w = z$ معادله‌ی این رویه را به صورت $u^2 + v^2 + w^2 = 9$ می‌نویسیم که کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۳ است. ژاکوبین دستگاه جدید را حساب می‌کنیم:

$$J_{xyz} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12 \Rightarrow J_{uvw} = \frac{1}{12}$$

اگر D ناحیه‌ی درون کره‌ی $u^2 + v^2 + w^2 = 9$ باشد داریم:

$$I = \iiint_W dxdydz = \iiint_D \frac{1}{12} dwdudv = \frac{1}{12} \times (\text{حجم } D) = \frac{1}{12} \times \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 3\pi$$

۶۳۰ـ گزینه «۲» در سری A از کران‌دار بودن $\sin(n)$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

در سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ داریم $p = 2$ پس این سری همگراست در نتیجه سری A همگرای مطلق است پس همگرا هم هست.

در مورد سری B می‌دانیم که این سری متناوب است و دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{n + \sqrt{n}}$ نزولی به سمت صفر میل می‌کند پس سری B هم همگراست.

۶۳۱ـ گزینه «۲» بردارهای $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{c}$ باهم موازی‌اند، بنابراین ضرب خارجی آنها برابر با صفر می‌شود.

$$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} = 0$$

ضرب خارجی بردار $\vec{a}$ در خودش برابر با صفر است، زیرا $\vec{a}$ با خودش موازی است. پس داریم:

$$0 - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} = 0$$

طبق ویژگی ضرب خارجی داریم: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ در نتیجه:

$$-\vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} = (0, -1, 3) - (-2, 0, 1) = (2, -1, 2)$$

۶۳۲ـ گزینه «۲»

$$L = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (\cos n!\pi x)^m$$

می‌دانیم $-1 \le \cos u \le 1$، از طرفی با توجه به اینکه n عددی اصم (گنگ) است حاصلضرب $(n!x)$ نمی‌تواند عدد صحیح باشد بنابراین داریم:

$$\cos(n!x\pi) \ne \pm 1 \Rightarrow |\cos(n!x\pi)| < 1 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} (\cos(n!x\pi))^m = 0$$

جواب اولین حد، صفر می‌شود پس در ادامه داریم:

$$\Rightarrow L = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (\cos(n!x\pi))^m = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

۶۳۳ـ گزینه «۴» با توجه به داده‌های صورت سؤال داریم:

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x) \Rightarrow f'(x) = g(x) \qquad (1)$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = f(x^2) \Rightarrow g'(x) = f(x^2) \qquad (2)$$

حالا به محاسبه‌ی مشتقِ دوم $f(x^3)$ می‌پردازیم.

با استفاده از قاعده‌ی مشتق ترکیب، می‌دانیم که مشتقِ $f(u)$ برابر است با $u'f'(u)$ پس:

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x^3) = 3x^2 f'(x^3) \overset{(1)}{=} 3x^2 g(x^3)$$

حالا مشتق دوم را حساب می‌کنیم. از قاعده‌ی مشتق حاصل‌ضرب استفاده می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x^3)\right) = \frac{d}{dx}(3x^2 g(x^3)) = 6xg(x^3) + 3x^2(3x^2 g'(x^3)) \overset{(2)}{=} 6xg(x^3) + 3x^2(3x^2 f(x^6)) = 6xg(x^3) + 9x^4 f(x^6)$$

۶۳۴ـ گزینه «۴» با توجه به وجود اعداد فرد در مخرج کسرها، می‌توان حدس زد که از بسط مک‌لورن arctgx استفاده شده است.

طبق فرمول داریم:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

حالا با جایگذاری $x = 1$ خواهیم داشت:

$$x = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

بنابراین مقدار سری برابر $\frac{\pi}{4}$ است.

۶۳۵ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. تابع زیر انتگرال به صورت $f(x)$ است پس ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم. $I=\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3 \frac{e^{(x^2-x)}}{x+1}dxdy$

با توجه به شکل می‌توان ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کرد:

$$I=\int_1^3\int_1^{x^2}\frac{e^{(x^2-x)}}{x+1}dydx=\int_1^3\frac{e^{(x^2-x)}}{x+1}y]_1^{x^2}dx=\int_1^3\frac{e^{x^2-x}}{x+1}(x^2-1)dx \Rightarrow I=\int_1^3 e^{x^2-x}(x-1)dx$$

که این انتگرال قابل حل نیست.

توضیح: در صورت سؤال اشتباه تایپی رخ داده است. $\frac{e^{x^2-2x}}{x+1}$ مورد نظر بوده است و جواب آن $I=\int_1^3 e^{x^2-2x}(x-1)dx=\frac{1}{2}e^{x^2-2x}\Big|_1^3=\frac{1}{2}(e^3-e^{-1})$ می‌باشد.

۶۳۶ـ گزینه «۳» با توجه به نکات گفته شده داریم:

$$\int_c F.dR=\int(F.T)ds=\oint(\text{curl}F.n)ds=\oint(\nabla\times F).ndx=\int pdx+Qdy+Rdz$$

اما تابع F، یک تابع دو متغیره است بنابراین:

$$Rdz=0 \Rightarrow \int F.d_R=\int pdx+Qdy=\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y})dxdy$$

که $F=(p,Q)$

$$\int F.dR=\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y})dxdy=\iint dxdy \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=1 \Rightarrow p=y\ ,\ \ Q=2x \Rightarrow F(x,y)=y\hat{i}+2x\hat{j}$$

۶۳۷ـ گزینه «۳» برای یافتن زاویه موردنظر کافیست زاویه بین بردارهای گرادیان دو رویه را در نقطه $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ بیابیم، لذا:

استوانه: $\vec{\nabla}f=(2x,2y,0)\Rightarrow\vec{\nabla}f=(1,\sqrt{3},0)$

کره: $\vec{\nabla}g=(2x-2,2y,2z)\Rightarrow\vec{\nabla}g=(-1,\sqrt{3},0)$

از طرفی برای محاسبه زاویه بین دو بردار فوق داریم:

$$\vec{\nabla}f.\vec{\nabla}g=|\vec{\nabla}f||\vec{\nabla}g|\cos\theta\Rightarrow(1,\sqrt{3},0).(-1,\sqrt{3},0)=2\times2\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

۶۳۸ـ گزینه «۲» برای اینکه انتگرال داده شد مستقل از مسیر باشد باید تابع برداری $\vec{F}$ پایستار باشد یعنی $\text{curl}\,\vec{F}=0$ باشد:

$$\text{curl}\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ ay^2+2czx & y(bx+cz) & ay^2+cx^2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}2ay=cy\\2cx=2cx\\by=2ay\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a=c\\b=2a\end{cases}\Rightarrow c=b=2a$$

۶۳۹ـ گزینه «۴» داریم $f(x)=3x-2y+1$ و $g(x,y)=9x^2+4y^2=18$. برای یافتن اکسترمم‌های مقید (مشروط) تابع f از دستگاه لاگرانژ به این شکل استفاده کنیم: (λ ضریب لاگرانژ است.)

$$\begin{cases}f_x=\lambda g_x\\f_y=\lambda g_y\\g(x,y)=18\end{cases}\Rightarrow\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}\Rightarrow\lambda=\frac{3}{18x}=\frac{-2}{8y}\Rightarrow y=\frac{-36x}{24}=-\frac{3}{2}x\xrightarrow{\text{جایگذاری در قید } g}9x^2+4(\frac{9}{4})x^2=18$$

$$\Rightarrow 18x^2=18\Rightarrow x=\pm1,y=\mp\frac{3}{2}$$

دو نقطه اکسترمم مقید برای $f(x,y)$ یافتیم که عبارتند از: $A(1,-\frac{3}{2})$ و $B(-1,\frac{3}{2})$. مقدار f را در این دو نقطه حساب می‌کنیم:

$f(A)=3+3+1=7$ $\qquad$ $f(B)=-3-3+1=-5$

پس کم‌ترین مقدار f تحت شرط داده شده -5 است و در نقطه‌ی $B(-1,\frac{3}{2})$ رخ می‌دهد.

۶۴۰ـ گزینه «۴» S یک سطح بسته است. در واقع S پوسته خارجی یک مکعب است. بنابراین می‌توان از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کرد و انتگرال روی سطح S را به انتگرال سه گانه روی ناحیه درون S تبدیل کرد. ناحیه درون S را D می‌نامیم.

$$\vec{F}(x,y,z)=(\underbrace{x^{2}-yz}_{M},\underbrace{y^{2}-zx}_{N},\underbrace{z^{2}-xy}_{P})$$

$$\operatorname{div}F=M_x+N_y+P_z=2x+2y+2z$$

ناحیه D مکعبی با مرزهای $0\le x\le 5$ و $0\le y\le 2$ و $0\le z\le 3$ است.

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}d\sigma=\iiint_D \operatorname{div}F dzdydx=\int_0^5\int_0^2\int_0^3 2(x+y+z)dz\,dy\,dx=\int_0^5\int_0^2 2(xz+yz+\frac{z^2}{2})\Big|_0^3 dy\,dx=\int_0^5\int_0^2 2(3x+3y+\frac{9}{2})dy\,dx$$

$$=\int_0^5 2(3xy+3\frac{y^2}{2}+\frac{9}{2}y)\Big|_0^2 dx=\int_0^5 2(6x+6+9)dx=2\int_0^5(6x+15)dx=2(\frac{6x^2}{2}+15x)\Big|_0^5=2(75+75)=300$$

۶۴۱ـ گزینه «۲» با استفاده از فرمول بسط دوجمله‌ای داریم:

$$(1+\sqrt{2})^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\sqrt{2})^k(1)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\sqrt{2})^k$$

می‌دانیم که a_n به ازای kهای زوج به‌دست می‌آید و b_n به‌ازای kهای فرد حاصل خواهد شد. اگر به جای $\sqrt{2}$، از $-\sqrt{2}$ استفاده کنیم، علامت جملات فرد تغییر می‌کند. پس برای محاسبه‌ی a_n و b_n به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases}(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}\\(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_n=\dfrac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{2}\\[2mm] b_n=\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

حالا می‌توانیم حد مورد نظر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\right]}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right]}$$

اکنون توجه کنید که $\sqrt{2}\simeq 1/4$ پس $|1-\sqrt{2}|\simeq 0/4$ به عبارتی $|1-\sqrt{2}|<1$ است. در نتیجه داریم: $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\sqrt{2})^n=0$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n}{\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n}=\sqrt{2}$$

۶۴۲ـ گزینه «۱» مفهوم سوپریمم مانند مفهوم ماکزیمم است، با این تفاوت که ممکن است تابع یا دنباله مورد نظر به آن مقدار نرسد بلکه به آن میل کند. در اینجا دنباله‌ی $f(n)=\sqrt[n]{n}$ را در نظر می‌گیریم. اولین جمله این دنباله $f(1)=1$ است و حد آن نیز در بی‌نهایت $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\sqrt[n]{n}=1$ است. برای تشخیص بیشترین مقدار این دنباله، از مشتق‌گیری استفاده می‌کنیم.

$$f(n)=n^{\frac{1}{n}}\Rightarrow \operatorname{Ln}f(n)=\frac{1}{n}\operatorname{Ln}(n)\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}\frac{f'(n)}{f(n)}=-\frac{1}{n^2}\operatorname{Ln}n+\frac{1}{n^2}=\frac{1-\operatorname{Ln}n}{n^2}=0\Rightarrow \operatorname{Ln}n=1\Rightarrow n=e$$

بیشترین مقدار این تابع به‌ازای $n=e$ به‌دست می‌آید. اما n یک عدد طبیعی است پس به‌جای e باید نزدیک‌ترین عدد طبیعی به e یعنی $n=3$ را در نظر بگیریم. به عبارتی داریم:

$$\sup\{f(n)|n=1,2,3,\dots\}=f(3)=\sqrt[3]{3}$$

۶۴۳ـ گزینه «۴» با توجه به این که $\nabla^2 f=\operatorname{div}(\vec{\nabla}f)$ و این که تابع f حقیقی دو متغیره است:

$$\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\nabla}f)=\vec{\nabla}(\nabla^2 f)=\vec{\nabla}(f_{xx}+f_{yy})=(f_{xxx}+f_{yyx},f_{xxy}+f_{yyy})$$

اکنون عبارت موردنظر را تشکیل می‌دهیم:

$$\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\nabla}f)-(f_{xxx}\vec{i}+f_{yyy}\vec{j})=(f_{xxx}+f_{yyx},f_{xxy}+f_{yyy})-(f_{xxx},f_{yyy})=(f_{yyx},f_{xxy})=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(f_y\vec{i}+f_x\vec{j})$$

۶۴۴ـ گزینه «۴» بیشترین میزان تغییرات یک تابع چند متغیره در نقطه P برابر با اندازه‌ی بردار گرادیان تابع در آن نقطه می‌باشد، لذا:

$$\vec{\nabla}f(x,y,z)=(\frac{2xz}{x^2+y^2-1},\frac{2yz}{x^2+y^2-1},\operatorname{Ln}(x^2+y^2-1))$$

بردار گرادیان در نقطه $p(1,1,1)$ برابر است با:

$$\Rightarrow\vec{\nabla}f(1,1,1)=(\frac{2}{1},\frac{2}{1},\operatorname{Ln}(1))=(2,2,0)$$

بنابراین بیشترین میزان تغییرات تابع داده شده در نقطه $p(1,1,1)$ برابر است با:

$$\max f=|\vec{\nabla}f(1,1,1)|=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

۶۴۵ـ گزینه «۴» بسط مک لورن e^x را یادآوری می‌کنیم:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

به ازای $x=1$ داریم:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

حال سری داده شده را با استفاده از این تساوی به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}2\frac{n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots)-(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots) = 2e-(e-1) = 2e-e+1 = e+1$$

۶۴۶ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. در تابع $f(x,y)=\sqrt[7]{x^2+y^4-2}$ فرض می‌کنیم $(x,y)=(6/98\,,\,3/07)$ و $(x_0,y_0)=(7\,,\,3)$.

در این صورت خواهیم داشت:

$$(dx,dy)=(x-x_0\,,\,y-y_0)=(-0/02\,,\,0/07)$$

$$f(x_0,y_0)=\sqrt[7]{7^2+3^4-2}=\sqrt[7]{128}=2$$

مشتق‌های جزئی f را در نقطه‌ی (x_0,y_0) به دست می‌آوریم و دیفرانسیل کل f را حساب می‌کنیم:

$$f_x=\frac{2x}{7\sqrt[7]{(x^2+y^4-2)^6}}=\frac{14}{7\sqrt[7]{(128)^6}}=\frac{14}{(7)(64)}=\frac{1}{32}$$

$$f_y=\frac{4y^3}{7\sqrt[7]{(x^2+y^4-2)^6}}=\frac{(4)(27)}{7\sqrt[7]{(128)^6}}=\frac{(4)(27)}{(7)(64)}=\frac{27}{(7)(16)}$$

$$df=f_x\,dx+f_y\,dy=-\frac{0/02}{32}+\frac{(27)(0/07)}{(7)(16)}=-\frac{0/01}{16}+\frac{0/27}{16}=\frac{0/26}{16}=\frac{0/13}{8}$$

$$f(6/98,3/07)\simeq f(7,3)+df=2+\frac{0/13}{8}=2/0162$$

۶۴۷ـ گزینه «۴» حروف داده شده را دسته‌بندی می‌کنیم:

$$D\ ,\ E\ ,\ L\ ,\ V\ ,\ R\ ,\ N\ ,\ AAA$$

هفت حرف متمایز داریم و از حرف A می‌توان سه بار استفاده کرد. رمزهای ۴ حرفی سه دسته‌اند. دسته اول آن‌هایی که حرف تکراری ندارند و یک جایگشت ۴ حرفی از بین ۷ حرف متمایز داده شده هستند. تعداد آن‌ها برابر است با:

$$\binom{7}{4}4!=\frac{7!}{3!}$$

دسته دوم رمزهایی هستند که از دو حرف A و A در کنار دو حرف متمایز دیگر که از بین ۶ حرف انتخاب می‌شوند، ساخته شده‌اند. تعداد آن‌ها برابر است با:

$$\binom{6}{2}\frac{4!}{2!}=\frac{6!}{2!\,2!}$$

و دسته سوم از ۳ حرف A و یک حرف دیگر ساخته می‌شوند. تعداد این دسته برابر است با:

$$\binom{6}{1}\frac{4!}{3!}=24$$

در نتیجه، جواب برابر است با مجموع این ۳ دسته:

$$24+\frac{7!}{3!}+\frac{6!}{2!\,2!}=24+840+180=1044$$

۶۴۸ـ گزینه «۴» با توجه به آن که $512=2^9$ است داریم:

$$\log_2(512)=9$$

بنابراین $x=\sqrt{1+\log_2(512)}=\sqrt{10}$. حال می‌دانیم که $3\le x$ است پس $f(x)=x^3-6x$ و $f'(x)=3x^2-6$ و با جایگذاری $x=\sqrt{10}$ داریم:

$$f'(\sqrt{10})=30-6=24$$

۶۴۹ـ گزینه «۴» فرض کنیم $f(x)=\mathrm{Arc\,tg}(\sqrt[3]{x})+\frac{\pi}{4}$ باشد. در نقطه‌ی $x=-1$ داریم:

$$f(-1)=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=0$$

مقدار دیفرانسیل f را در این نقطه و به ازای $dx=0/03$ به دست می‌آوریم:

$$dx=f'(x)\,dx=\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\frac{1}{6}(0/03)=\frac{0/01}{2}=0/005$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(-0/97)\simeq f(-1)+df=0/005$$

۶۵۰ـ گزینه «۱» ابتدا نقاط تقاطع دو منحنی را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \text{Ln}x \\ y_2 = x^2 - x \end{array}\right\} \to y_1 = y_2 \Rightarrow \text{Ln}x = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x - \text{Ln}x = 0 \Rightarrow x = 1$$

با بررسی مشتق معادله تقاطع خواهید دید که تابع اکیداً یکنواست، در نتیجه $x=1$ تنها ریشه معادله خواهد بود. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = y_1'(1) = \frac{1}{x} = 1 \\ m_2 = y_2'(1) = 2x - 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow \alpha = 0$$

۶۵۱- گزینه «۴» با توجه به این که بردار مماس بر بیضی مورد اشاره، بر بردار گرادیان هر دو رویه ذکر شده عمود است، پس بردار نرمال صفحه عمود بر این خم (یا همان بردار مماس بر خم) موازی حاصلضرب خارجی دو بردار گرادیان است.

در واقع با فرض $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ و $g(x,y,z) = 2x - 3y + z = 0$ خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = (2x, 2y, 0) \Rightarrow \vec{\nabla} f(4,3,1) = (8,6,0)$$

$$\vec{\nabla} g(x,y,z) = (2,-3,1) \Rightarrow \vec{\nabla} g(4,3,1) = (2,-3,1)$$

$$\vec{n} \parallel \vec{\nabla} f(4,3,1) \times \vec{\nabla} g(4,3,1) = (6,-8,-36) \Rightarrow \vec{n} = (3,-4,-18)$$

$$S: 3(x-4) - 4(y-3) - 18(z-1) = 0 \xrightarrow{y=z=0} 3x - 12 + 12 + 18 = 0 \Rightarrow x = -6$$

۶۵۲ـ گزینه «۱»

$$(x^2 - \frac{2}{x})^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (x^2)^k (-\frac{2}{x})^{6-k} = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (-2)^{6-k}\ x^{3k-6}$$

در جمله فاقد x، توان x باید صفر باشد؛ بنابراین به ازای $k=2$ به این جمله می‌رسیم.

$$\text{جمله فاقد x} = \binom{6}{2}(-2)^4 x^0 = \frac{6!}{2!4!}(16) = (15)(16) = 240$$

۶۵۳ـ گزینه «۴» هرگاه فرض کنیم $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$، $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ آنگاه g زوج است و h فرد و $f = g + h$؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{جواب} = g(\sqrt{3}) = \frac{f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3})}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\frac{(2+\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{2}\frac{4+4\sqrt{3}+3+4-4\sqrt{3}+3}{4-3} = 7$$

۶۵۴ـ گزینه «۳»

روش اول: وقتی دو خط بر هم منطبق هستند، باید شیب و عرض از مبدأ یکسان داشته باشند.

$$3x + ay + 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{a}x - \frac{2}{a}$$

$$5x + 2y + b = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x - \frac{b}{2}$$

بنابراین $\frac{5}{2} = \frac{3}{a}$ و $\frac{b}{2} = \frac{2}{a}$. پس $5a = 6$ و $ab = 4$. در نتیجه $a = \frac{6}{5}$ و $b = \frac{20}{6}$.

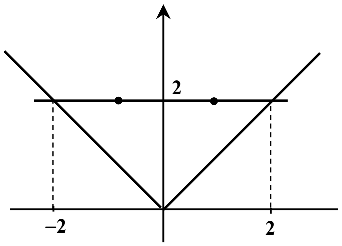
$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{20}{6}} = \frac{36}{100} = 0/36$$

روش دوم: شرط منطبق بودن دو خط $3x + ay + 2 = 0$ و $5x + 2y + b = 0$ آن است که $\frac{3}{5} = \frac{a}{2} = \frac{2}{b}$ باشد. بنابراین $5a = 6$ و $3b = 10$.

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{10}{3}} = \frac{18}{50} = \frac{36}{100} = 0/36$$

۶۵۵ـ گزینه «۲» برای سازگار بودن دستگاه باید دترمینان ماتریس زیر صفر باشد:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & a & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2a + 45 - 4 + 12a - 3 - 10 = 14a + 28 = 0 \Rightarrow a = -2$$



۶۵۶ـ گزینه «۳» هر گاه $x \to \pm\infty$ داریم $\frac{۱}{x} \to ۰$ و به این ترتیب $y = |x + \frac{۱}{x}| \approx |x|$. پس خطوط $y = x$ و $y = -x$ مجانب‌های مایل این منحنی هستند.

برای یافتن نقاط می‌نیمم این منحنی توجه کنید که برای $x > ۰$ داریم $y = x + \frac{۱}{x}$ و $y' = ۱ - \frac{۱}{x^۲}$. معادله $y' = ۰$ دارای جواب $x = ۱$ است. در ناحیه $x < ۰$ نیز به همین شکل $x = -۱$ نقطه بحرانی است. تابع y تابعی زوج است که در دو نقطه $(۱,۲)$ و $(-۱,۲)$ دارای می‌نیمم است. خط گذرنده از این نقاط، خط $y = ۲$ است.

ناحیه محدود شده به خطوط $y = x$ و $y = -x$ و $y = ۲$ مثلثی است با قاعده‌ی ۴ متر و ارتفاع ۲ متر. مساحت آن برابر است با $\frac{۴ \times ۲}{۲} = ۴$.

۶۵۷ـ گزینه «۴» حروف داده شده را دسته‌بندی می‌کنیم: AAA, HH, S, T, M

۵ حرف متمایز داریم. ۳ حرف تکراری A و دو حرف تکراری H قابل استفاده‌اند. رمزهای ۳ حرفی را دسته‌بندی می‌کنیم.

دسته اول: رمزهایی که از ۳ حرف متمایز تشکیل شده‌اند: $\binom{۵}{۳}۳!$

دسته دوم: رمزهایی که از H و H و یک حرف دیگر تشکیل شده‌اند: $\binom{۴}{۱}\frac{۳!}{۲!}$

دسته سوم: رمزهایی که از A و A و یک حرف دیگر تشکیل شده‌اند: $\binom{۴}{۱}\frac{۳!}{۲!}$

دسته چهارم: رمزی که به صورت AAA باشد که فقط یک حالت دارد. $\binom{۵}{۳}۳! + \binom{۴}{۱}\frac{۳!}{۲!} + \binom{۴}{۱}\frac{۳!}{۲!} + ۱ = ۶۰ + ۱۲ + ۱۲ + ۱ = ۸۵ = \text{جواب}$

۶۵۸ـ گزینه «۲»

روش اول: دو محدودیت $g_۱ : x + y - z = ۳$ و $g_۲ : ۲x + ۳y + z = ۱۲$ را با هم برخورد می‌دهیم تا با حذف z از مسأله به یک مسأله‌ی بهینه‌سازی با تابع دو متغیره‌ی $f(x,y)$ و فقط یک محدودیت $g(x,y) = c$ برسیم.

$$\begin{cases} x + y - z = ۳ \\ ۲x + ۳y + z = ۱۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع کردن ۲ معادله}} \underbrace{۳x + ۴y = ۱۵}_{g}$$

حالا با قرار دادن $z = x + y - ۳$ در تابع f آن را هم دو متغیره می‌کنیم:

$$f(x,y) = \frac{x^۲ + y^۲}{۲} + xy + (x + y - ۳) + ۲y \Rightarrow f(x,y) = \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}y^۲ + xy + x + ۳y - ۳$$

حالا تناسب لاگرانژ را برای تابع هدف $f(x,y)$ و محدودیت $g(x,y) = ۱۵$ می‌نویسیم:

$$\lambda = \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{x + y + ۱}{۳} = \frac{y + x + ۳}{۴} \Rightarrow ۴x + ۴y + ۴ = ۳x + ۳y + ۹ \Rightarrow y = -x + ۵$$

این نتیجه را در g قرار می‌دهیم:

$$۳x + ۴y = ۱۵ \Rightarrow ۳x - ۴x + ۲۰ = ۱۵ \Rightarrow x = ۵ \xrightarrow{y = -x + ۵} y = ۰$$

با قرار دادن $(x,y) = (۵,۰)$ کمترین مقدار f را حساب می‌کنیم:

$$f_{min} = \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}y^۲ + xy + x + ۳y - ۳ = \frac{۲۵}{۲} + ۵ - ۳ = \frac{۲۹}{۲}$$

روش دوم: مد نظر طراح همان روش اول بوده است. اما حل براساس بحث تابع یک‌متغیره روش دیگر است:

$$\begin{cases} x + y = ۳ + z \\ ۲x + ۳y = ۱۲ - z \end{cases} \Rightarrow y = ۶ - ۳x \ , \ x = ۴z - ۳$$

$$f = \frac{۱}{۲}[(۴z - ۳)^۲ + (۶ - ۳z)^۲] + (۴z - ۳)(۶ - ۳z) + z + ۲(۶ - ۳z) = \frac{۱}{۲}z^۲ - ۲z + \frac{۳۳}{۲} \xrightarrow{\text{برای اکسترمم شدن}} z - ۲ = ۰ \Rightarrow z = ۲$$

$$\Rightarrow f_{min} = f(۲) = \frac{۲۹}{۲}$$

۶۵۹ـ گزینه «۳» مساحت جانبی شکل حاصل از دوران حول محور y برابر با $S = ۲\pi\int_a^b |x|\sqrt{۱ + y'^۲}\,dx$ است.

ابتدا با مشتق‌گیری از انتگرال، y' را حساب می‌کنیم:

$$y' = f'(x) = \sqrt{\sin^۲ x^۲ + ۲\sin x^۲} \Rightarrow \sqrt{۱ + y'^۲} = \sqrt{۱ + \sin^۲ x^۲ + ۲\sin x^۲} = \sqrt{(۱ + \sin x^۲)^۲} = ۱ + \sin x^۲$$

با جایگذاری در فرمول S داریم:

$$S = ۲\pi\int_۰^{\sqrt{\frac{\pi}{۲}}} |x|(۱ + \sin x^۲)\,dx$$

در این بازه $x \geq ۰$ است و قدرمطلق لازم نیست:

$$S = ۲\pi\int_۰^{\sqrt{\frac{\pi}{۲}}} (x + x\sin x^۲)\,dx = ۲\pi\left(\frac{x^۲}{۲} - \frac{\cos x^۲}{۲}\right)\Bigg|_۰^{\sqrt{\frac{\pi}{۲}}} = \pi(x^۲ - \cos x^۲)\Bigg|_۰^{\sqrt{\frac{\pi}{۲}}} = \pi\left(\frac{\pi}{۲} + ۱\right)$$

۶۶۰ـ گزینه «۳» با تغییر متغیر $e^x + \mathrm{Ln}x = u$ داریم:

$$e^x + \mathrm{Ln}x = u \;\Rightarrow\; (e^x + \frac{۱}{x})dx = du \;\Rightarrow\; \frac{(xe^x + ۱)}{x}dx = du$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{u} = \mathrm{Ln}u = \mathrm{Ln}(e^x + \mathrm{Ln}x)\Big|_۱^e = \mathrm{Ln}(\frac{e^e + \mathrm{Ln}e}{e + \mathrm{Ln}۱}) = \mathrm{Ln}(\frac{e^e + ۱}{e}) = \mathrm{Ln}(e^{e-۱} + e^{-۱})$$

۶۶۱ـ گزینه «۲» بردار هادی یک خط موازی با دو صفحه متقاطع، از ضرب خارجی بردارهای نرمال آن دو صفحه به دست می‌آید، یعنی:

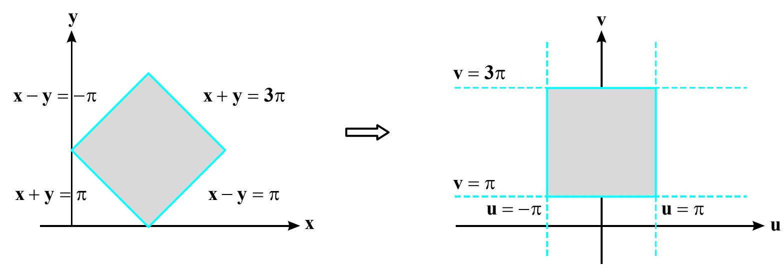
$$\left.\begin{aligned}\vec{n}_۱ &= (۱,-۱,۰)\\ \vec{n}_۲ &= (۱,۲,۱)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{u} = \vec{n}_۱ \times \vec{n}_۲ = (-۱,-۱,۳) \,||\, (۱,۱,-۳) \Rightarrow \frac{x-۱}{۱} = \frac{y}{۱} = \frac{z+۱}{-۳}$$ معادله خط

۶۶۲ـ گزینه «۴» برای حل این انتگرال، ابتدا عبارت زیر انتگرال را برحسب پارامتر t به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned}x(t) &= \int_۰^t \sin(x^۲)dx \Rightarrow dx = \sin t^۲ dt\\ y(t) &= \sqrt{t} \Rightarrow dy = \frac{dt}{۲\sqrt{t}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow I = \int_C y^۲dx + ydy = \int_۰^{\sqrt{\pi}}(t\sin t^۲ + \sqrt{t}\frac{۱}{۲\sqrt{t}})dt = \int_۰^{\sqrt{\pi}}(t\sin t^۲ + \frac{۱}{۲})dt$$

$$= (-\frac{۱}{۲}\cos t^۲ + \frac{۱}{۲}t)\Big|_۰^{\sqrt{\pi}} = (-\frac{۱}{۲}\cos\pi + \frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}) - (-\frac{۱}{۲} + ۰) = ۱ + \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

۶۶۳ـ گزینه «۲» برای حل این انتگرال ابتدا از دو تغییر متغیر $u = x - y$ و $v = x + y$ انتگرال و ناحیه R را ساده می‌کنیم. در این حالت:



$$J_{xy} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۲ \;\Rightarrow\; J_{uv} = \frac{۱}{|J_{xy}|} = \frac{۱}{۲}$$

$$I = \iint\limits_R (x-y)^۴(۱+\cos(x+y))dxdy = \iint\limits_{R'} u^۴(۱+\cos v)\frac{۱}{۲}dudv = \frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi}u^۴du\int_{\pi}^{۳\pi}(۱+\cos v)dv = \frac{۱}{۲}(\frac{u^۵}{۵}\Big|_{-\pi}^{\pi})(v+\sin v\Big|_{\pi}^{۳\pi})$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۲\pi^۵}{۵} \times ۲\pi = \frac{۲\pi^۶}{۵}$$

۶۶۴ـ گزینه «۱» با جایگذاری $z = a + ib$ در نامساوی و محاسبه‌ی طرفین آن، نقاط مورد نظر را پیدا می‌کنیم.

$$\mathrm{Re}(a+bi+۲i+۱) \geq |a+bi+۱|^۲ \Rightarrow a+۱ \geq (a+۱)^۲ + b^۲ \Rightarrow a+۱ \geq a^۲ + b^۲ + ۲a + ۱ \Rightarrow a^۲ + a + b^۲ \leq ۰ \Rightarrow (a+\frac{۱}{۲})^۲ + b^۲ \leq \frac{۱}{۴}$$

۶۶۵ـ گزینه «۳» حد مجموع داده‌شده از نوع ریمانی است، در واقع در این حد مجموع داریم: $f(\frac{۱}{n}) = ۳^{\frac{۱}{n}}$ ، $f(\frac{۲}{n}) = ۳^{\frac{۲}{n}}$ و به همین ترتیب $f(\frac{k}{n}) = ۳^{\frac{k}{n}}$ است. پس ضابطه‌ی تابع به‌صورت $f(x) = ۳^x$ خواهد بود. طبق فرمول حد مجموع ریمانی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}(۳^{\frac{۱}{n}} + ۳^{\frac{۲}{n}} + \cdots + ۳^{\frac{n}{n}}) = \int_۰^۱ f(x)dx = \int_۰^۱ ۳^x dx$$

برای حل این انتگرال توجه کنید که $۳^x = e^{x\mathrm{Ln}۳}$ است، پس داریم:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \int_۰^۱ e^{x\mathrm{Ln}۳}dx = \frac{۱}{\mathrm{Ln}۳}e^{x\mathrm{Ln}۳}\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{\mathrm{Ln}۳}(e^{\mathrm{Ln}۳} - ۱) = \frac{۱}{\mathrm{Ln}۳}(۳-۱) = \frac{۲}{\mathrm{Ln}۳}$$

۶۶۶ـ گزینه «۴» انتگرال $I=\int_0^1 \frac{x^3}{(1-x)^6}dx$ فقط در $x=1$ دارای ناسرگی است. شرط همگرایی این انتگرال آن است که توان عامل صفرشونده در مخرج، کوچک‌تر از یک باشد. در حالی که در این انتگرال، عامل $(1-x)$ با توان $p=6$ در مخرج وجود دارد، پس انتگرال I واگراست.

انتگرال $J=\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[6]{x}}dx$ فقط در $x=0$ دارای ناسرگی است. توان عامل صفرشونده در مخرج $p=\frac{1}{6}$ است. بنابراین $p<1$ است و شرط همگرایی برقرار می‌شود. انتگرال J همگراست.

۶۶۷ـ گزینه «۱» ابتدا $f(x)$ را به مجموع دو کسر ساده‌تر تبدیل می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{2x}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}$$

حالا با استفاده از فرمول مشتق nاُم کسرها داریم:

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+x)^{n+1}}$$

روش تستی: اگر در گزینه‌ها $n=0$ قرار دهیم، باید خود $f(x)$ به دست بیاید. فقط گزینه‌ی (۱) چنین است:

$$n!(\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}})=0!(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x})=\frac{1+x-1+x}{(1-x)(1+x)}=\frac{2x}{1-x^2}$$

۶۶۸ـ گزینه «۱» اگر فرض کنیم $f(x)=\sqrt{x}\sin x$ آنگاه $f(\frac{\pi}{2}-x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}\cos x$ بنابراین، انتگرال داده شده همان انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{f(x)+f(\frac{\pi}{2}-x)}dx$ می‌باشد که با توجه به فرمول، حاصل آن $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})$ می‌باشد.

۶۶۹ـ گزینه «۲» تابع $\lfloor \sin x\rfloor$ در $x=0$ ناپیوسته است زیرا مقدار داخل جزء صحیح، عدد صحیح می‌شود. پس، از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\lfloor \sin x\rfloor}{x}=\lim_{x\to 0}x\lfloor \sin x\rfloor=0\times(\text{کران‌دار})=0$$

توضیح: برای توضیح کاملتر درباره‌ی تابع $\lfloor \sin x\rfloor$ توجه کنید که با استفاده از هم‌ارزی داریم $\sin x\simeq x$ پس $\lfloor \sin x\rfloor\simeq\lfloor x\rfloor$ حالا حد چپ برابر است با $\lfloor 0^-\rfloor=-1$ و حد راست برابر است با $\lfloor 0^+\rfloor=0$ پس $\lfloor \sin x\rfloor$ در $x=0$ ناپیوسته اما کران‌دار است.

۶۷۰ـ گزینه «۴» می‌دانیم که $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$. از صورت سؤال داریم $y=0$ و از حل معادله $f(x)=0$ داریم $e^x=1$ یعنی $x=0$ پس می‌توان نوشت:

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)},\ f'(x)=e^x\sqrt{1+Lne^x}=e^x\sqrt{1+x}\Rightarrow f'(0)=1\Rightarrow(f^{-1})'(0)=1$$

۶۷۱ـ گزینه «۴» دقت کنید که در $x=0$ ضابطه‌های اول و دوم تابع مقدار برابر دارند، پس تابع در این نقطه پیوسته است. اما برای بحث مشتق‌پذیری در صفر داریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)-f(0)}{x-0})=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} & ;x\in\mathbb{Q}-\{0\}\\ \lim\limits_{x\to 0}(1-x) & ;x\notin\mathbb{Q}\end{cases}=\begin{cases}1 & ;x\in\mathbb{Q}-\{0\}\\ 1 & ;x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

پس $f'(0)=1$ است.

۶۷۲ـ گزینه «۱» برای به دست آوردن $g'(x)$ باید از تعمیم فرمول مشتق‌گیری از انتگرال استفاده کنیم (چرا که تابع داخل انتگرال $g(x)$ برحسب متغیرهای x و z می‌باشد.) و داریم:

$$g'(x)=\beta'(x)e^{x\beta^2(x)}-\alpha'(x)e^{x\alpha^2(x)}+\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}z^2e^{xz^2}dz$$

اکنون باید حاصل انتگرال به دست آمده را به روش جزء به جزء محاسبه کنیم و داریم:

$$\begin{cases}u=z\ \Rightarrow du=dz\\ dv=ze^{xz^2}dz\xrightarrow{\text{انتگرال}}v=\int ze^{xz^2}dz=\frac{1}{2x}e^{xz^2}\end{cases}$$

$$\int udv=uv-\int vdu=(\frac{z}{2x}e^{xz^2})_{\alpha(x)}^{\beta(x)}-\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{1}{2x}e^{xz^2}dz=\frac{\beta(x)}{2x}e^{x\beta^2(x)}-\frac{\alpha(x)}{2x}e^{x\alpha^2(x)}-\frac{1}{2x}g(x)$$

اکنون حاصل به دست آمده از انتگرال جزء به جزء را در $g'(x)$ قرار می‌دهیم و سپس حاصل $g'(x)+\frac{1}{2x}g(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$\beta'(x)e^{x\beta^2(x)}-\alpha'(x)e^{x\alpha^2(x)}+\frac{\beta(x)}{2x}e^{x\beta^2(x)}-\frac{\alpha(x)}{2x}e^{x\alpha^2(x)}=e^{x\beta^2(x)}(\beta'(x)+\frac{\beta(x)}{2x})-e^{x\alpha^2(x)}(\alpha'(x)+\frac{\alpha(x)}{2x})$$

۶۷۳ـ گزینه «۱» ابتدا تابع f را محاسبه می‌کنیم، لذا:

$$f(x)=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x & x\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & \frac{\pi}{2}\end{vmatrix}=\frac{\pi}{2}\sin x - x \Rightarrow$$ ($f(x)$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است)

تا اینجا می‌دانیم گزینه‌های (۲) و (۳) صحیح هستند. با مشتق‌گیری از $f(x)$ داریم:

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos x - 1$$

$f'(x)$ تابعی همواره مثبت نیست پس گزینه‌ی ۱ صحیح نیست.

در مورد گزینه‌ی (۴) توجه کنید که:

$$\begin{cases} f(0)=0\\ f(\frac{\pi}{2})=0\end{cases} \xrightarrow{\text{طبق قضیه رول}} f'(c)=0$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) نیز صحیح است.

۶۷۴ـ گزینه «۳» سطح حاصل از دوران منحنی $y=f(x)$ در فاصله‌ی $a\le x\le b$ حول محور yها برابر است با:

$$S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

بنابراین برای خم داده شده داریم:

$$y'=f'(x)=\sqrt{e^{2x^2}+2e^{x^2}} \Rightarrow S=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+e^{2x^2}+2e^{x^2}}\,dx$$

$$S=2\pi\int_0^1 x\sqrt{(1+e^{x^2})^2}\,dx=2\pi\int_0^1 x(1+e^{x^2})dx=2\pi\int_0^1 (x+xe^{x^2})dx \Rightarrow S=2\pi(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}e^{x^2})\Big|_0^1=2\pi(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2})=\pi e$$

۶۷۵ـ گزینه «۴» برای محاسبه‌ی حد داده شده داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)}=1^\infty$$

برای رفع ابهام فوق به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-1)g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\int_0^{x^2}e^{t^3}dt)(\frac{1}{\int_0^x te^{t^5}dt})}=e^{\frac{0}{0}}$$

با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2xe^{x^6}}{xe^{x^5}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}2e^x}=e^2$$

۶۷۶ـ گزینه «۳» گزینه‌های (۱) و (۲) هر دو نادرست هستند. وقتی سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ با شرط $a_n>0$ همگرا باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty}na_n$ می‌تواند همگرا یا واگرا باشد. برای مثال $a_n=\frac{1}{n^2}$ و $b_n=\frac{1}{n^3}$ را در نظر بگیرید. $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ هر دو همگرا هستند اما $\sum_{n=1}^{\infty}na_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست و $\sum_{n=1}^{\infty}nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست. اما در مورد گزینه‌های (۳) و (۴)، دقت کنیم که طبق فرض سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ است. وقتی (a_n) دنباله‌ای همگرا باشد داریم $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ پس برای nهای به قدر کافی بزرگ می‌توان گفت:

$$\sqrt{a_na_{n+1}}\simeq\sqrt{a_na_n}=a_n$$

و بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ مانند سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست.

۶۷۷ـ گزینه «۳» به کمک فرمول لایب‌نیتز برای مشتق مرتبه nاُم حاصلضرب دو تابع داریم:

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

در این سؤال $u=x^2+4x+1$ پس $u'=2x+4$ ، $u''=2$ و سایر مشتق‌های u برابر با صفر هستند.

$$\Rightarrow (uv)^{(10)}(x)=((x^2+4x+1)e^x)^{10}=\binom{10}{0}(x^2+4x+1)e^x+\binom{10}{1}(2x+4)e^x+\binom{10}{2}2e^x+0$$

$$\Rightarrow (uv)^{(10)}(x)=(x^2+4x+1+20x+40+90)e^x=(x^2+24x+131)e^x$$

۶۷۸ـ گزینه «۴» حجم جسم حاصل از دوران $r=f(\theta)$ حول محور xها بین $\theta_۱$ و $\theta_۲$ برابر است با:

$$V=\int_{\theta_۱}^{\theta_۲}\frac{۲\pi}{۳}r^۳\sin\theta d\theta$$

بنابراین داریم:

$$V=\int_{۰}^{\pi}\frac{۲\pi}{۳}a^۳(۱-\cos\theta)^۳\sin\theta d\theta$$

با تغییر متغیر $u=۱-\cos\theta$ داریم $du=\sin\theta d\theta$ بنابراین داریم:

$$V=\frac{۲\pi}{۳}a^۳\left[\frac{(۱-\cos\theta)^۴}{۴}\right]_{۰}^{\pi}=\frac{۲\pi}{۳}a^۳(۴-۰)=\frac{۸\pi}{۳}a^۳$$

۶۷۹ـ گزینه «۲» با جایگذاری $x=۰$ حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ رخ می‌دهد. می‌دانیم که $(a^u)'=u'a^u\text{Lna}$، با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to۰}\frac{a^{(b^x)}-a}{a^x-۱}=\lim_{x\to۰}\frac{(b^x\text{Lnb})a^{(b^x)}\text{Lna}}{a^x\text{Lna}}=(b^{۰}\text{Lnb})a^{(b^{۰})}=a\text{Lnb}$$

۶۸۰ـ گزینه «۱» در سری A با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۰$ می‌توانیم از هم‌ارزی $tg(\frac{۱}{n})\simeq\frac{۱}{n}$ استفاده کنیم. بنابراین سری A با سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ قابل مقایسه‌ی حدی است. این سری واگراست، چون درجه‌ی مخرج ۱ $p=۱$ است. پس سری A واگراست. در سری B ابتدا توجه کنیم که $\cos(n\pi)=(-۱)^n$ است، بنابراین $B=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{\text{Ln}(۱+n)}$ یک سری متناوب است و جمله عمومی آن یعنی $\frac{۱}{\text{Ln}(۱+n)}$ نزولی و همگرا به صفر است. پس سری متناوب B همگراست.

۶۸۱ـ گزینه «۳» در سمت راست خط $x=۱$ داریم $۱\le x<\infty$ و ناحیه‌ی داده شده بین نمودارهای $y=\frac{۶}{(۲x+۱)(x+۲)}$ و $y=۰$ قرار دارد، پس مساحت آن برابر است با:

$$S=\int_{۱}^{\infty}\left(\frac{۶}{(۲x+۱)(x+۲)}-۰\right)dx$$

با استفاده از تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{۶}{(۲x+۱)(x+۲)}=\frac{۴}{۲x+۱}+\frac{-۲}{x+۲}$$

با جایگذاری در انتگرال خواهیم داشت:

$$S=\int_{۱}^{\infty}\left(\frac{۴}{۲x+۱}-\frac{۲}{x+۲}\right)dx=۲\text{Ln}(۲x+۱)-۲\text{Ln}(x+۲)=۲\text{Ln}\frac{۲x+۱}{x+۲}\Bigg|_{۱}^{\infty}=۲\left[\lim_{x\to\infty}\text{Ln}\frac{۲x+۱}{x+۲}-\text{Ln}\frac{۳}{۳}\right)=۲[\text{Ln}۲-\text{Ln}۱]=۲\text{Ln}۲$$

۶۸۲ـ گزینه «۴» سطح حاصل از دوران منحنی $y=f(x)$ حول محور xها با فرمول $S=۲\pi\int_a^b y\sqrt{۱+y'^۲}\,dx$ قابل محاسبه است. در این سؤال $y=۲\cosh(\frac{x}{۲})$ است، پس $y'=۲\times\frac{۱}{۲}\sinh(\frac{x}{۲})=\sinh(\frac{x}{۲})$ و درنتیجه: $۱+y'^۲=۱+\sinh^۲(\frac{x}{۲})=\cosh^۲(\frac{x}{۲})$.

$$S=۲\pi\int_{۰}^{۲}۲\cosh(\frac{x}{۲})\sqrt{\cosh^۲(\frac{x}{۲})}\,dx=۲\pi\int_{۰}^{۲}۲\cosh^۲(\frac{x}{۲})dx$$

با جایگذاری $\cosh^۲(\frac{x}{۲})=\frac{۱}{۲}(۱+\cosh x)$ داریم:

$$S=۲\pi\int_{۰}^{۲}(۱+\cosh x)dx=۲\pi[x+\sinh x]_{۰}^{۲}\Rightarrow S=۲\pi(۲+\sinh ۲)$$

۶۸۳ـ گزینه «۲» با توجه به پیوسته بودن تابع و مشتقات جزئی‌اش درون و روی منحنی هموار و بسته C، می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم، یعنی داریم:

$$I=\oint_C(\underbrace{f_y}_{P}dx-\underbrace{f_x}_{Q}dy)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D(-f_{xx}-f_{yy})dxdy$$

$$\nabla^۲f=f_{xx}+f_{yy}=۰\Rightarrow I=\iint_D(-۰)dxdy=۰$$

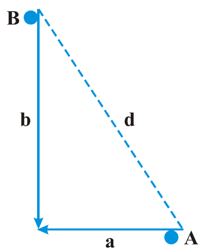
۶۸۴- گزینه «۴» ابتدا عدد $\frac{\sqrt{۳}-i}{۲}$ را به فرم قطبی آن می‌نویسیم:

$$re^{i\theta}=\frac{\sqrt{۳}-i}{۲}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}}=۱\ ,\ \theta=\tan^{-۱}\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=-\frac{\pi}{۶}$$

$$(۱-\frac{\sqrt{۳}-i}{۲})^{۲۴}=(۱-e^{-i\frac{\pi}{۶}})^{۲۴}=(e^{-i\frac{\pi}{۱۲}}(e^{i\frac{\pi}{۱۲}}-e^{-i\frac{\pi}{۱۲}}))^{۲۴}=(e^{-i\frac{\pi}{۱۲}})^{۲۴}(۲i\sin\frac{\pi}{۱۲})^{۲۴}=e^{-i\frac{\pi}{۱۲}\times۲۴}i^{۲۴}(۲\sin\frac{\pi}{۱۲})^{۲۴}$$

$$=e^{-i۲\pi}(i^۴)^۶(۲^۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲})^{۱۲}=۱\times۱\times(۴\sin^۲\frac{\pi}{۱۲})^{۱۲}=[۲(۱-\cos\frac{\pi}{۶})]^{۱۲}=[۲-\sqrt{۳}]^{۱۲}$$

۶۸۵- گزینه «۳» با توجه به شکل، ابتدا فاصله بین دو کشتی را به صورت تابعی از فاصله هریک از آن‌ها از بندر نوشته، سپس با توجه به آهنگ حرکت هر یک، سرعت مورد نظر را به دست می‌آوریم:



$$d^۲ = a^۲ + b^۲ \xrightarrow{(a,b)=(۳,۴)} d^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow d = ۵$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt}} ۲dd_t = ۲aa_t + ۲bb_t \Rightarrow d_t = \frac{aa_t + bb_t}{d} = \frac{۳(-۲۵) + ۴(-۲۰)}{۵} = -۳۱$$

۶۸۶- گزینه «۱» خم C یک دایره به مرکز $(۲,۰)$ و شعاع ۱ است. با توجه به این‌که برای میدان $F(x,y) = (۲\,\text{Arctan}\frac{y}{x}, \text{Ln}(x^۲+y^۲))$ رابطه $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = ۰$ برقرار است و در داخل این ناحیه پیوسته است (مبدا داخل ناحیه مورد نظر نیست)، میدان $\vec{F}$ پایستار است و بنابراین انتگرال مورد نظر روی خم بسته داده شده صفر است. در واقع (قضیه گرین):

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{۲ \times \frac{۱}{x}}{۱ + \frac{y^۲}{x^۲}} = \frac{۲x}{x^۲ + y^۲} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{۲x}{x^۲ + y^۲} \end{cases} \Rightarrow \oint_C ۲\,\text{Arctan}\frac{y}{x}dx + \text{Ln}(x^۲+y^۲)dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dA = \iint_D (۰)dA = ۰$$

۶۸۷ـ گزینه «۳» اولاً چون فرجه رادیکال فرد می‌باشد پس دامنه تابع R می‌باشد و این یعنی دامنه تابع متقارن است. اگر $f(-x)$ را به دست آوریم، داریم:

$$f(x) = \sqrt[۳]{(۱-x)^۲} + \sqrt[۳]{(۱+x)^۲}$$

$$f(-x) = \sqrt[۳]{(۱+x)^۲} + \sqrt[۳]{(۱-x)^۲} = f(x)$$

چون $f(-x) = f(x)$ می‌باشد، این تابع یک تابع زوج است و نسبت به محور yها متقارن است.

۶۸۸ـ گزینه «۴» ابتدا تابع $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم و داریم:

$$f(g(x)) = \begin{cases} ۳ & g(x) > ۰ \\ ۰ & g(x) = ۰ \\ -۳ & g(x) < ۰ \end{cases}$$

چون خود تابع $g(x)$ که یک تابع خطی است همواره پیوسته است، تابع $f(g(x))$ به ازای نقاطی که $g(x)$ در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد یعنی ریشه‌های ساده $g(x)$ پیوسته نمی‌باشد (چون مقدار $f(g(x))$ به ازای مقادیر $g(x) > ۰$ برابر ۳ و به ازای مقادیر $g(x) < ۰$ برابر ۳- می‌باشد).

پس فقط کافی است ریشه‌های ساده $g(x)$ را بیابیم.

$$g(x) = ۰ \Rightarrow x - x^۳ = ۰ \Rightarrow x(۱ - x^۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases}$$

پس تابع $f(g(x))$ در سه نقطه‌ی ۱- و ۰ و ۱ ناپیوسته است.

۶۸۹ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه $\cot x + \text{tg}\,x = \frac{۲}{\sin ۲x}$ می‌باشد، پس تابع $f(x)$ را ابتدا به‌صورت مقابل ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۲}{\frac{۲}{\sin ۶x}} = \sin ۶x$$

اکنون با استفاده از رابطه زیر، مشتق مرتبه دهم تابع $\sin ۶x$ را به‌دست می‌آوریم.

$$y = \sin ax \Rightarrow y^{(n)} = a^n \sin(\frac{n\pi}{۲} + ax)$$

$$y = \sin ۶x \Rightarrow y^{(۱۰)} = ۶^{۱۰} \sin(\frac{۱۰\pi}{۲} + ۶x) = ۶^{۱۰} \sin(۵\pi + ۶x) \Rightarrow y^{(۱۰)} = ۶^{۱۰}(-\sin ۶x) = -(۶^{۱۰})\sin ۶x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{۲}} -(۶^{۱۰})(۱) = -(۶^{۱۰})$$

۶۹۰ـ گزینه «۱» ابتدا دقت کنید که:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=2^{\frac{1}{2}-1}=2^{-\frac{1}{2}}$$

با استفاده از این جایگذاری‌ها خواهیم داشت:

$$x=(\sqrt[3]{2\sqrt{2}})^{\sqrt{5}-2}\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{5}+2}=(2^{\frac{1}{2}})^{\sqrt{5}-2}(2^{-\frac{1}{2}})^{\sqrt{5}+2}=2^{\frac{\sqrt{5}}{2}-1-\frac{\sqrt{5}}{2}-1}=2^{-2}$$

حال مقدار لگاریتم x در مبنای ۸ را با توجه به ویژگی‌های لگاریتم حساب می‌کنیم:

$$\text{جواب}=\log_{8}^{x^2}=\log_{2^3}^{x^2}=\log_{2^3}^{2^{-4}}=-\frac{4}{3}\log_2^2=-\frac{4}{3}$$

۶۹۱ـ گزینه «۳» فرض کنیم $f(x)=3\sin x-6x+2$ باشد. ابتدا دقت کنید که در بازه‌ی $(0,\pi)$ علامت سینوس مثبت است. با توجه به مقدار تقریبی $\pi=3/14$، اعداد $\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{5}{6}$ در این بازه قرار دارند. بنابراین مقدار سینوس در این اعداد، مثبت است. حال به علامت f در $x=\frac{2}{6}$ و $x=\frac{5}{6}$ توجه کنید:

$$f(\frac{2}{6})=3\sin(\frac{2}{6})-6(\frac{2}{6})+2=3\sin(\frac{2}{6})>0$$

$$f(\frac{5}{6})=3\sin(\frac{5}{6})-6(\frac{5}{6})+2=3\sin(\frac{5}{6})-3<0$$

دقت کنید که $\sin(\frac{5}{6})<1$ است، به همین دلیل $3\sin(\frac{5}{6})<3$ است. $f(\frac{2}{6})$ و $f(\frac{5}{6})$ مختلف‌العلامت هستند پس تابع پیوسته‌ی f ریشه‌ای در بازه $[\frac{2}{6},\frac{5}{6}]$ دارد.

۶۹۲ـ گزینه «۱» برای تابع $f(x)=\sqrt{4x+1}\,e^{x^2-4}$ داریم $x=2/006$ و $x_0=2$. دیفرانسیل f را بدست می‌آوریم: $dx=x-x_0=0/006$

$$f'(x_0)=\frac{4}{2\sqrt{4x_0+1}}e^{x_0^2-4}+2x_0e^{x_0^2-4}\sqrt{4x_0+1}=\frac{4}{6}+12=\frac{38}{3}$$

$$df=f'(x_0)dx=\frac{38}{3}(0/006)=38(0/002)=0/076$$

می‌دانیم که $f(x_0)=f(2)=3$ است و چون $df=0/076$ پس مقدار $f(x)$ به اندازه‌ی $0/076$ بیشتر از ۳ است.

۶۹۳ـ گزینه «۴» هرجا $f''(x)<0$ باشد تقعر نمودار f به سمت پایین است.

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{1+t^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{-3x^2}{(1+x^3)^2}$$

علامت $f''(x)$ همواره منفی است بنابراین تقعر نمودار f همواره به سمت پایین است.

$$\text{جواب}=(-\infty,+\infty)$$

۶۹۴ـ گزینه «۳»

$$z^2+2z+4=0\Rightarrow\Delta=2^2-4(1)(4)=-12\Rightarrow z=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}i}{2}=-1\pm\sqrt{3}i$$

در این نقاط داریم $x=-1$ و $y=\pm\sqrt{3}$ پس در نمایش قطبی داریم:

$$\begin{cases}r=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=2\\ \theta=tg^{-1}(-\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow z=2e^{\frac{2\pi}{3}i}\Rightarrow z^6=2^6e^{4\pi i}=2^6(\cos4\pi+i\sin4\pi)\Rightarrow z^6=64$$

۶۹۵ـ گزینه «۳» اگر بسط تیلور تابع f را حول $x=1$ در نظر بگیرید، ضریب $(x-1)^n$ برابر با $\frac{f(1)^{(n)}}{n!}$ است:

$$f(x)=x^n=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\cdots$$

با قراردادن $x=2$ در طرفین تساوی فوق داریم:

$$2^n=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f''(1)}{2!}+\frac{f'''(1)}{3!}+\cdots$$

روش تستی: می‌توانیم مسأله را به ازای $n=2$ حل کنیم. در این حالت داریم:

$$f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x\Rightarrow f''(x)=2$$

و سایر مشتق‌ها صفر هستند پس داریم:

$$f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f''(1)}{2!}+0+0+\cdots=1+2+\frac{2}{2!}+0=4=2^2$$

پس گزینه (۳) جواب است.

۶۹۶ـ گزینه «۲» چون دستگاه معادلات خطی داده شده همگن است، برای آن‌که جواب غیر صفر داشته باشد. باید دترمینان ضرایب دستگاه مساوی صفر باشد یعنی:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ a & -۲ & ۱ \\ ۴ & -۵ & a \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow ۲(-۲a-(-۵))-۱(a^۲-۴)-۱(-۵a-(-۸)) = ۰ \Rightarrow -۴a+۱۰-a^۲+۴+۵a-۸ = ۰$$

$$-(a^۲-a-۶) = ۰ \Rightarrow -(a-۳)(a+۲) = ۰ \begin{cases} a = ۳ \\ a = -۲ \end{cases}$$

۶۹۷ـ گزینه «۲» نقاط $x = ۰$ و $x = ۱$ نقاط بحرانی تابع هستند. لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(۰) = ۳|۰|+۴|۰-۱|+۲\times ۰ = ۴ \\ f(۱) = ۳|۱|+۴|۱-۱|+۲\times ۱ = ۵ \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \min(f(x)) = ۴$$

۶۹۸ـ گزینه «۱» سعی می‌کنیم سری داده شده را به صورت مجموع دنباله‌ای از n بنویسیم:

$$S = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲n(۲n+۲)} = \frac{۱}{۴}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(n+۱)} = \frac{۱}{۴}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{۱}{n}}_{f_n} - \underbrace{\frac{۱}{n+۱}}_{f_{n+۱}}\right) = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۱} - \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n+۱}\right) = \frac{۱}{۴}$$

۶۹۹- گزینه «۱» با توجه به این‌که در بازه انتگرال‌گیری تابع پیوسته و $x \neq ۰$ است، داریم:

$$\int_۲^۳ \frac{dx}{x+x^{-۱}} \overset{\times x}{=\!=} \int_۲^۳ \frac{xdx}{x^۲+۱} = \frac{۱}{۲}Ln(x^۲+۱)\Big|_۲^۳ = \frac{۱}{۲}[Ln(۱۰)-Ln(۵)] = \frac{۱}{۲}Ln(\frac{۱۰}{۵}) = \frac{۱}{۲}Ln۲ = Ln\sqrt{۲}$$

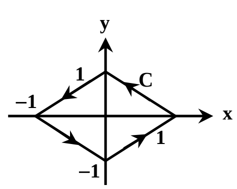
۷۰۰ـ گزینه «۱» وقتی x به سمت صفر میل می‌کند، حاصل $\cos x$ کمی از یک کمتر می‌باشد؛ بنابراین $(۲-\cos x)$ کمی از یک بیشتر خواهد بود و لذا جزء صحیح آن برابر یک می‌شود.

پس $\lfloor ۲-\cos x \rfloor = ۱$ را قرار می‌دهیم و خواهیم داشت: $f(x) \simeq \frac{(\sin x)^۲}{x}$ برای $x \to ۰$.

چون ضابطه‌ی f در $x = ۰$ تغییر می‌کند باید از تعریف مشتق در نقطه $x = ۰$ استفاده کنیم:

$$f'(۰) = \lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x} = \lim_{x\to ۰}\frac{(\sin x)^۲}{x^۲} \overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=\!=} \lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{x^۲} = ۱$$

۷۰۱ـ گزینه «۲» منحنی C مرز یک لوزی است پس مرز بسته است. به کمک قضیه گرین می‌توان چنین نوشت:



$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

بنابراین:

$$\oint_C (۵y+\sin x^۲)dx + (۲x+\cos y^۳)dy = \iint_D (۲-۵)dxdy = -۳\iint_D dxdy = -۳(۲) = -۶$$

$\iint_D dxdy$ برابر مساحت ناحیه درون مرز C می‌باشد. با رسم مرز C خواهیم دید که مساحت ناحیه درون آن برابر ۲ است.

۷۰۲ـ گزینه «۳» ابتدا عدد مختلط z را به فرم دکارتی می‌نویسیم:

$$z = x+iy \Rightarrow Im(z) = y \qquad (۱)$$

$$z^۲ = (x+iy)^۲ = x^۲-y^۲+۲xyi \qquad (۲)$$

$$(-iz)(i\overline{z}) = -i^۲z\overline{z} = z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^۲+y^۲ \qquad (۳)$$

حال عبارات فوق را در معادله‌ی خواسته شده جایگزین می‌کنیم:

$$Re\left(\frac{۵}{Im(z)}i - z^۲\right) = (-iz)(i\overline{z}) \xrightarrow{(۳),(۲),(۱)} Re\left(\frac{۵}{y}i - x^۲+y^۲-۲xyi\right) = x^۲+y^۲ \Rightarrow y^۲-x^۲ = x^۲+y^۲ \Rightarrow ۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

ملاحظه می‌شود که نقاط واقع بر روی محور yها جواب معادله‌ی فوق می‌باشد، نکته‌ای که باید توجه شود این است که نقطه‌ی $y = ۰$ و $x = ۰$ جواب معادله نمی‌باشد، زیرا $Im(z) = y$ در مخرج کسر طرف راست معادله می‌باشد و $y = ۰$ جزء دامنه‌ی آن نیست؛ لذا تمامی نقاط واقع بر محور yها به استثنای یک نقطه‌ی مکان هندسی تمام اعداد مختلطی می‌باشند که در معادله داده شده صدق می‌کند.

۷۰۳ـ گزینه «۴» با فاکتور گرفتن از $\frac{1}{n}$ می توانیم حد مجموع ریمانی را ایجاد کنیم. برای ایجاد $\frac{1}{n}$ پشت پرانتز، جملات را در n ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$I=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\cdots+\frac{n}{n+2n}\right)$$

طبق فرمول حد مجموع ریمانی مقدار حد برابر است با:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^2\frac{1}{1+x}dx$$

توجه کنید که $1\le k\le 2n$ است پس وقتی $n\to\infty$ داریم $0\le\frac{k}{n}\le 2$ یعنی $0\le x\le 2$.

$$\Rightarrow I=\operatorname{Ln}(1+x)\Big|_0^2=\operatorname{Ln}(3)-\operatorname{Ln}(1)=\operatorname{Ln}3$$

۷۰۴ـ گزینه «۳» ابتدا باید طول قوس را در بازه‌ی $[0,t]$ حساب کنیم. سپس می‌توانیم پارامتر t را برحسب طول قوس منحنی پیدا کنیم:

$$S=\int_0^t\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt\Rightarrow S=\int_0^t\sqrt{1+\sinh^2 t}\,dt=\int_0^t\cosh t\,dt\Rightarrow S=\sinh t$$

از این تساوی داریم $t=\sinh^{-1}(S)=\operatorname{Ln}(S+\sqrt{S^2+1})$ و با جایگزینی آن در منحنی داده شده داریم:

$$r(S)=(\operatorname{Ln}(S+\sqrt{S^2+1}),2,\cosh(\operatorname{Ln}(S+\sqrt{S^2+1})))$$

۷۰۵ـ گزینه «۳» (در صورت سؤال ایراد تایپی وجود دارد. منظور طراح $\frac{z^4}{1+z^8}$ است.) بنابر فرمول اولر: $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$. بنابراین:

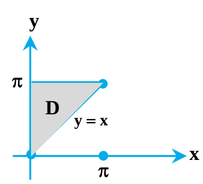
$$z=\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}=e^{i\frac{\pi}{16}}$$

$$\frac{z^4}{1+z^8}=\frac{e^{i\frac{4\pi}{16}}}{1+e^{i\frac{8\pi}{16}}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+e^{i\frac{\pi}{2}}}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}}{1+i}=\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)\frac{1+i}{1+i}=\frac{\sqrt2}{2}$$

۷۰۶ـ گزینه «۱» از روش انتگرال‌گیری جزءبه جزء استفاده کنیم. فرض کنیم $u=x$ و $dv=(1+\sin x)dx$، در این صورت $du=dx$ و $v=x-\cos x$ و بنابراین:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1+\sin x)dx=x(x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\cos x)dx=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)=1+\frac{\pi^2}{8}$$

۷۰۷ـ گزینه «۴» در ناحیه D داریم $0\le y\le\pi$ و اگر موازی و هم‌جهت با محور xها از ناحیه D عبور کنیم می‌بینیم که خط $x=0$ مرز ورودی است و خط $x=y$ مرز خروجی. بنابر این $0\le x\le y$.



$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{y}\cos(x+y)dxdy=\int_0^{\pi}\sin(x+y)\Big|_0^{y}dy$$

$$=\int_0^{\pi}[\sin(2y)-\sin(y)]dy=\left[-\frac{1}{2}\cos(2y)+\cos(y)\right]\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}-1=-2$$

۷۰۸ـ گزینه «۳» مسیر C ربع اول از دایره‌ی $x^2+y^2=1$ می‌باشد، این مسیر از $(1,0)$ آغاز می‌شود و تا $(0,1)$ ادامه دارد. آن را بـه صـورت پـارامتری زیـر می‌نویسیم:

$$C:\begin{cases}x=\cos t\ \to dx=-\sin t\,dt\\ y=\sin t\ \to dy=\cos t\,dt\end{cases};\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

حال به کمک انتگرال منحنی‌الخط مقدار کار انجام شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{کار }W=\int_C\vec F\cdot d\vec r=\int_C x^2dx-xydy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos^2 t(-\sin t)dt-\cos^2 t(\sin t)]dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t(-\sin t)dt=2\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{2}-\cos^3 0\right)=\frac{2}{3}(0-1)=\frac{-2}{3}$$

در آخرین انتگرال با فرض $u=\cos t$ داریم $du=-\sin t dt$ پس $\int u^2du=\frac{u^3}{3}$ است.

۷۰۹ـ گزینه «۴» با جایگذاری $z=x+iy$ در معادله‌ی داده شده، خواهیم داشت: $z-\bar{z}=x+iy-(x-iy)=2iy \ , \ z+\bar{z}=x+iy+x-iy=2x$

بنابراین معادله‌ی داده شده به این صورت درمی‌آید: $\mathrm{Im}(\frac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}})=\mathrm{Im}(\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}) \Rightarrow \mathrm{Im}(\frac{2x}{2iy})=\mathrm{Im}(\frac{2iy}{2x})$

با توجه به آن‌که $\frac{1}{i}=-i$ است، خواهیم داشت: $\mathrm{Im}(-\frac{ix}{y})=\mathrm{Im}(\frac{iy}{x}) \Rightarrow -\frac{x}{y}=\frac{y}{x} \Rightarrow y^2=-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0) \Rightarrow z=0$

تا این‌جا به نظر می‌رسد که فقط نقطه‌ی $z=0$ جواب معادله است، اما در این نقطه هم معادله‌ی داده شده برقرار نیست؛ زیرا مخرج کسرها صفر می‌شود. پس هیچ عدد مختلطی در این معادله صدق نمی‌کند.

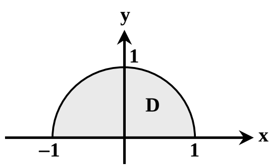
◆ ◆ ◆ ◆

۷۱۰ـ گزینه «۲» انتگرال $\int e^{-x^2}dx$ برحسب توابع مقدماتی قابل حل نیست، بنابراین انتگرال دوگانه را با ترتیب $\iint_T e^{-x^2}dydx$ حل می‌کنیم. با توجه به صورت سؤال، حدود x به صورت $0\le x<\infty$ و حدود y به شکل $-x\le y\le x$ مشخص شده‌اند و نیازی به رسم ناحیه‌ی T نداریم.

$$I=\int_0^\infty\int_{-x}^{x}e^{-x^2}dydx \Rightarrow I=\int_0^\infty[e^{-x^2}y]_{-x}^{x}dx \Rightarrow I=\int_0^\infty 2xe^{-x^2}dx=[-e^{-x^2}]_0^\infty=-e^{-\infty}+e^0=0+1=1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۱۱ـ گزینه «۱» برای نواحی دایروی از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.



در ناحیه‌ی D داریم: $0\le r\le 1$ و $0\le\theta\le\pi$

با در نظر گرفتن ژاکوبی دستگاه قطبی که r است، داریم:

$$I=\iint_D\frac{\mathrm{Ln}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy=\int_0^\pi\int_0^1\frac{\mathrm{Ln}r^2}{r}r\,dr\,d\theta=\int_0^\pi\int_0^1 2\mathrm{Ln}r\,dr\,d\theta$$

انتگرال $\int \mathrm{Ln}r\,dr$ به روش جزء به جزء با انتخاب $u=\mathrm{Ln}r$ و $dv=dr$ حل می‌شود. همچنین استفاده از فرمول $\int r^n\mathrm{Ln}r\,dr=\frac{r^{n+1}}{n+1}(\mathrm{Ln}r-\frac{1}{n+1})$ مناسب است.

$$I=\int_0^\pi 2r(\mathrm{Ln}r-1)\Big|_0^1 d\theta=\int_0^\pi 2(0-1)d\theta=-2\pi$$

◆ ◆ ◆ ◆

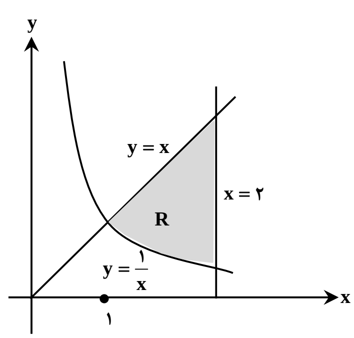
۷۱۲ـ گزینه «۱» از فرمول محاسبه مساحت در دستگاه قطبی استفاده می‌کنیم. حدود θ به صورت $0\le\theta\le 2\pi$ داده شده‌اند:

$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}(\frac{r^2}{2})d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{(e^{\frac{\theta}{4\pi}})^2}{2}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}e^{\frac{\theta}{2\pi}}d\theta=\frac{2\pi}{2}e^{\frac{\theta}{2\pi}}\Big|_0^{2\pi}=\pi(e-1)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۱۳ـ گزینه «۴» منحنی $y=\frac{1}{x}$ و خط $y=x$ در نقطه‌ی $x=1$ با هم برخورد می‌کنند.

(البته $x=-1$ هم به دست می‌آید که به ناحیه‌ی ما مربوط نمی‌شود.)



بنابراین داریم $1\le x\le 2$ و از پایین به بالا مرز ورودی $y=\frac{1}{x}$ و مرز خروجی $y=x$ است.

$$I=\int_1^2\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dydx=\int_1^2\int_{\frac{1}{x}}^{x}x^2y^{-2}dydx=\int_1^2[-x^2y^{-1}]_{\frac{1}{x}}^{x}dx$$

$$=\int_1^2(-x+x^3)dx=[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}]_1^2=\frac{9}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۱۴ـ گزینه «۴» به کمک قواعد تجزیه‌ی کسرها داریم:

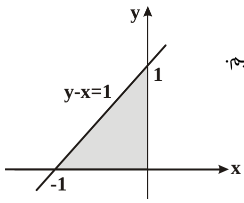
$$\frac{e^x}{e^{2x}+5e^x+6}=\frac{e^x}{(e^x)^2+5(e^x)+6}=\frac{e^x}{(e^x+2)(e^x+3)}=\frac{e^x}{e^x+2}-\frac{e^x}{e^x+3}$$

از طرفی می‌دانیم که $\int\frac{du}{u}=\mathrm{Ln}u$، پس می‌توان نوشت:

$$\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+5e^x+6}=\int\frac{e^xdx}{e^x+2}-\int\frac{e^xdx}{e^x+3}=\mathrm{Ln}(e^x+2)-\mathrm{Ln}(e^x+3)+C=\mathrm{Ln}(\frac{e^x+2}{e^x+3})+C$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۱۵ـ گزینه «۲» خط $y-x=1$ در نقاط $(-1,0)$ و $(0,1)$ با محورهای مختصات برخورد می‌کند.



با توجه به آنکه انتگرال $f(x,y)=ye^{x-y}$ نسبت به x ساده‌تر گرفته می‌شود، ترتیب $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ را انتخاب می‌کنیم.

در ناحیه‌ی D داریم: $0\le y\le 1$ و اگر از چپ به راست حرکت کنیم، مرز ورودی $x=y-1$ و مرز خروجی $x=0$ است.

$$I=\int_0^1\int_{y-1}^0 ye^{x-y}\,dx\,dy=\int_0^1\int_{y-1}^0 ye^{-y}e^{x}\,dx\,dy=\int_0^1 ye^{-y}[e^{x}]_{y-1}^{0}\,dy$$

$$=\int_0^1 ye^{-y}[1-e^{y-1}]dy=\int_0^1 ye^{-y}\,dy-\int_0^1 ye^{-1}\,dy$$

$$\begin{array}{c|c|l} \oplus & y & e^{-y} \\ \ominus & 1 & -e^{-y} \\ & 0 & e^{y} \end{array}$$

انتگرال اول با استفاده از جدول جزء به جزء حل می‌شود، حل انتگرال دوم هم ساده است:

$$I=[-ye^{-y}-e^{-y}]_0^1-[\frac{y^2}{2}e^{-1}]_0^1=1-\frac{5}{2}e^{-1}=1-\frac{5}{2e}$$

۷۱۶ـ گزینه «۴» فرمول شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ را می‌نویسیم. با توجه به آن‌که به جای x^n از x^{2n} استفاده شده داریم:

$$\frac{1}{R_1}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}\Rightarrow R_1=\frac{1}{\sqrt{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=(\frac{1}{R_1})^2$$

چون $R_1=4$ است پس داریم: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{16}$ حالا شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{R_2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{n+1}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}{1}=\frac{1}{16}\Rightarrow R_2=16$$

۷۱۷ـ گزینه «۲» برای نیم‌کره $g:x^2+y^2+z^2=a^2$، المان سطح به صورت $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dA=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dA$ است. تصویر این نیم‌کره بر صفحه‌ی xoy ناحیه‌ی درون دایره‌ی $x^2+y^2=a^2$ است. این ناحیه را D می‌نامیم. در دستگاه قطبی خواهیم داشت $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le a$.

$$\text{مساحت رویه}=S=\iint_S ds=\iint_D\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dA$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{\sqrt{2}r\,dr\,d\theta}{\sqrt{2-r^2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{2-r^2}}dr=2\pi(2-\sqrt{2})$$

۷۱۸ـ گزینه «۴» برای محاسبه تابع پتانسیل میدان برداری $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ کافی است ابتدا از $P(x,y,z)$ نسبت به x انتگرال بگیریم. سپس در $Q(x,y,z)$ از جملات شامل x صرف نظر کرده و از عبارت حاصل نسبت به y انتگرال می‌گیریم و در نهایت از جملات عبارت $R(x,y,z)$، x و y را حذف کرده و نسبت به z انتگرال می‌گیریم.

$$g(x,y,z)=\int e^{x}Lny\,dx+\int(0+\sin z)dy+\int(0)dz$$

بنابراین تابع پتانسیل برابر است با:

$$g(x,y,z)=e^{x}Lny+y\sin z+c$$

۷۱۹ـ گزینه «۲» اگر α زاویه بین خط مماس و شعاع حامل در $\theta=1$ باشد داریم:

$$tg\alpha=\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}=\frac{2\theta}{\theta^2+1}\Big|_{\theta=1}=\frac{2}{2}=1$$

بنابراین $\alpha=tg^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$.

۷۲۰ـ گزینه «۳» می‌گوییم تابع $f(x,y,z)$ همگن از درجه‌ی n است هرگاه به ازای هر $\lambda>0$: $f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^n f(x,y,z)$

قضیه اویلر در باب توابع همگن: هرگاه $f(x,y,z)$ همگن از درجه‌ی n و در هر نقطه از دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر باشد، آنگاه:

$$xf_x(x,y,z)+yf_y(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=nf(x,y,z)$$

با توجه به نکات فوق و با توجه به اینکه تابع f در صورت سؤال یک تابع همگن از درجه‌ی ۴ است، داریم:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=4f(x,y,z)$$

۷۲۱ـ گزینه «۱» ابتدا توجه کنید که طبق قانون بزرگترین درجه، $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x+2\alpha}{-4x-8}=1$ است، بنابراین حد نمایی داده شده دارای فرم مبهم 1^∞ است. از قاعده‌ی حدی $f(x)^{g(x)}\simeq e^{g(x)(f(x)-1)}$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to\infty}e^{(\alpha x-6)(\frac{-4x+2\alpha}{-4x-8}-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{(\alpha x-6)\frac{2\alpha+8}{-4x-8}}$$

اکنون از قاعده‌ی بزرگترین درجه استفاده می‌کنیم. $\alpha x-6\simeq\alpha x$ و $-4x-8\simeq-4x$، بنابراین داریم:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{(2\alpha+8)\alpha x}{-4x}}=e^{\frac{(2\alpha+8)\alpha}{-4}}$$

طبق صورت سؤال داریم $e^{\frac{(2\alpha+8)\alpha}{-4}}=1$. بنابراین $(2\alpha+8)\alpha=0$ و از آنجا که $\alpha\neq0$ است، داریم $\alpha=-4$.

۷۲۲ـ گزینه «۱» در مورد $\sqrt[n]{n!}$ می‌توانیم از هم‌ارزی استرلینگ استفاده کنیم: $\sqrt[n]{n!}\simeq\frac{n}{e}$ پس $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e}=\infty$ پس، این دنباله واگراست.

بررسی گزینه (۲): همه‌ی جملات این مجموع کوچکتر یا مساوی $\frac{n}{n^2+1}$ و بزرگتر یا مساوی $\frac{n}{n^2+n}$ هستند. بنابراین داریم:

$$n\times\frac{n}{n^2+n}\le\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le n\times\frac{n}{n^2+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}\le\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$$
$$\Rightarrow1\le\lim_{n\to\infty}a_n\le1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=1$$

پس این دنباله همگراست.

بررسی گزینه (۳): طبق قاعده‌ی سرعت رشد داریم: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+2^n}\simeq\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=3$ پس این دنباله همگراست.

بررسی گزینه (۴): یا $a>b$ است، یا $b>a$ است. اگر $a>b$ باشد، طبق قاعده‌ی سرعت رشد داریم: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\simeq\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n}=1$ پس دنباله‌ی مورد نظر همگراست. در حالتی هم که $b>a$ باشد، مقدار حد برابر با -1 است و باز هم دنباله همگراست.

۷۲۳ـ گزینه «۳» با توجه به آن‌که $\frac{x}{n}\to0$ می‌توانیم از هم‌ارزی‌ها به این صورت استفاده کنیم:

$$(1+\frac{x}{n})=e^{Ln(1+\frac{x}{n})}\simeq e^{\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}}$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}e^{-nx}(1+\frac{x}{n})^{n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{-nx}e^{(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2})n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{-nx}e^{nx-\frac{x^2}{2n}}=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

۷۲۴ـ گزینه «۴» اکسترمم مشروط تابع $f=x^2-2y+3z$ را تحت قید $g:z-x^2-3y^2=0$ می‌خواهیم.

تناسب لاگرانژ را می‌نویسیم:

$$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}=\frac{f_z}{g_z}\Rightarrow\frac{2x}{-2x}=\frac{-2}{-6y}=\frac{3}{1}$$

از تساوی $\frac{2x}{-2x}=\frac{3}{1}$ داریم $2x=-6x$ یعنی الزاماً باید $x=0$ باشد.

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=-6x\\-2=-18y\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=0\\y=\frac{1}{9}\end{matrix}$$

با جایگذاری $x=0$ و $y=\frac{1}{9}$ در معادله‌ی g داریم $z=\frac{3}{81}=\frac{1}{27}$ پس جواب نقطه‌ی $(0,\frac{1}{9},\frac{1}{27})$ است.

۷۲۵ـ گزینه «۴» با استفاده از تعریف مشتق توابع انتگرالی داریم:

$$f'(x)=(x^2)'\frac{\sin2\pi x^3}{x^2}-(x)'\frac{\sin2\pi x^2}{x}+\int_x^{x^2}\frac{2\pi t\cos2\pi xt}{t}dt\Rightarrow f'(x)=\frac{2\sin2\pi x^3}{x}-\frac{\sin2\pi x^2}{x}+\int_x^{x^2}2\pi\cos2\pi xt\,dt$$

با حل این انتگرال ضابطه‌ی $f'(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{2\sin2\pi x^3-\sin2\pi x^2}{x}+\frac{\sin2\pi xt}{x}\Big|_x^{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}(2\sin2\pi x^3-\sin2\pi x^2+\sin2\pi x^3-\sin2\pi x^2)$$

حالا با جایگذاری $x=\frac{1}{2}$ داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{x}(3\sin2\pi x^3-2\sin2\pi x^2)\Rightarrow f'(\frac{1}{2})=2(3\sin\frac{2\pi}{8}-2\sin\frac{2\pi}{4})=2(3\frac{\sqrt2}{2}-2)=3\sqrt2-4$$

۷۲۶ـ گزینه «۲» طول منحنی $y=f(x)$ در بازه‌ی $1\le x\le 2$ برابر است با:

$$S=\int_1^2\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

برای تابع داده شده y' را حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1}-\operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^2-1})]\Rightarrow y'=\frac{1}{2}[\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}]$$

با ساده‌سازی عبارت فوق داریم:

$$y'=\frac{1}{2}[\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2-1})}]=\frac{1}{2}[\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}]$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2}[\frac{x^2-1+x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}]=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}$$

با جایگذاری y' در فرمول S داریم:

$$S=\int_1^2\sqrt{1+(\sqrt{x^2-1})^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+x^2-1}\,dx=\int_1^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\Rightarrow S=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۷۲۷ـ گزینه «۴» ناحیه مورد نظر را D بنامیم. می‌دانیم که حجم D برابر است با $V=\iiint_D dzdydx$. ابتدا کران‌های x و y را تعیین کنیم. رویه‌های داده شده و صفحات مختصات، مرزهای $x=-2$ و $y=3$ و $x=0$ و $y=0$ را در صفحه xy ایجاد می‌کنند. بنابراین $-2\le x\le 0$ و $0\le y\le 3$. کران‌های بالا و پایین z نیز از صفحه $z=0$ و رویه $z=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2$ به‌دست می‌آیند.

$$V=\int_{-2}^{0}\int_0^3\int_0^{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2}dzdydx=\int_{-2}^{0}\int_0^3(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2)dydx=\int_{-2}^{0}(\frac{1}{4}x^2y+\frac{1}{27}y^3)\Big|_0^3dx=\int_{-2}^{0}(\frac{3}{4}x^2+1)dx=(\frac{3}{4}\frac{x^3}{3}+x)\Big|_{-2}^{0}=2+2=4$$

۷۲۸ـ گزینه «۳» یادآوری کنیم که: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\int_0^1 f(x)dx$. در این سؤال نیز با خارج کردن $\frac{1}{n}$ از مجموع داریم:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}}$$

بنابراین یک حد مجموع ریمانی داریم که در آن $f(x)$ چنین به‌دست می‌آید:

$$f(\frac{k}{n})=\frac{2k}{n\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}}=2\frac{k}{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}$$

پس: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x}}$ در نتیجه:

$$L=\int_0^1\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)dx=2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=2(\sqrt{2}-1)$$

۷۲۹ـ گزینه «۳» برای آن‌که توضیح مسأله ساده‌تر شود حالت $n=3$ را درنظر بگیرید.

اگر z_1 و z_2 و z_3 ریشه‌های چند جمله‌ایِ $a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0$ باشند آنگاه می‌توان نوشت:

$$a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=a_3(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=a_3[z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)z-z_1z_2z_3]$$

بنابراین:

$$z^2 \text{ ضریب } =a_2=-a_3(z_1+z_2+z_3)$$

پس مجموع ریشه‌ها برابر است با $z_1+z_2+z_3=-\frac{a_2}{a_3}$. همچنین داریم:

$$\text{جمله ثابت }=a_0=-a_3(z_1z_2z_3)$$

پس حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با $z_1z_2z_3=-\frac{a_0}{a_3}$.

نکته: در حالت کلی برای چند جمله‌ای درجه n داریم:

$$z_1+\cdots+z_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$z_1z_2\cdots z_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

۷۳۰ـ گزینه «۱» برای $|u|<1$ می‌دانیم که $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}u^n$، پس با ایجاد $(x-2)$ در مخرج کسر داریم:

$$f(x)=\frac{1}{5-x}=\frac{-1}{x-5}=\frac{-1}{(x-2)-3}\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{-3(1-\frac{x-2}{3})}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-(\frac{x-2}{3})}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x-2}{3})^n=\frac{1}{3}+\frac{(x-2)}{3^2}+\frac{(x-2)^2}{3^3}+\cdots$$

۷۳۱ـ گزینه «۱» می‌دانیم که: $f(x)=\sec hx=\frac{1}{\cosh x}=\frac{1}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{2e^x}{e^{2x}+1}$، پس داریم:

$$\Rightarrow \int \sec h\, x\, dx=\int\frac{2e^x dx}{e^{2x}+1}=\int\frac{2e^x dx}{(e^x)^2+1}=2\,tg^{-1}(e^x)+C$$

که برای محاسبه‌ی انتگرال از تغییر متغیر مقابل استفاده کرده‌ایم:

$$\begin{cases}e^x=u\\ e^x dx=du\end{cases}\Rightarrow \int\frac{2e^x dx}{(e^x)^2+1}=\int\frac{2du}{u^2+1}=2\,tg^{-1}u$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۳۲ـ گزینه «۳» در بازه‌ی $(0,1)$ داریم: $1-x^4<1-x^8<1<1+x^4$، بنابراین $\sqrt{1-x^4}<\sqrt{1-x^8}<1<\sqrt{1+x^4}$ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^4}\,dx<\int_0^1\sqrt{1-x^8}\,dx<\int_0^1 1\,dx=x\Big|_0^1=1-0=1<\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx\ \Rightarrow J<L<1<K$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۳۳ـ گزینه «۲» می‌دانیم که $(x^n)'=nx^{n-1}$ و $(a^u)'=u'a^u\text{Ln}a$، بنابراین با توجه به این قواعد داریم:

$$f(x,y)=x^{(y-y^2)}\Rightarrow\begin{cases}f_x=(y-y^2)x^{(y-y^2-1)}\\ f_y=(1-2y)x^{y-y^2}\text{Ln}x\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_x(2,2)+f_y(2,2)=(-2)2^{-3}+(-3)2^{-2}\text{Ln}2=\frac{-1}{4}-\frac{3}{4}\text{Ln}2=-\frac{1+3\text{Ln}2}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۳۴ـ گزینه «۴» به طور کلی معادله $|z-z_1|-|z-z_2|=a$ به شرطی که $|z_1-z_2|>a$ باشد نمایش‌دهنده یک هذلولی می‌باشد و اگر $|z_1-z_2|<a$ مجموعه تهی خواهد بود. حالا در مورد این سوال:

$$|z_1-z_2|=|2i-(-2i)|=|4i|=4>2\ \Rightarrow\ \text{معادله هذلولی}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۳۵ـ گزینه «۲» حد خواسته شده از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم است، لذا با استفاده از قاعده هوپیتال و مشتق‌گیری از انتگرال داریم:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(\text{arc tg}t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{1\times(\text{arc tg}x)^2}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{(\text{arc tg}x)^2}{\frac{2x}{2x}}=(\text{arc tg}\infty)^2=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۳۶ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه طبق سؤال سری داده شده همگراست، بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$، از طرفی اگر با استفاده از هم‌ارزی‌ها در بی‌نهایت سری مورد اشاره را به صورت n سری بنویسیم، باید اختلاف درجه مخرج و صورت آن بزرگتر از ۱ باشد. با فرض این که اختلاف درجه صورت و مخرج $b>1$ باشد، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n}^{3n}a_k=\lim_{n\to\infty}(n\times\lim_{n\to\infty}a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^b}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{b-1}}=0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\infty$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۳۷ـ گزینه «۴» در واقع این سؤال قسمتی از قضیه تعمیم‌یافته آزمون مشتق دوم است.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۳۸ـ گزینه «۱» ابتدا با استفاده از خواص لگاریتم، انتگرال را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$I=\int_0^2\frac{x\text{Ln}(2+x^2)}{2+x^2}dx$$

حالا با یک تغییر متغیر ساده داریم:

$$2+x^2=u\ \Rightarrow\ 2xdx=du$$

$$I=\frac{1}{2}\int_2^6\frac{\text{Ln}u}{u}du=\frac{1}{4}(\text{Ln}u)^2\Big|_2^6=\frac{1}{4}\left[(\text{Ln}6)^2-(\text{Ln}2)^2\right]=\frac{1}{4}[(\text{Ln}6)-(\text{Ln}2)][(\text{Ln}6)+(\text{Ln}2)]$$

$$=\frac{1}{4}(\text{Ln}3)(\text{Ln}12)=(\frac{1}{2}\text{Ln}3)(\frac{1}{2}\text{Ln}(4\times3))=\text{Ln}3^{\frac{1}{2}}\text{Ln}(4\times3)^{\frac{1}{2}}=\text{Ln}\sqrt{3}\,\text{Ln}(2\sqrt{3})$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۳۹ـ گزینه «۱» در واقع خواسته سؤال $\frac{dS}{dt}$ است. با توجه به این که سؤال $\frac{dV}{dt}$ را داده است، از قاعده مشتق زنجیره‌ای کمک می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dV}\times\frac{dV}{dt} \\ S=۴\pi R^{۲} \\ V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dS}{dt}=\frac{\frac{dS}{dR}}{\frac{dV}{dR}}\times\frac{dV}{dt}=\frac{۸\pi R}{۴\pi R^{۲}}\times(-۰/۳)=-۰/۶\frac{۱}{R}$$

علامت منفی نشان‌دهنده کاهش مساحت است.

۷۴۰ـ گزینه «۳» ابتدا از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{۲x+۲z_x}{x^{۲}+۲z}=(-z_x)\cos(y^{۲}-z)$$

حالا نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{۲z_y}{x^{۲}+۲z}=(۲y-z_y)\cos(y^{۲}-z)$$

با توجه به دو رابطه فوق داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{۲(x+z_x)}{-z_x}=(x^{۲}+۲z)\cos(y^{۲}-z) \\ \frac{۲z_y}{۲y-z_y}=(x^{۲}+۲z)\cos(y^{۲}-z) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۲(x+z_x)}{-z_x}=\frac{۲z_y}{۲y-z_y} \Rightarrow ۲xy-xz_y+۲yz_x-z_xz_y=-z_xz_y \Rightarrow ۲xy=xz_y-۲yz_x$$

۷۴۱ـ گزینه «۲» ابتدا طول نقاط تقاطع را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^{۲} \\ y=۴x-x^{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow x^{۲}=۴x-x^{۲} \Rightarrow x^{۲}-۲x=۰ \Rightarrow x=۰\ ,\ x=۲$$

حال با استفاده از فرمول حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود بین دو منحنی حول خط $y=k$ داریم:

$$V=\pi\left|\int_a^b\left[(y_۱-k)^{۲}-(y_۲-k)^{۲}\right]dx\right|=\pi\left|\int_۰^۲\left[(x^{۲}-۶)^{۲}-(۴x-x^{۲}-۶)^{۲}\right]dx\right|=\pi\left|\int_۰^۲(۸x^{۳}-۴۰x^{۲}+۴۸x)dx\right|$$

$$=\pi\left|(۲x^{۴}-\frac{۴۰}{۳}x^{۳}+۲۴x^{۲})\Big|_۰^۲\right|=\pi(۳۲-\frac{۳۲۰}{۳}+۹۶)=\pi(\frac{۳۸۴-۳۲۰}{۳})=\frac{۶۴\pi}{۳}$$

۷۴۲ـ گزینه «۲» صورت سؤال در واقع همان $\int_C\vec{F}.d\vec{r}$ را می‌خواهد. با توجه به اینکه منحنی بسته است، بهتر است از قضیه گرین استفاده کنیم:

$$\int_C\vec{F}.d\vec{r}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D(-۵-(-۴))dxdy=-\iint_D dxdy$$

انتگرال فوق در واقع همان مساحت بیضی است. با تبدیل معادله بیضی به فرم استاندارد داریم:

$$\frac{x^{۲}}{۹}+\frac{y^{۲}}{۱}=۱ \Rightarrow a=۳\,,b=۱ \Rightarrow S=\pi ab=۳\pi \quad \Rightarrow \quad I=-۳\pi$$

۷۴۳ـ گزینه «۴» برای آن که میدان برداری به فرم $F(x,y)=[P(x,y),Q(x,y)]$ یک میدان گرادیان (پایستار) باشد، باید $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد. در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y}=ax^{۳}+۲by \\ \frac{\partial Q}{\partial x}=۴x^{۳}+y \end{array}\right\} \xrightarrow{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}} a=۴\ ,\ b=\frac{۱}{۲}$$

۷۴۴ـ گزینه «۲» بهتر است ابتدا خود را از دست علامت قدر مطلق خلاص کنیم، ابتدا توجه کنید $x^{۲}+۲$ همواره مثبت است و لذا به راحتی از داخل قدر مطلق بیرون می‌آید و لذا داریم:

$$y=x^{۲}+۲+|۲x-۴| \Rightarrow \begin{cases} y=x^{۲}+۲+۲x-۴\ ,\ x\geq ۲ \\ y=x^{۲}+۲-۲x+۴\ ,\ x<۲ \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} x^{۲}+۲x-۲\ ;\ x\geq ۲ \\ x^{۲}-۲x+۶\ ;\ x<۲ \end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases} ۲x+۲\ ;\ x\geq ۲ \\ ۲x-۲\ ;\ x<۲ \end{cases}$$

ضابطه‌ی اول یعنی $y'=۲x+۲$ در ناحیه‌ی $x\geq ۲$ همیشه مثبت است. ضابطه‌ی دوم یعنی $y'=۲x-۲$ نیز برای $x>۱$ مثبت است. پس y' برای $x>۱$ مثبت است. بنابراین تابع y در بازه‌ی $(۱,+\infty)$ صعودی است.

توضیح: در این تست منظور طراح سؤال، اکیداً صعودی بوده است. برای آن‌که y صعودی باشد، کافیست $y'\geq ۰$ شود پس تابع y در بازه‌ی $[۱,\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(۱,\infty)$ اکیداً صعودی است.

۷۴۵ـ گزینه «۳» رمزهای ۳ حرفی را به ۴ بخش تقسیم می‌کنیم:

۱) آن‌هایی که حرف S ندارند: $4\times 3\times 2=24$

۲) آن‌هایی که فقط یک حرف S دارند: $\binom{3}{1}\times 4\times 3=36$

۳) آن‌هایی که ۲ حرف S دارند: $\binom{3}{2}\times 4=12$

۴) آن‌هایی که فقط ۳ حرف S دارد، فقط یک حالت می‌باشد.

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$24+36+12+1=\mathbf{73}$$

۷۴۶ـ گزینه «۱» ابتدا بسط داده شده را به صورت مقابل تبدیل می‌کنیم:

$$(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{\sqrt{x}})^{10}=(\frac{x^2\sqrt{x}-3}{3\sqrt{x}})^{10}=\frac{(x^{\frac{5}{2}}-3)^{10}}{3^{10}\times x^5}\qquad (*)$$

بنابراین کافیست که در بسط دو جمله‌ای $(x^{\frac{5}{2}}-3)^{10}$ ضریب جمله x^5 را بیابیم. از طرفی می‌دانیم که در بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ جمله عمومی برای $0\le k\le n$ برابر است با: $\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$

بنابراین برای یافتن ضریب جمله x^5 کافیست که در رابطه فوق $k=2$ در نظر بگیریم، لذا:

$$\text{ضریب جمله } x^5=\binom{10}{2}(x^{\frac{5}{2}})^2(-3)^{10-2}=\binom{10}{2}x^5(3)^8=\frac{10!}{2!8!}\times 3^8x^5=\frac{10\times 9}{2}\times 3^8x^5=5\times 3^{10}\times x^5$$

با جایگذاری مقدار فوق در رابطه $(*)$ داریم:

$$\text{جمله فاقد } x=\frac{5\times 3^{10}\times x^5}{3^{10}\times x^5}=5$$

۷۴۷ـ گزینه «۳» فرض کنیم $a>b>c>0$. با محاسبه حاصل ضرب‌ها داریم:

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc+x^2-(a+c)x+ac$$
$$=3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ac)=0$$

با محاسبه‌ی Δ می‌بینیم که مقدار Δ مثبت است:

$$\Delta=4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ac)=4[a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac-3ab-3ac-3bc]=4[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac]$$
$$=2[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]>0$$

بنابراین معادله دارای دو جواب حقیقی است.

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با $\frac{ab+bc+ac}{3}>0$ پس هر دو ریشه هم علامت هستند. مجموع ریشه‌ها برابر است با $\frac{2(a+b+c)}{3}>0$ پس هر دو ریشه مثبت هستند.

یادآوری: در معادله درجه دوی $Ax^2+Bx+C=0$ اگر x_1 و x_2 جواب‌ها باشند آنگاه $x_1+x_2=-\frac{B}{A}$ و $x_1x_2=\frac{C}{A}$.

روش کوتاه: از گزینه‌ها پیداست که پاسخ صحیح به مقدار a و b و c وابسته نیست فقط باید شرط $a>b>c>0$ رعایت شود پس فرض می‌کنیم $(a,b,c)=(3,2,1)$. بنابراین ریشه‌های معادله مقابل مورد نظر است:

$$(x-3)(x-2)+(x-2)(x-1)+(x-3)(x-1)=3x^2-12x+11=0$$

داریم $\Delta=(12)^2-(12)(11)=12$, $x=\frac{12\pm\sqrt{12}}{6}>0$ پس هر دو ریشه مثبت هستند.

۷۴۸ـ گزینه «۲» با یک فاکتورگیری ساده داریم:

$$S=297(0/001+0/000001+0/000000001+\cdots)=297\sum_{n=1}^{\infty}(0/001)^n$$

سری فوق یک سری هندسی نامحدود با قدر نسبت $0/001$ است. در نتیجه داریم:

$$S=297\times\frac{0/001}{1-0/001}=\frac{297}{999}=\frac{11}{37}$$

۷۴۹ـ گزینه «۳» فاصله این دو صفحه از هم، در واقع اندازه هر یال مکعب است. از طرفی با توجه به فرمول فاصله دو صفحه موازی داریم:

$$d=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|5-(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\ \Rightarrow\ V=d^3=6\sqrt{6}$$

۷۵۰ـ گزینه «۴» برای حل این تست از روش دسته‌بندی استفاده می‌کنیم:

۱) تعداد کلمات چهار حرفی که با حروف $A-A-A$ و یک حرف دیگر به جز A می‌توان نوشت برابر است با: $\binom{4}{1}\frac{4!}{3!\,1!}=4\times\frac{4\times 3!}{3!}<16$

۲) تعداد کلمات چهار حرفی که با حروف $A-A-H-H$ می‌توان نوشت: $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

۳) تعداد کلمات چهار حرفی که شامل دو حرف A و دو حرف از بین چهار حرف $H-S-M-T$، می‌باشد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\underbrace{\frac{4!}{2!}}_{\text{جایگشت حروف}}\times\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{انتخاب دو حرف از چهار حرف دیگر}}=\frac{2!\times 3\times 4}{2!}\times\frac{4!}{2!(4-2)!}=3\times 4\times\frac{2!\times 3\times 4}{2!\times 2!}=3\times 4\times 3\times 2=\mathbf{72}$$

۴) به همین طریق تعداد کلمات چهار حرفی که شامل دو حرف H و دو حرف از بین چهار حرف $A-S-M-T$ می‌باشد، نیز برابر ۷۲ به دست می‌آید.

۵) حالت آخر کلماتی هستند که با پنج حرف $S-M-T$، H و A (بدون تکرار A و H در آن‌ها) می‌توان نوشت:

□ □ □ □

$5\times 4\times 3\times 2=\mathbf{120}$

بنابراین تعداد کل حالات به صورت مقابل می‌شود: $16+6+72+72+120=286$

۷۵۱ـ گزینه «۳» می‌دانیم در بسط $(x+y+z)^n$، جمله عمومی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T=\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}x^{k_1}.y^{k_2}.z^{k_3}\quad,\quad k_1+k_2+k_3=n$$

با توجه به عبارت $(a^2-\frac{b}{3}+2)^n$، داریم $x=a^2$، $y=-\frac{b}{3}$ و $z=2$ و با توجه به توان‌ها در a^2b^2 باید توان‌ها این‌گونه باشند:

$$\begin{cases}k_1=1\\k_2=2\\k_3=n-3\end{cases}\Rightarrow T_n=\frac{n!}{1!2!(n-3)!}a^2(-\frac{b}{3})^2(2)^{n-3}$$

توضیح: دقت کنید، با توجه به این که جمله‌ی موردنظر به صورت $\frac{560a^2b^2}{3}$ می‌باشد، لذا k_1 و k_2 برابر ۱ و ۲ نوشته شدند و بنابراین با توجه به شرط $k_1+k_2+k_3=n$، داریم $1+2+k_3=n$ و لذا $k_3=n-3$ به دست آمد.

خب حالا برویم سراغ ادامه‌ی حل سؤال، با توجه به این که جمله به صورت $\frac{560a^2b^2}{3}$ داده شده، لذا داریم:

$$\frac{560a^2b^2}{3}=\frac{n!}{1\times 2\times(n-3)!}\times a^2\times\frac{b^2}{9}\times 2^{n-3}\Rightarrow\frac{560a^2b^2}{3}=\frac{(n-3)!(n-2)(n-1)(n)}{2(n-3)!}\times a^2\times\frac{b^2}{9}\times 2^{n-3}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در }3\times 2\times 9}\Rightarrow 6\times 560=(n-2)(n-1)(n)2^{n-3}\Rightarrow 5\times 6\times 7\times 2^4=(n-2)(n-1)(n)2^{n-3}$$

با مقایسه طرفین تساوی، به راحتی $n=7$ به دست می‌آید.

۷۵۲ـ گزینه «۲» ابتدا از معادله‌ی $z+\frac{4}{z}=2$ مقدار z را به‌دست آورده و بعد از نوشتن نمایش قطبی آن حاصل $z^5+(\bar{z})^5$ را می‌یابیم.

$$z+\frac{4}{z}=2\Rightarrow z^2-2z+4=0\Rightarrow z=1\pm\sqrt{3}i$$

دقت کنید، عبارت داده شده در صورت سؤال نسبت به z و $\bar{z}$ متقارن است بنابراین، فرقی نمی‌کند کدام جواب را در نظر بگیریم؛ پس به ازای $z=1+\sqrt{3}i$ جواب را پیدا می‌کنیم. در این نقطه داریم:

$$\theta=tg^{-1}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}\text{ و }r=\sqrt{1+3}=2$$

$$\left.\begin{array}{l}z=1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\rightarrow z^5=32e^{5\frac{\pi}{3}i}=32(\cos(\frac{5\pi}{3})-\sin(\frac{5\pi}{3}))=16-16\sqrt{3}i\\ \bar{z}=1-\sqrt{3}i=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow(\bar{z})^5=32e^{-5\frac{\pi}{3}i}=32[\cos(\frac{5\pi}{3})-i\sin(\frac{5\pi}{3})]=16+16\sqrt{3}i\end{array}\right\}\Rightarrow z^5+(\bar{z})^5=\mathbf{32}$$

۷۵۳ـ گزینه «۴» ابتدا ضابطه $f(\cos x)$ را می‌یابیم:

$$f(x)=2x^2-1 \rightarrow f(\cos x)=2\cos^2 x-1=2\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x \Rightarrow f(\cos x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

بنابراین ضابطه $f(f(\cos x))$ برابر است با:

$$f(f(\cos x))=f(\cos 2x)=\cos(2\times 2x)=\cos 4x$$

برای یافتن طول تقاطع با محور xها کافی است $f(f(\cos x))=0$ قرار دهیم، لذا:

$$\cos 4x=0 \Rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$$

۷۵۴ـ گزینه «۲» برای یافتن برد این تابع از نامساوی $x-1<\lfloor x\rfloor \le x$ استفاده می‌کنیم:

$$x-1<\lfloor x\rfloor\le x \Rightarrow x<\lfloor x+1\rfloor\le x+1 \Rightarrow 0<\lfloor x+1\rfloor-x\le 1$$

نامساوی فوق به صورت مقابل معکوس می‌شود:

$$1\le\frac{1}{\lfloor x+1\rfloor-x}<\infty \xrightarrow{\text{طرفین نامساوی را به توان } \frac{1}{2} \text{ می‌رسانیم}} 1\le\frac{1}{(\lfloor x+1\rfloor-x)^{\frac{1}{2}}}<\infty$$

بنابراین برد تابع داده شده برابر است با:

$$1\le(\lfloor x+1\rfloor-x)^{\frac{-1}{2}}<\infty \Rightarrow 1\le y<\infty \Rightarrow R_f=[1,+\infty)$$

۷۵۵ـ گزینه «۴» ابتدا ۴ جمله اول دنباله داده شده را به صورت زیر می‌یابیم:

$$a_1=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\ ,\ a_2=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\ ,\ a_3=\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}\ ,\ a_4=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه دوره تناوب تابع $f(x)=\cos x$ برابر 2π می‌باشد بنابراین، ۴ جمله فوق تکرار می‌شود:

$$\left\{\cos n\frac{\pi}{3}\right\}=\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\dots\right\}$$

با توجه به اینکه حاصل جمع هر ۴ جمله‌ی متوالی برابر صفر می‌باشد، بنابراین مجموع ۶۰۰ جمله اول نیز برابر صفر می‌باشد.

۷۵۶ـ گزینه «۱» همان‌گونه که می‌دانید، مشتق مرتبهٔ nاُم از الگوی مقابل پیروی می‌کند:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}$$

بنابراین مشتق مرتبه‌ی بیستم تابع $y=\frac{x}{2x-1}$ در مبدأ مختصات برابر است با:

$$y^{(20)}=\frac{(-1)^{19}2^{19}(-1-0)20!}{(2x-1)^{21}} \xrightarrow{x=0} y^{20}(0)=-2^{19}\times 20!$$

اگر فرمول یادتان نیست می‌توانید از بسط مک‌لورن $\frac{1}{1-u}$ کمک بگیرید:

$$y=\frac{x}{2x-1}=\frac{-x}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)(+2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}-2^x x^{n+1} \Rightarrow x^{20}\ \text{ضریب}\ =-2^{19}$$

$$y^{20}(0)=20!\times(x^{20}\ \text{ضریب}\ )=-2^{19}(20!)$$

۷۵۷ـ گزینه «۴» حد داده شده یک حد مبهم $\frac{0}{0}$ است، برای رفع ابهام از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که وقتی $u\to 0$ آنگاه $\sin u\sim u$، $\cos u\sim 1-\frac{u^2}{2}$ و $\operatorname{Ln}(1+u)\sim u$. در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{\operatorname{Ln}\cos(x^2-x)}\sim\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\operatorname{Ln}(1-\frac{(x^2-x)^2}{2})}\sim\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{-\frac{(x^2-x)^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-6\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x-1)^2}=\frac{-6}{(0-1)^2}=-6$$

۷۵۸ـ گزینه «۲» با توجه به تعریف ترکیب توابع، ضابطهٔ fof و fofof را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \Rightarrow (fof)(x)=f(f(x))=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x} \Rightarrow (fofof)(x)=f(fof(x))=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+1}{x}}=x$$

همانگونه که ملاحظه می‌کنید تابع f در $x=1$ و تابع fof در $x=0$ ناپیوسته است (زیرا در این نقطه تعریف نشده است). بنابراین fofof در $\{0,1\}$ ناپیوسته است، زیرا با توجه به تعریف ترکیب توابع، تابع fofof در نقاطی که f و fof ناپیوسته باشند پیوسته نیست.

۷۵۹ـ گزینه «۳» با توجه به تعریف دامنه ترکیب دو تابع داریم:

$$D_{gof^{-1}(x)}=\left\{x\in D_{f^{-1}(x)}\,\middle|\,f^{-1}(x)\in D_g\right\}$$

$$f(x)=2^x \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_2 x \Rightarrow D_{f^{-1}(x)}: x>0$$

$$g(x)=\sqrt{\sin^{-1}x} \Rightarrow D_g:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ \sin^{-1}x\ge 0\end{cases} \Rightarrow 0\le x\le 1 \Rightarrow D_{gof^{-1}(x)}=\left\{x>0\,\middle|\,0\le \log_2 x\le 1\right\}=[1,2]$$

۷۶۰ـ گزینه «۴» در واقع باید $-\frac{dx}{dy}$ را در مبدأ مختصات که در بازه داده شده معادل $t=\frac{\pi}{2}$ است، به دست آوریم:

$$m'=-\frac{dx}{dy}=-\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=-\frac{-2\sin 2t}{2\cos 2t}=tg2t \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}} m'=tg\pi=0$$

۷۶۱ـ گزینه «۱» اگر معادله خط مجانب را به صورت $y=mx+n$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2xe^{\frac{1}{x}}}{x}=2e^0=2 \quad , \quad n=\lim_{x\to\pm\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}(2xe^{\frac{1}{x}}-2x)=\lim_{x\to\pm\infty}2x(e^{\frac{1}{x}}-1)$$

از طرفی با توجه به این که وقتی $x\to\pm\infty$ ، $\frac{1}{x}\to 0$ پس با استفاده از هم ارزی در صفر داریم:

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}2x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to\pm\infty}2x(1+\frac{1}{x}-1)=2 \Rightarrow y-2x+2=0 \Rightarrow d=\frac{|1\times 0-2\times 0+2|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

۷۶۲ـ گزینه «۲» با توجه به فرمول مساحت داریم:

$$S=\left|\int_a^b ydx\right|$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+16}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+16}-\sqrt{x})(\sqrt{x+16}+\sqrt{x})}=\frac{\sqrt{x+16}+\sqrt{x}}{x+16-x}=\frac{1}{16}(\sqrt{x+16}+\sqrt{x})$$

$$\xrightarrow{y>0} S=\int_0^9\frac{1}{16}(\sqrt{x+16}+\sqrt{x})dx=\frac{1}{16}\times\frac{2}{3}((x+16)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}})\Big|_0^9=\frac{1}{24}((5^3+3^3)-(4^3+0))=\frac{88}{24}=\frac{11}{3}$$

۷۶۳ـ گزینه «۴» با توجه به فرمول حجم مکعبی به ضلع x و اینکه خطای اندازه‌گیری در واقع همان دیفرانسیل متغیر است، داریم:

$$V=x^3 \Rightarrow dv=3x^2dx \Rightarrow dv=3(16)^2(0/01)=7/68$$

۷۶۴ـ گزینه «۳» بردار نرمال صفحه قائم بر فصل مشترک دو رویه، از ضرب خارجی بردارهای گرادیان آن رویه‌ها در نقطه‌ی مورد نظر روی منحنی فصل مشترک به دست می‌آید. در نتیجه با فرض $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9=0$ و $g(x,y,z)=x-2y+z-7=0$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}f(x,y,z)=(2x,2y,2z) \Rightarrow \vec{\nabla}f(1,-2,2)=(2,-4,4)\\ \vec{\nabla}g(x,y,z)=(1,-2,1) \Rightarrow \vec{\nabla}f(1,-2,2)=(1,-2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}=(4,2,0)$$

$$\Rightarrow 4(x-1)+2(y+2)=0 \Rightarrow 2x+y=0$$

(البته اگر از همان اول توجه داشته باشید، خواهید دید که در بین گزینه‌ها نیز فقط گزینه (۳) بر صفحه $x-2y+z=7$ عمود است)

۷۶۵ـ گزینه «۱» با توجه به وجود عامل x^2+y^2 و z بهتر است از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}z=x^2+y^2=r^2\\ z=\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)=\frac{1}{2}(r^2+1)\end{array}\right\}\Rightarrow r^2=\frac{1}{2}(r^2+1) \Rightarrow r=1$$

یعنی تصویر ناحیه انتگرال‌گیری روی صفحه xoy یک دایره به شعاع ۱ است. در نتیجه:

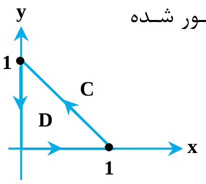
$$V=\iiint_D dv=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\frac{1}{2}(r^2+1)}rdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r^2)drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\frac{r-r^3}{2})dr=\frac{2\pi}{2}(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4})\Big|_0^1=\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{\pi}{4}$$

۷۶۶- گزینه «۳» توجه داشته باشید که می‌توان ابتدا فرم نمایی $\sinh x$ را جایگزین کرد، سپس از تابع نمایی حاصل چهار مرتبه مشتق بگیریم. یعنی:

$$y=e^{2x}\sinh x=e^{2x}\times\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}(e^{3x}-e^{x})\Rightarrow y'=\frac{1}{2}(3e^{3x}-e^{x})\Rightarrow y''=\frac{1}{2}(9e^{3x}-e^{x})$$

$$\Rightarrow y'''=\frac{1}{2}(27e^{3x}-e^{x})\Rightarrow y^{(4)}=\frac{1}{2}(81e^{3x}-e^{x})\xrightarrow{x=0}y^{(4)}(0)=\frac{1}{2}(81-1)=40$$

۷۶۷ـ گزینه «۴» منحنی C یک منحنی بسته است بنابراین، از قضیه‌ی گرین استفاده کنیم. طبق این قضیه اگر D ناحیه محصور شده توسط منحنی C باشد، داریم:

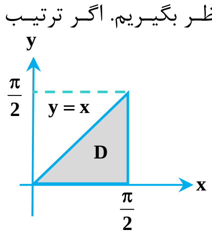


$$\oint_C Pdx+Qd_y=\iint_D(Q_x-P_y)dydx$$

$$\oint_C x^4dx+xy\,dy=\iint_D(y-0)dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x}y\,dy\,dx=\int_0^1\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{1-x}dx=\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)^2dx=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(1-x)^3\Big|_0^1=0+\frac{1}{6}$$

توضیح درباره‌ی حدود انتگرال: خطی که از نقاط $(1,0)$ و $(0,1)$ می‌گذرد، خط $x+y=1$ است. بنابراین در ناحیه D داریم $0\le x\le 1$ و اگر در امتداد محور yها از ناحیه D عبور کنیم خط $y=0$ مرز ورودی و $y=1-x$ مرز خروجی است.

۷۶۸ـ گزینه «۴» انتگرال $\int\frac{\cos x}{x}dx$ لاینحل است یا مشکل حل می‌شود. با عوض کردن ترتیب متغیرها انتگرال ساده‌تری به‌دست می‌آید. ابتدا با استفاده از کران‌های داده شده ناحیه انتگرال‌گیری (D) را تشخیص دهیم. خطوط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=y$ هم‌چنین شرط $0\le y\le\frac{\pi}{2}$ را در نظر بگیریم. اگر ترتیب متغیرها را عوض کنیم.



ابتدا برای x داریم $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ و سپس با حرکت از پایین به بالا، مرز ورودی $y=0$ و مرز خروجی $y=x$ است.

$$\text{جواب}=\iint_R\frac{\cos x}{x}dydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}\frac{\cos x}{x}dy\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}(y)\Big|_0^{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

۷۶۹ـ گزینه «۲» اگر صورت کسر را برحسب (x^2+3) و $(3x^2+1)$ بنویسیم، تفکیک کسر عبارت زیر انتگرال ساده‌تر می‌شود:

$$\frac{x^2+1}{(x^2+3)(3x^2+1)}=\frac{(3x^2+1)+(x^2+3)}{(x^2+3)(3x^2+1)}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{3x^2+1}\right)$$

بنابراین انتگرال داده شده برابر است با:

$$I=\int_0^1\frac{(x^2+1)dx}{(x^2+3)(3x^2+1)}=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{3x^2+1}\right)dx=\frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}tg^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3}tg^{-1}\sqrt{3}x\right]\Big|_0^1$$

$$I=\frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}tg^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}tg^{-1}\sqrt{3}\right]=\frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow I=\frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\sqrt{3}}{24}$$

برای حل هر دو انتگرال از فرمول $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}tg^{-1}(\frac{u}{a})$ استفاده کرده‌ایم.

۷۷۰ـ گزینه «۲» نمودار $y=f(x)$ نسبت به خط $x=a$ تقارن دارد، به شرط آن‌که $f(a+x)=f(a-x)$ باشد. این تساوی را می‌توان به صورت $f(2a-x)=f(x)$ هم نوشت:

$$f(2a-x)=f(x)\Rightarrow\sqrt[3]{(2a-x)}-\sqrt[3]{(2a-x+2)}=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+2}$$

با امتحان‌کردن گزینه‌ها متوجه می‌شویم که این تساوی برای $a=-1$ برقرار است:

$$\sqrt[3]{-2-x}-\sqrt[3]{-2-x+2}=\sqrt[3]{-(x+2)}-\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+2}$$

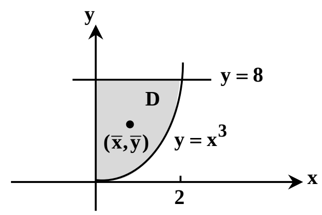
پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

روش تستی: راه حل تستی استفاده از حذف گزینه است، برای این کار نقطه‌ای دلخواه مانند $(-1,-2)$ از نمودار f را در نظر می‌گیریم، اگر نمودار f نسبت به خط $x=-2$ قرینه باشد، باید $(-3,2)$ در معادله‌ی f صدق کند که این طور نیست، بنابراین گزینه‌ی (۱) حذف می‌شود.

اگر نمودار f نسبت به خط $x=1$ قرینه باشد، باید $(3,-2)$ در معادله‌ی f صدق کند که نمی‌کند، در نتیجه گزینه‌ی (۳) نیز حذف می‌شود.

تقارن نسبت به $y=x$ یعنی اینکه معکوس تابع f، خودش است و چون f همواره پیوسته است بنابراین، نمودار f باید از مبدأ مختصات بگذرد که نمی‌گذرد. پس گزینه‌ی (۴) هم حذف می‌شود.

با حذف گزینه‌های غلط به گزینه‌ی صحیح یعنی گزینه‌ی (۲) می‌رسیم.



۷۷۱ـ گزینه «۳» فرض می‌کنیم $(\bar{x},\bar{y})$ مرکز ثقل این ناحیه باشد. فاصله‌ی مرکز ثقل تا محور yها برابر با $\bar{x}$ است. طبق فرمول داریم:

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,dydx}{\iint_D dydx}$$

منحنی $y=x^۳$ و خط $y=۸$ در نقطه‌ای به طول $x=۲$ با هم برخورد می‌کنند، پس در ناحیه‌ی D داریم $۰\le x\le ۲$ و اگر از پایین به بالا حرکت کنیم $y=x^۳$ مرز ورودی و $y=۸$ مرز خروجی است.

$$\bar{x}=\frac{\int_۰^۲\int_{x^۳}^۸ x\,dydx}{\int_۰^۲\int_{x^۳}^۸ dydx}=\frac{\int_۰^۲[xy]_{x^۳}^۸\,dx}{\int_۰^۲[y]_{x^۳}^۸\,dx}\Rightarrow \bar{x}=\frac{\int_۰^۲(۸x-x^۴)dx}{\int_۰^۲(۸-x^۳)dx}=\frac{[۴x^۲-\frac{x^۵}{۵}]_۰^۲}{[۸x-\frac{x^۴}{۴}]_۰^۲}\Rightarrow \bar{x}=\frac{۴۸}{۶۰}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

۷۷۲ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. [طراح سؤال در محاسبه جواب اشتباه کرده و گزینه (۴) را صحیح اعلام کرده است که نادرست است.]

حروف این کلمه عبارتند از EEE، F، R، C، I، NN. بنابراین ۶ حرف متمایز داریم که حرف E دارای ۳ تکرار و حرف N دارای ۲ تکرار است. رمزهای ۳ حرفی را به این صورت دسته‌بندی می‌کنیم:

دسته اول: رمزهای ۳ حرفی بدون تکرار حروف که تعداد آن‌ها برابر است با جایگشت ۳ حرف از ۶ حرف متمایز:

$$\binom{۶}{۳}\times ۳!=\frac{۶!}{۳!}=۴\times۵\times۶=۱۲۰$$

دسته دوم: رمزهای ۳ حرفی فقط با دو حرف تکراری که آن ۲ حرف تکراری ممکن است EE یا NN باشند و در کنار آنها یک حرف متمایز از ۵ حرف قرار می‌گیرد:

$$۲\times\binom{۵}{۱}\times\frac{۳!}{۲!}=۲\times۵\times۳=۳۰$$

دسته سوم: فقط یک رمز به صورت EEE می‌توان نوشت که همه‌ی حروف آن تکراری هستند.

$$\text{جواب}=۱۲۰+۳۰+۱=۱۵۱$$

۷۷۳ـ گزینه «۴» با استفاده از مثال نقض به راحتی نادرست بودن گزینه (۴) معلوم می‌شود. مثلاً به ازای $x=-۲/۵$ داریم:

$$\lfloor|-۲/۵|\rfloor=\lfloor ۲/۵\rfloor=۲\ ,\ |[-۲/۵]|=|-۳|=۳$$

۷۷۴ـ گزینه «۱» اگر نمودار $y=f(x)$ را به اندازه‌ی (a,b) انتقال دهیم خواهیم داشت:

$$y-b=f(x-a)\Rightarrow y=f(x-a)+b$$

طبق صورت سؤال داریم:

$$f(x-a)+b=g(x)\Rightarrow (x-a)^۲-۲(x-a)+b=x^۲+۴x\Rightarrow x^۲-(۲a+۲)x+(a^۲+۲a+b)=x^۲+۴x$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}-(۲a+۲)=۴\Rightarrow a=-۳\\ a^۲+۲a+b=۰\Rightarrow b=-۳\end{cases}$$

پس هر نقطه‌ای به اندازه‌ی $(-۳,-۳)$ انتقال پیدا می‌کند.

به ازای $x=۳$ در تابع $f(x)$ داریم $y=۹-۶=۳$ پس از انتقال، نقطه‌ی $(۳,۳)$ به نقطه‌ی $(۰,۰)$ تبدیل می‌شود.

۷۷۵ـ گزینه «۴» می‌دانیم در این‌گونه مسائل ابتدا باید یک تابع مناسب تعریف کنیم و بعد با استفاده از فرمول $f(x)\simeq f(x_۰)+f'(x_۰).dx$ مقدار تقریبی را پیدا کنیم، تابع مناسب برای این سؤال $f(x)=\text{Arctg}\sqrt{x}$ است:

$$f(x)=\text{Arctg}\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۱+x}\ ,\ x=۱/۰۲\ ,\ x_۰=۱\Rightarrow \Delta x=۰/۰۲$$

$$\text{Arctg}\sqrt{۱/۰۲}\simeq(\text{Arctg}۱)+(\frac{۱}{۴})(۰/۰۲)=\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲۰۰}=\frac{\pi}{۴}+۰/۰۰۵\Rightarrow \text{Arctg}\sqrt{۱/۰۲}-\frac{\pi}{۴}\simeq ۰/۰۰۵$$

۷۷۶ـ گزینه «۱» اگر ضابطه‌ی یک تابع برحسب $(x-a)^۲$ نوشته شود، خط $x=a$ محور تقارن آن است. در این سؤال با استفاده از اتحادها داریم:

$$f(x)=\frac{۲(x^۲+۲x+۱)+۳}{-(x^۲+۲x+۱)+۴}\Rightarrow f(x)=\frac{۲(x+۱)^۲+۳}{-(x+۱)^۲+۴}$$

پس خط $x=-۱$ محور تقارن $f(x)$ است. در واقع برای اطمینان از این مطلب می‌توانید $f(-۱+x)$ و $f(-۱-x)$ را محاسبه کنید:

$$f(-۱\pm x)=\frac{۲(-۱\pm x+۱)^۲+۳}{-(-۱\pm x+۱)^۲+۴}=\frac{۲x^۲+۳}{-x^۲+۴}$$

می‌بینیم که $f(-۱+x)=f(-۱-x)$ پس، $x=-۱$ محور تقارن است. حالا با برخورد دادن خط $x=-۱$ و تابع $y=f(x)$ داریم:

$$x=-۱\Rightarrow y=\frac{۲(۰)^۲+۳}{-(۰)^۲+۴}=\frac{۳}{۴}$$

۷۷۷ـ گزینه «۳» با جایگذاری $x=1$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^{16}-16}{x-1}=\frac{1+1+\cdots+1-16}{1-1}=\frac{0}{0}$$

از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\text{جواب حد}=\lim_{x\to 1}\frac{1+2x+3x^2+\cdots+16x^{15}}{1}=1+2+3+\cdots+16=\frac{16\times 17}{2}=136$$

۷۷۸ـ گزینه «۱» تابع $g(x)=Ln(x+\sqrt{x^2+1})$ در واقع، تابع معکوسِ $f(x)=\sinh x$ است. $\sinh x$ فرد است بنابراین معکوس آن هم فرد است. حدود انتگرال هم قرینه هستند. در نتیجه:

$$\int_{-1}^{1}Ln(x+\sqrt{x^2+1})dx=0$$

۷۷۹ـ گزینه «۱» معادله را به‌صورت $r\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=1$ می‌نویسیم. می‌دانیم که $r\sin\theta=y$ و $r\cos\theta=x$ است. با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی داریم:

$$\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)\Rightarrow r\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(r\sin\theta+r\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}(y+x)=1\Rightarrow y=\sqrt{2}-x$$

پس این معادله مربوط به خطی با شیب $m=-1$ است.

۷۸۰ـ گزینه «۳» ابتدا مشتقات جزئی z را در این نقطه به‌دست می‌آوریم:

$$z_x=\frac{1}{3}(4x)(2x^2+y^2+5y)^{-\frac{2}{3}}=\frac{20}{3}\times(64)^{-\frac{2}{3}}=\frac{20}{3}\times\frac{1}{16}=\frac{5}{12}$$

$$z_y=\frac{1}{3}(2y+5)(2x^2+y^2+5y)^{-\frac{2}{3}}=\frac{9}{3}\times(64)^{-\frac{2}{3}}=3\times\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$$

دیفرانسیل کامل یا همان دیفرانسیل کل به این صورت به‌دست می آید:

$$dz=z_xdx+z_ydy=\frac{5}{12}\times 0/15+\frac{3}{16}(-0/2)=\frac{12}{480}=0/025$$

۷۸۱ـ گزینه «۴» شیب خط مماس در هر نقطه از منحنی برابر با y' است.

$$m=y'=\frac{(\frac{2x}{1+x^2})'}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\Rightarrow m=\frac{\frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}$$

بدون آن‌که وقت زیادی صرف ساده‌کردن عبارات کنیم، $x=\frac{3}{4}$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$m=\frac{\frac{2\times 7\times 16}{25^2}}{\sqrt{1-(\frac{24}{25})^2}}$$

در عبارت زیر رادیکال با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$1-\frac{24^2}{25^2}=\frac{25^2-24^2}{25^2}=\frac{(25-24)(25+24)}{25^2}=\frac{49}{25^2}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$m=\frac{\frac{2\times 7\times 16}{25^2}}{\frac{7}{25}}=\frac{2\times 16}{25}=\frac{32}{25}$$

۷۸۲ـ گزینه «۲» طبق صورت سؤال $\vec{r}=(x,y,z)$ پس $|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ است. در نتیجه:

$$f(x,y,z)=\frac{1}{|\vec{r}|}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

بردار گرادیان f را حساب می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}f=(f_x,f_y,f_z)$$

$$f_x=-\frac{1}{2}(2x)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}=-x|\vec{r}|^{-3}$$

به همین ترتیب $f_y=-y|\vec{r}|^{-3}$ و $f_z=-z|\vec{r}|^{3}$ به صورت مشابه به دست می‌آیند و با جایگذاری آن‌ها داریم:

$$\vec{\nabla}f=(-x|\vec{r}|^{-3}\ ,\ -y|\vec{r}|^{-3}\ ,\ -z|\vec{r}|^{-3})=-\frac{1}{|\vec{r}|^3}(x,y,z)=-\frac{1}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

۷۸۳ـ گزینه «۳»

$$y=\cosh^{-۱}(\frac{x-۲}{۲}) \Rightarrow \cosh y=\frac{x-۲}{۲} \Rightarrow x=۲+۲\cosh y \Rightarrow f^{-۱}(x)=۲+۲\cosh x=۲+e^{x}+e^{-x}=\frac{(e^{x}+۱)^{۲}}{e^{x}}$$

۷۸۴ـ گزینه «۴»

$$f(x)=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}+x^{۴}+\frac{۱}{x^{۴}}$$

$$x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=(x+\frac{۱}{x})^{۲}-۲(x)(\frac{۱}{x})=۳^{۲}-۲=۷ \Rightarrow x^{۴}+\frac{۱}{x^{۴}}=(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}})^{۲}-۲(x^{۲})(\frac{۱}{x^{۲}})=۷^{۲}-۲=۴۷ \Rightarrow f(x)=۷+۴۷=۵۴$$

۷۸۵ـ گزینه «۲» با یک مشتق مرتبه دوم از یک تابع پارامتری روبرو هستیم. ابتدا $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-۲t}{۲\sqrt{۱-t^{۲}}}}{\frac{۱}{\sqrt{۱-t^{۲}}}}=-t \Rightarrow \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-۱}{\frac{۱}{\sqrt{۱-t^{۲}}}}=-\sqrt{۱-t^{۲}} \xrightarrow{t=\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \left.\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right|_{t=\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=-\sqrt{۱-\frac{۳}{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

۷۸۶ـ گزینه «۲» با توجه به این‌که منحنی داده شده در این بازه فاقد صفر و قطب است، داریم:

$$S=\left|\int_{۱}^{۳}\frac{۲x-۱}{x^{۲}-۲x+۵}dx\right|=\left|\int_{۱}^{۳}\frac{۲(x-۱)+۱}{(x-۱)^{۲}+۴}dx\right|=\left|\int_{۱}^{۳}\frac{۲(x-۱)dx}{(x-۱)^{۲}+۴}+\int_{۱}^{۳}\frac{dx}{(x-۱)^{۲}+۴}\right|$$

$$=\left|Ln\left[(x-۱)^{۲}+۴\right]\Big]_{۱}^{۳}+\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\frac{x-۱}{۲})\Big|_{۱}^{۳}\right|=Ln\left[\frac{۲^{۲}+۴}{۰+۴}\right]+\frac{۱}{۲}(tg^{-۱}۱-tg^{-۱}۰=Ln۲+\frac{\pi}{۸}$$

۷۸۷ـ گزینه «۴» با استفاده از فرمول حجم حادث از دوران سطح بین یک منحنی پارامتری و محور xها، خواهیم داشت:

$$V=\pi\int_{t_۱}^{t_۲}y^{۲}(t)x'(t)dt=\pi\int_{۰}^{۱}(t^{۲}-t)^{۲}(۲t+۱)dt=\pi\int_{۰}^{۱}(۲t^{۵}-۳t^{۴}+t^{۲})dt=\pi(\frac{t^{۶}}{۳}-\frac{۳t^{۵}}{۵}+\frac{t^{۳}}{۳})\Big|_{۰}^{۱}=\frac{\pi}{۱۵}$$

۷۸۸ـ گزینه «۲» واضح است که سری داده شده در واقع همان بسط مک‌لورن تابع e^{x} است. بنابراین به سادگی داریم:

$$f(x)=e^{x} \Rightarrow f'(x)=e^{x} \rightarrow f'(۱)=e$$

البته اگر نکته بالا را ندانید هم می‌توان به پاسخ رسید، به این صورت که:

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!} \Rightarrow f'(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{nx^{n-۱}}{n!}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^{n-۱}}{(n-۱)!}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!} \Rightarrow f'(x)=f(x) \Rightarrow f(x)=ce^{x}$$

حالا برای به دست آوردن ضریب ثابت c ابتدا بسط تابع را باز می‌کنیم:

$$f(x)=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!} \Rightarrow f(۰)=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۰^{n}}{n!}=۱ \Rightarrow f(۰)=ce^{۰}=۱ \Rightarrow c=۱ \Rightarrow f(x)=e^{x}$$

با این روش نیز به نتیجه روش قبلی رسیدیم.

۷۸۹ـ گزینه «۳»

روش اول: با قرار دادن $x=۰$ در کسر به فرم مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۴]{x^{۴}+۱}-\sqrt{x^{۲}+۱}}{x^{۲}}=\frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ با استفاده از قضیه هوپیتال از صورت و مخرج مشتق می‌گیریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۴]{x^{۴}+۱}-\sqrt{x^{۲}+۱}}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{(x^{۴}+۱)^{\frac{۱}{۴}}-(x^{۲}+۱)^{\frac{۱}{۲}}}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x^{۳}}{\sqrt[۴]{(x^{۴}+۱)^{۳}}}-\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}}{۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x^{۲}}{\sqrt[۴]{(x^{۴}+۱)^{۳}}}-\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}}{۲}=\frac{۰-۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

روش دوم: از هم‌ارزی $\sqrt[n]{۱+u}\simeq ۱+\frac{u}{n}$ استفاده می‌کنیم:

$$\text{جواب حد}\simeq\lim_{x\to ۰}\frac{۱+\frac{۱}{۴}x^{۴}-۱-\frac{۱}{۲}x^{۲}}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}(\frac{۱}{۴}x^{۲}-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲}$$

۷۹۰ـ گزینه «۴» با توجه به آن‌که $\text{Ln}(0^+) = -\infty$ است، هر جا که عبارت داخل Ln مقدارش صفر باشد یک مجانب قائم خواهیم داشت:

$$8x - x^2 = 0 \Rightarrow x(8-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ و } x = 8$$

با جایگذاری $x=0$ و $x=8$ در معادله‌ی خط $y = 2x - 5$ نقاط $A(0,-5)$ و $B(8,11)$ به‌دست می‌آیند.

$$\text{فاصله A و B} = \sqrt{(0-8)^2 + (-5-11)^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = \sqrt{8^2(1+2^2)} = 8\sqrt{5}$$

۷۹۱ـ گزینه «۳»

روش اول: شرط سازگار بودن آن است که دترمینان ماتریس به دست آمده از ضرایب دستگاه و مقادیر ثابت آن صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(-4-4) + 1(-2-4a) + 3(1-2a) = 0 \Rightarrow -15 - 10a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

روش دوم: ابتدا با استفاده از دو معادله اول مقادیر x و y را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 6 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 5x + 10 = 0 \Rightarrow x = -2 \xrightarrow{\text{از معادله دوم داریم}} -2 + 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -1$$

با جایگذاری مقادیر فوق در معادله سوم داریم:

$$ax + y - 2 = 0 \xrightarrow[y=-1]{x=-2} -2a - 1 - 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۷۹۲ـ گزینه «۲» فاصله مرکز ثقل از محور yها همان طول مرکز ثقل یعنی $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$ می‌باشد. در ربع اول از دایره‌ی واحد داریم $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ و $0 \le r \le 1$.

$$\text{جرم} = M = \iint_D \rho dA = \iint x^2 y dx dy \xrightarrow{\text{مختصات قطبی}} M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cos^2\theta . r\sin\theta . r dr d\theta$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta . \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^1 r^4 dr\right) = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta . \sin\theta d\theta = \frac{1}{5}\left(\frac{-\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{15}$$

$$M_y = \iint_D x\rho dA = \iint_D x^3 y dx dy \xrightarrow{\text{مختصات قطبی}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \cos^3\theta . r\sin\theta . r dr d\theta$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta . \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^1 r^5 dr\right) = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta . \sin\theta d\theta = \frac{1}{6}\left(\frac{-\cos^4\theta}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{24} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{15}} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

۷۹۳ـ گزینه «۱» حجم حاصل از دوران شکل محدود به منحنی $x = g(y)$، محور oy و دو خط $y = a$ و $y = b$ حول محور yها برابر است با:

$$V = \pi\int_a^b x^2 dy$$

در این مثال یکی از حدود y به صورت $y = \frac{3}{2}$ داده شده است. روی محور yها هم داریم $x = 0$ یعنی $y = -\frac{1}{2}$. پس داریم:

$$V = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2 dy$$

از رابطه داده شده داریم:

$$x = \sqrt{1+2y} \Rightarrow x^2 = |1+2y| = 1+2y$$

در بازه‌ی $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{3}{2}$ علامت $1+2y$ مثبت است.

$$V = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (1+2y) dy = \pi(y^2 + y)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \Rightarrow V = \pi\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = 4\pi$$

۷۹۴ـ گزینه «۳» به کمک نمودار وِن و قوانین نظریه مجموعه‌ها داریم:

$$\begin{cases} (A\cup B')' = A'\cap B = B\cap A' = B - A & \text{طبق قانون دمورگان} \\ A\Delta B = (A-B)\cup(B-A) = (A\cup B) - (A\cap B) & \text{تعریف تفاضل متقارن} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A\cup B')' \cup (A-B) \cup (A\cap B) = (A\Delta B)\cup(A\cap B) = A\cup B$$

۷۹۵ـ گزینه «۱» می‌دانیم که:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

در نتیجه:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) = e - \frac{5}{2}$$

۷۹۶ـ گزینه «۴» با انتخاب $x_۰ = ۲$ ، مقدار تابع برابر $\sqrt{۳}\,tg^{-۱}\sqrt{۴-۱} = \frac{\pi\sqrt{۳}}{۳}$ خواهد بود. بنابراین سؤال همان مقدار df را در این نقطه می‌خواهد:

$$dx \approx \Delta x = x - x_۰ = ۲/۰۳ - ۲ = ۰/۰۳$$

$$df = f'(x_۰)dx \approx \sqrt{۳}\,\frac{\frac{۲}{۲\sqrt{۲x-۱}}}{۱+(\sqrt{۲x-۱})^۲}\,\Delta x = \sqrt{۳}\,\frac{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}{۱+۳}(۰/۰۳) = ۰/۰۰۷۵$$

۷۹۷ـ گزینه «۴» برای آن که یک دستگاه معادلات سازگار باشد، لازم است دترمینان ماتریس ضرایب، صفر باشد و همچنین اگر ستون مقادیر را جایگزین هر ستون (مثلاً آخرین ستون) ماتریس ضرایب کنیم نیز دترمینان ماتریس صفر می‌شود. پس:

$$\begin{vmatrix} a & ۳ & ۰ \\ ۱ & -a & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = ۰ \ \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} a & ۳ & ۷ \\ ۱ & -a & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۸ \end{vmatrix} = a(-۸a-۱) - ۳(۸-۳) + ۷(۱+۳a) = -۸a^۲ + ۲۰a - ۸ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۷۹۸ـ گزینه «۳» با توجه به آزمون مقایسه داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{n}+Ln\,n} < \frac{۱}{\sqrt{n}}$$

بنابراین $\sum \frac{۱}{\sqrt{n}+Ln\,n}$ واگراست، لذا $e^x - ۱ < ۱$ که نتیجه می‌دهد:

$$e^x < ۲ \Rightarrow x < Ln\,۲ \Rightarrow (-\infty, Ln\,۲) = \text{بازه همگرایی}$$

۷۹۹ـ گزینه «۳» به راحتی می‌توان فهمید که $R_۳ = \frac{۳}{۲}R_۱$. از طرفی سطرهای اول و دوم مستقل خطی هستند، پس:

$$RANK(A) = ۲$$

۸۰۰- گزینه «۲» در این سؤال با تابع $f(x,y) = Ln\sqrt{x^۲+y^۲} = \frac{۱}{۲}Ln(x^۲+y^۲)$ و مقدار تقریبی آن در نقطه‌ی $(x,y) = (۳/۰۲, ۰/۹۷)$ سروکار داریم.

در واقع خواسته سؤال مقدار تقریبی دیفرانسیل تابع در این نقطه نسبت به $(x_۰, y_۰) = (۳,۱)$ است. پس داریم:

$$x = x_۰ + \Delta x = ۳/۰۲ \Rightarrow \Delta x = ۰/۰۲ \ , \ y = y_۰ + \Delta y = ۰/۹۷ \Rightarrow \Delta x = -۰/۰۳$$

$$Ln\sqrt{(۳/۰۲)^۲ + (۰/۹۷)^۲} - Ln\sqrt{(۳)^۲+(۱)^۲} \approx f_x(x_۰, y_۰)\Delta x + f_y(x_۰, y_۰)\Delta y$$

$$= \frac{x_۰}{x_۰^۲+y_۰^۲}\Delta x + \frac{y_۰}{x_۰^۲+y_۰^۲}\Delta y = \frac{۳}{۳^۲+۱^۲}(۰/۰۲) + \frac{۱}{۳^۲+۱^۲}(-۰/۰۳) = \frac{۰/۰۶-۰/۰۳}{۱۰} = ۰/۰۰۳$$

۸۰۱ـ گزینه «۲» ابتدا معادله داده شده را به صورت $f(x) = ۲xe^x - x - ۱ = ۰$ می‌نویسیم. تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[۰,۱]$ پیوسته و در $(۰,۱)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\begin{cases} f(۰) = -۱ < ۰ \\ f(۱) = ۲e - ۲ > ۰ \end{cases} \Rightarrow f(۰)f(۱) < ۰$$

طبق قضیه مقدار میانی $f(x) = ۰$ حداقل یک ریشه در بازه $[۰,۱]$ دارد. از طرفی با محاسبه $f'(x)$ داریم:

$$f'(x) = ۲e^x + ۲xe^x - ۱$$

با توجه به این که به ازای $۰ < x < ۱$ همواره $f'(x) > ۰$ است، بنابراین تابع $f(x)$ در این بازه اکیداً صعودی است.

پس می‌گوییم تابع $f(x)$ در بازه $[۰,۱]$ دقیقاً یک ریشه دارد.

۸۰۲ـ گزینه «۱» با توجه به این که $۰ \le x - [x] < ۱$ می‌باشد و جزءصحیح این عبارت همواره برابر صفر است، تابع $f(x) = [x - [x]]$ یک تابع هم زوج و هم فرد است.

چرا که اگر $f(x) = ۰$ بشود این تابع یک تابع هم زوج و هم فرد است (توجه داشته باشید که دامنه تابع باید متقارن باشد تا بتوانیم راجع به زوج و فرد بودن تابع صحبت کنیم). در این مثال دامنه تابع برابر R می‌باشد و این یعنی دامنه تابع متقارن است.

۸۰۳ـ گزینه «۳» تابع داده شده را ابتدا به صورت مربع کامل می‌نویسیم و سپس برد را به دست می‌آوریم:

$$y = x - \sqrt{x} \Rightarrow y = (\sqrt{x} - \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴}$$

عبارت $(\sqrt{x} - \frac{۱}{۲})^۲$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است که اگر به نامساوی بزرگ‌تر یا مساوی صفر $(-\frac{۱}{۴})$ را اضافه کنیم برد تابع $[-\frac{۱}{۴}, +\infty)$ می‌باشد.

۸۰۴ـ گزینه «۲» اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد که طبق قضیه همیلتون در معادله‌ی مشخصه $a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$ صدق کند یعنی داشته باشیم: $a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0=0$ همواره داریم $tr(A)=\frac{-a_{n-1}}{a_0}$ و $\det(A)=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$. پس در این مثال چون x^4 نداریم پس $a_4=0$ می‌باشد و $a_5=1$ و $a_0=8$ می‌باشند و داریم:

$$\det(A)=(-1)^5\times\frac{8}{1}=-8\quad,\quad tr(A)=-(\frac{0}{8})=0$$

پس حاصل $\det(A)-tr(A)$ برابر است با:

$$-8-0=-8$$

۸۰۵ـ گزینه «۳» با استفاده از فرمول مشتق تابع پارامتری داریم:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+tg^2t}{(\sec t)(tgt)}=\frac{\sec^2 t}{(\sec t)(tgt)}=\frac{\sec t}{tgt}=\frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin t}{\cos t}}=\frac{1}{\sin t}=\csc t$$

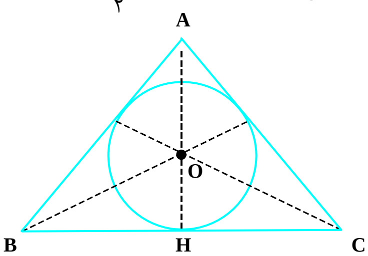
اکنون دوباره از $\csc t$ باید نسبت به x مشتق بگیریم، ولی چون $\csc t$ برحسب t می‌باشد، دوباره باید مشتق پارامتری بگیریم، یعنی در مخرج کسر هم از x نسبت به t مشتق می‌گیریم.

$$y''_{x,x}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{(-\csc t)(\cot t)}{(\sec t)(tgt)}=\frac{-\cos^3 t}{\sin^3 t}=-\cot^3 t$$

در مرتبه سوم نیز دوباره باید مشتق پارامتری بگیریم. از عامل $(-\cot^3 t)$ و داریم:

$$y'''_{x,x,x}=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}(y''_{x,x})=\frac{3\cot^2 t(1+\cot^2 t)}{\sec t(tgt)}\xrightarrow{t=\frac{\pi}{4}}\frac{3(1+1)}{\sqrt{2}\times 1}=\frac{3\times 2}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

۸۰۶ـ گزینه «۳» در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a مساحت مثلث همواره برابر است با $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ و ارتفاع مثلث برابر است با $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



در مثلث متساوی‌الاضلاع همچنین میانه و ارتفاع و نیمسازها بر هم منطبق هستند.

در هر مثلث میانه‌های مثلث همدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که فاصله‌ی این نقطه تا ضلع مقابل به هر رأس نسبتش به فاصله‌ی این نقطه تا رأس ۱ به ۲ می‌باشد. پس داریم:

$$OH=\frac{1}{3}AH\xrightarrow{\text{شعاع دایره}}OH=\frac{1}{3}\times\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

پس مساحت دایره محاطی مثلث برابر است با:

$$S_{\text{دایره}}=\pi R^2=\pi(\frac{a\sqrt{3}}{6})^2=\frac{3\pi a^2}{36}=\frac{\pi a^2}{12}$$

مساحت مثلث نیز برابر است با:

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

پس نسبت مساحت دایره محاطی به مساحت مثلث برابر است با:

$$\frac{S_{\text{دایره}}}{S_{\text{مثلث}}}=\frac{\frac{\pi a^2}{12}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{4\pi}{12\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

۸۰۷ـ گزینه «۳» با توجه به این که $\sin\frac{1}{x}$ و $\sin\frac{1}{y}$ هر دو کران‌دار هستند و هنگامی که $x\to 0$ و $y\to 0$ حاصل حد $x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$ برابر صفر می‌شود، پس $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ می‌باشد.

توجه داشته باشید که چون به ازای $y=0$ یا $x=0$ مقدار تابع $f(x,y)$ نیز برابر صفر می‌باشد، پس تابع $f(x,y)$ در نقطه $(0,0)$ پیوسته هم می‌باشد.

۸۰۸ـ گزینه «۱» مقدار میانگین تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ برابر است با:

$$\text{مقدار میانگین}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

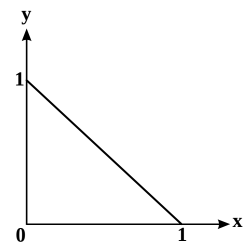
پس قرار می‌دهیم:

$$\text{مقدار میانگین}=\frac{1}{\frac{3}{2}-0}\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

با استفاده از رابطه $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\text{Arc}\sin\frac{u}{a}$ داریم:

$$\text{مقدار میانگین}=\frac{2}{3}(\text{Arc}\sin(\frac{x}{3}))\Big|_0^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}(\text{Arc}\sin(\frac{1}{2})-(\text{Arc}\sin(0))=\frac{2}{3}(\frac{\pi}{6}-0)=\frac{\pi}{9}$$

۸۰۹ــ گزینه «۱» به‌راحتی با توجه به رابطه منحنی داریم:



$$z(t)=(\sin^2 t,\cos^2 t)\Rightarrow\begin{cases}x+y=\sin^2 t+\cos^2 t=1\\ x=\sin^2 t\geq 0\\ y=\cos^2 t\geq 0\end{cases}$$

با رسم منحنی مربوط به این روابط در صفحه x-y، می‌بینیم که نمودار آن قسمتی از خط $x+y=1$ است که در ربع صفحه اول قرار دارد که درواقع یک پاره‌خط به طول $\sqrt{2}$ است. یعنی گزینه «۱» صحیح است.

۸۱۰ــ گزینه «۱» با توجه به این‌که مبدأ، تنها ریشه مخرج است و هریک از جملات صورت یک درجه بیشتر از تک‌تک جملات مخرج دارند، تابع در مبدأ دارای حد صفر است و درنتیجه پیوسته است. اما در مورد f_x داریم:

$$f_x(x,y)=\frac{(y^2+2yx)(x^2+y^2)-2x(xy^2+yx^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^4+2y^3x-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

که با توجه به هم‌درجه بودن صورت و مخرج، در هر نقطه به‌جز مبدأ مختصات دارای حد است. در مورد مبدأ نیز با توجه به فرمول اصلی مشتق جزئی داریم:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0+0}{0+h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3}=0$$

پس f_x در مبدا مقدار 0 دارد ولی در همسایگی آن حد ندارد، پس ناپیوسته است.

۸۱۱ــ گزینه «۳»

گزینه ۱: $\operatorname{tr}(ABA^{-1})=\operatorname{tr}(A^{-1}AB)=\operatorname{tr}(B)$

گزینه ۲: $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$

گزینه ۳ نادرست است: مثلاً $A=I$ و $B=2I$

$$de+(A+B)=\det(3I)=3^n$$

$$\det A+\det B=1+2^n\rightarrow\det(A+B)3^n\neq\det A+\det B=1+2^n$$

گزینه ۴: $\det(AB)t=\det(B^tA^t)=\det(B^t)\det(A^t)=\det(B^*)^T\det(A^*)^T=\det(B^*)\det(A^*)=\det(A^*)\det(B^*)$

پس گزینه ۳ نادرست است.

۸۱۲ــ گزینه «۳ و ۴» در کلید سازمان سنجش، گزینه «۳» به‌عنوان گزینه درست اعلام شده و در همان نگاه اول نیز می‌توان فهمید که نیازی به حل مسئله نیست، زیرا در گزینه «۳»، سمت چپ تساوی یک بردار را نشان می‌دهد ولی سمت راست یک عدد (ضرب داخلی) است. ولی به‌منظور یادگیری، سایر گزینه‌ها را نیز بررسی می‌کنیم. کافی است بردارهای به‌کاررفته در روابط گزینه‌ها را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\ ,\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\ ,\ \vec{r}=(x,y,z)\ ,\ \vec{\nabla}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$$

حال به بررسی هریک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$1)\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{r})=\vec{\nabla}\times\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\x&y&z\end{vmatrix}=\vec{\nabla}\times(a_2z-a_3y,a_3x-a_1z,a_1y-a_2x)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\a_2z-a_3y&a_3x-a_1z&a_1y-a_2x\end{vmatrix}=(a_1+a_1,a_2+a_2,a_3+a_3)=2(a_1,a_2,a_3)=2\vec{a}$$

پس گزینه «۱» صحیح است.

$$2)\vec{\nabla}.((\vec{a}.\vec{r})\vec{b})=\vec{\nabla}.\{[(a_1,a_2,a_3).(x,y,z)](b_1,b_2,b_3)\}=\vec{\nabla}.[(a_1x+a_2y+a_3z)(b_1,b_2,b_3)]$$

$$=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}).(b_1a_1x+b_1a_2y+b_1a_3z,b_2a_1x+b_2a_2y+b_2a_3z,b_3a_1x+b_3a_2y+b_3a_3z)$$

$$=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=(a_1,a_2,a_3).(b_1,b_2,b_3)=\vec{a}.\vec{b}$$

پس صحت گزینه «۲» هم نشان داده شد.

$$4)\vec{\nabla}.((\vec{a}.\vec{r})\vec{r})=\vec{\nabla}.\{[(a_1,a_2,a_3).(x,y,z)](x,y,z)\}=\vec{\nabla}.[(a_1x+a_2y+a_3z)(x,y,z)]$$

$$=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}).(a_1x^2+a_2xy+a_3xz,a_1xy+a_2y^2+a_3yz,a_1xz+a_2yz+a_3z^2)$$

$$=(2a_1x+a_2y+a_3z)+(a_1x+2a_2y+a_3z)+(a_1x+a_2y+2a_3z)=(4a_1x+4a_2y+4a_3z)=4(a_1,a_2,a_3).(x,y,z)=4\vec{a}.\vec{r}$$

همان‌طور که می‌بینید، گزینه «۴» نیز نادرست است. پس به نظر می‌رسد سؤال ۲ گزینه صحیح دارد!

۸۱۳ـ گزینه «۲» برای بررسی همگرایی سری اول، با توجه به این‌که همواره $\sin n \le 1$ و $\cos n \ge -1$ است، و همچنین با کمک آزمون مقایسه و سرعت رشد دنباله‌ها، آن را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin n}{2n^2+\cos n+1} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n^2-1+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

از طرفی این سری P با توجه به توان n در مخرج که بزرگ‌تر از یک است، همگراست؛ پس سری کوچک‌تر نیز همگرا خواهد بود.

در مورد سری دوم، قبل از هر چیز، محاسبه می‌کنیم که حد جمله عمومی چه مقدار است. برای این کار از این موضوع که همواره $1 \le (\sin n)^2 \le 0$ بوده، و نسبت به عامل n در صورت قابل چشم‌پوشی است؛ خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sin n)^2+n}{n} \approx \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n} = 1$$

با توجه به این‌که شرط لازم همگرایی هر سری، همگرا بودن جمله عمومی آن به سمت صفر است، این سری واگراست.

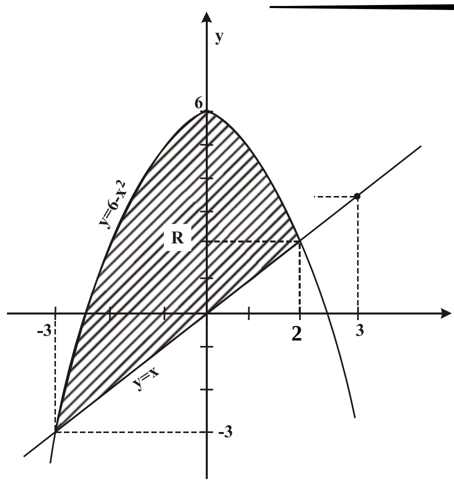
◆◆◆◆

۸۱۴ـ گزینه «۱» با توجه به توضیحاتی که در تست آمده است، معادله مورد نظر همان معادله مشخصه مربوط به ماتریس A می‌باشد و λ مقادیر ویژه ماتریس A هستند، بنابراین برای یافتن معادله مشخصه کافی است معادله $\det(A-\lambda I)=0$ را می‌یابیم:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -3 \\ 3 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)((-1-\lambda)(6-\lambda)-2(-3)) - 1(3(6-\lambda)-2(1)) + (-3)(3(-3)-(-1-\lambda(1)))$$

$$= \lambda^3 - 8\lambda^2 + 15\lambda - 8 = 0$$



◆◆◆◆

۸۱۵ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه حد به‌صورت مبهم 1^∞ است، لذا داریم:

$$\text{حاصل حد} = e^{\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{f(x+\delta x)}{f(x)}-1\right)\frac{1}{\delta}} = e^{\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta f(x)}\right)}$$

در صورت کسر از قاعده‌ی هوپیتال کمک می‌گیریم:

$$\text{حاصل حد} = e^{\lim_{\delta\to 0}\frac{xf'(x+\delta x)}{f(x)}} = e^{x\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

◆◆◆◆

۸۱۶ـ گزینه «۴» کافی است قرار دهیم $a=b$ در این‌صورت $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n\sqrt{b}}{2}\right)^n = b$ که گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) را رد می‌کند.

◆◆◆◆

۸۱۷ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. شرط موردنظر در واقع نشان می‌دهد که بردار $(-1,2,0,5)$ باید ترکیب خطی سه بردار داده شده باشد، یعنی:

$$\alpha = (1,-1,b,-1)+\beta(-1,0,1,1)+\gamma(1,1,-3,2) = (-1,2,0,5)$$

پس داریم:

$$\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=-1 & (1) \\ -\alpha+\gamma=2 & (2) \\ \alpha b+\beta-3\gamma=0 & (3) \\ -\alpha+\beta+2\gamma=5 & (4) \end{cases}$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$3\gamma = 4 \Rightarrow \gamma = \frac{4}{3}$$

از (۲) داریم:

$$-\alpha+\frac{4}{3}=2 \Rightarrow \alpha=\frac{4}{3}-2=\frac{-2}{3} \Rightarrow \alpha=-\frac{2}{3}$$

پس در (۱) داریم:

$$-\frac{2}{3}-\beta+\frac{4}{3}=-1 \Rightarrow \beta=\frac{2}{3}+1 \Rightarrow \beta=\frac{5}{3}$$

اکنون مقادیر به دست آمده را در (۳) قرار می‌دهیم تا مقدار b به دست بیاید.

$$-\frac{2}{3}b+\frac{5}{3}-3\left(\frac{4}{3}\right)=0 \Rightarrow \frac{-2b}{3}=4-\frac{5}{3}=\frac{7}{3} \Rightarrow -2b=7 \Rightarrow b=\frac{-7}{2}$$

◆◆◆◆

۸۱۸ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه $A^{۳} = ۲I$، لذا $A^{۳} - ۲I = O$.

حال با استفاده از تجزیه داریم:

$$(A - \sqrt[۳]{۲}I)(A^{۲} + \sqrt[۳]{۲}A + \sqrt[۳]{۴}I) = O$$

حال نتیجه می‌گیریم که $\lambda = \sqrt[۳]{۲}$ یک مقدار ویژه ماتریس A می‌باشد.

اما در مورد گزینه‌ی (۴) داریم:

$$A^{۲} - \sqrt[۳]{۲}A = A(A - \sqrt[۳]{۲}I)$$

حال اگر بخواهیم مقادیر ویژه ماتریس $A^{۲} - \sqrt[۳]{۲}A$ را محاسبه کنیم مشخص است که $\lambda = ۰$ مقدار ویژه این ماتریس است. زیرا $A - \sqrt[۳]{۲}I = O$ و با توجه به اینکه اگر یکی از مقادیر ویژه ماتریسی صفر باشد، آن ماتریس وارون‌ناپذیر است. لذا گزینه (۴) صحیح است.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۱۹ـ گزینه «۲» با توجه به این که طبق قضیه کیلی ـ همیلتون هر ماتریس در معادله مشخصه آن صدق می‌کند، پس همواره $f(A) = ۰$ می‌باشد و این یعنی گزینه (۲) صحیح نیست.

توجه داشته باشید که گزینه‌های ۳ و ۴ به این دلیل صحیح می‌باشند که حاصل‌ضرب مقادیر ویژه یک ماتریس برابر است با دترمینان ماتریس و این یعنی گزینه (۳) صحیح است و مجموع مقادیر ویژه یک ماتریس برابر است با اثر ماتریس یا $tr(A)$ که همان مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس است.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۲۰ـ گزینه «۱» با توجه به این که توانی از m داریم، از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{R} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_m} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\frac{۱}{a^m + b^m}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \ge b \Rightarrow \frac{۱}{R} = \frac{۱}{a} \Rightarrow R = a \\ a \le b \Rightarrow \frac{۱}{R} = \frac{۱}{b} \Rightarrow R = b \end{array}\right\} \Rightarrow R = \max\{a, b\}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۲۱ـ گزینه «۳» ابتدا نقاط بحرانی ³ را به دست می‌آوریم: !

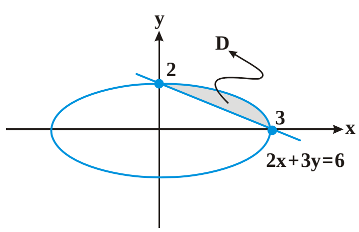
$$\begin{cases} f_x = ۲y - ۶x = ۰ \\ f_y = ۲x + ۱۰y - ۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۶} \ , \ y = \frac{۳}{۱۶}$$

$A(\frac{۱}{۱۶}, \frac{۳}{۱۶})$ نقطه بحرانی می‌باشد.

$$\begin{cases} f_{xx} = -۶ \\ f_{yy} = ۱۰ \\ f_{xy} = ۲ \end{cases} \Rightarrow \Delta = (-۶)(۱۰) - (۲)^{۲} = -۶۴ < ۰ \Rightarrow \text{نقطه زینی}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۲۲ـ گزینه «۴» دقت کنید که بیضی $۴x^{۲} + ۹y^{۲} = ۳۶$ در نقاط $(x = ۰, y = ۲)$ و $(x = ۳, y = ۰)$ با محورهای مختصات برخورد می‌کند. خط $۲x + ۳y = ۶$ نیز دقیقاً از همین نقاط گذشته است. به همین خاطر تصویر این ناحیه مانند شکل زیر است. اگر این ناحیه را D بنامیم، مساحت D برابر است با $\iint dydx$ اما چون این ناحیه درون یک بیضی قرار گرفته از تغییر متغیر بیضوی استفاده می‌کنیم.



معادله‌ی این بیضی به صورت $\frac{x^{۲}}{۹} + \frac{y^{۲}}{۴} = ۱$ نوشته می‌شود. پس شعاع افقی $a = ۳$ و شعاع عمودی $b = ۲$ است. با استفاده از تغییر متغیر بیضوی داریم $\begin{cases} x = ۳r\cos\theta \\ y = ۲r\sin\theta \end{cases}$ و ژاکوبین برای این تغییر برابر است با $abr = ۶r$ و حدود انتگرال‌گیری در مختصات قطبی به صورت زیر است:

$$۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲} \ , \ \frac{۱}{\sin\theta + \cos\theta} \le r \le ۱$$

پس مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با:

$$S = \iint dA = \iint ۶r dr d\theta = ۶\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{\frac{۱}{\sin\theta + \cos\theta}}^{۱} r dr d\theta = ۳\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (۱ - \frac{۱}{(\sin\theta + \cos\theta)^{۲}}) d\theta$$

$$= ۳(\theta - \frac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta})\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = ۳\left[(\frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{۱ + ۰}) - (۰ - ۰)\right] = \frac{۳\pi}{۲} - ۳$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸۲۳ـ گزینه «۴» ابتدا شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\times4\times7\times\ldots\times(3n+1)}{1\times5\times9\times\ldots\times(4n+1)}x^n$ را به دست می‌آوریم و در نهایت جذر آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{R'}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1\times4\times7\times\ldots\times(3n+1)\times(3n+4)}{1\times5\times9\times\ldots\times(4n+1)\times(4n+5)}}{\frac{1\times4\times7\times\ldots\times(3n+1)}{1\times5\times9\times\ldots\times(4n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+5}=\frac{3}{4}$$

$$R'=\frac{4}{3}\Rightarrow R=\sqrt{R'}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۸۲۴ـ گزینه «۲» برای پیداکردن شیب مماس‌های یک‌طرفه، ابتدا تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}e^x & x\geq 0\\ e^{-x} & x<0\end{cases}$$

حالا خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}m(0^+)&=f'(0^+)=e^x\Big|_{x=0^+}=1\\ m(0^-)&=f'(0^-)=-e^{-x}\Big|_{x=0^-}=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow m(0^+)\times m(0^-)=-1\Rightarrow$$ دو خط مماس بر هم عمودند

۸۲۵ـ گزینه «۲» کافی است نقاط روی خط را برحسب پارامتر مشترک t نوشته و آن را در معادله صفحه قرار دهیم تا پارامتر t متناظر با نقطه مورد نظر به دست آید. یعنی داریم:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x=2t+1\\ y=3t+2\\ z=4t+3\end{Bmatrix}\to x+y+z=15\Rightarrow(2t+1)+(3t+2)+(4t+3)=9t+6=15\Rightarrow t=1$$

$$\Rightarrow(x_0,y_0,z_0)=(3,5,7)$$

۸۲۶ـ گزینه «۴» با توجه به این که $\vec{F}=(x^3y^4,x^4y^3)$ و $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$، پس میدان $\vec{F}$ پایستار است و فقط کافی است تابع پتانسیل را به دست آورده مقدار آن را در نقاط آغازی و پایینی محاسبه کرده و از هم کم کنیم:

$$f(x,y)=\int x^3y^4dx+\int 0dy=\frac{1}{4}x^4y^4$$

$$\left.\begin{aligned}t=0&\Rightarrow(x_s,y_s)=(0,1)\\ t=1&\Rightarrow(x_f,y_f)=(1,2)\end{aligned}\right\}\Rightarrow I=f(1,2)-f(0,1)=\frac{1}{4}1^42^4-\frac{1}{4}0^41^4=4$$

۸۲۷ـ گزینه «۳» با استفاده از دستگاه مختصات کروی، ناحیه انتگرال‌گیری معادل فضای بین دو نیم‌کره بالایی به شعاع‌های ۱ و ۲ است. در نتیجه داریم:

$$I=\iiint_W(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2(\rho^2\sin^2\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi\int_1^2\rho^4d\rho=2\pi\left(\frac{\rho^5}{5}\Big|_1^2\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi$$

$$=2\pi\left(\frac{32-1}{5}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi=\frac{62\pi}{5}\times\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2+\frac{1}{2})}=\frac{31\pi}{5}\frac{1\times\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=\frac{124\pi}{15}$$

۸۲۸ـ گزینه «۱» ابتدا انتگرال را به صورت روبرو بازنویسی می‌کنیم:

$$I=\int_0^1x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

حالا با استفاده از تعریف تابع بتا خواهیم داشت:

$$I=\int_0^1x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\beta(m,n)$$

از مقایسه این دو انتگرال نتیجه می‌شود:

$$m=\frac{3}{2}\ ,\ n=\frac{1}{2}\Rightarrow I=\beta(\frac{3}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\times\sqrt{\pi}}{1!}=\frac{\pi}{2}$$

۸۲۹ـ گزینه «۱» ابتدا مقادیر ویژه ماتریس را به دست می‌آوریم:

$$|\lambda I-A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -8 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\left[(\lambda-1)(\lambda-2)-8\right]-1\left[8+(\lambda-1)\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-1 \\ \lambda=1 \\ \lambda=5 \end{cases}$$

پس $\lambda=5$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس است. برای به دست آوردن بردار ویژه باید دستگاه $AX=\lambda X$ را حل کنیم:

$$AX=5X \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=5x \\ y+8z=5y \\ x+y+2z=5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+y+z=0 \\ -y+2z=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow (a,2a,a)$$

۸۳۰ـ گزینه «۴» برای حل این انتگرال، ابتدا باید حد پایین انتگرال را، که نقطه تقاطع دو منحنی $xy=1$ و $y=x$ است، به دست آوریم:

$$\left.\begin{matrix} y=\frac{1}{x} \\ y=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}=x \Rightarrow \begin{cases} x=-1 & \times \\ x=1 & \checkmark \end{cases}$$

$$I=\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2\int_{\frac{1}{x}}^{x} x^2\frac{dy}{y^2}dx=\int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\right)dx=\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2 (x^3-x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=(4-2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

۸۳۱ـ گزینه «۱»

روش اول: در بسط تیلور یک تابع حول نقطه $x=x_0$، برحسب توان‌های عبارت $(x-x_0)$، ضریب $(x-x_0)^n$ برابر است با $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$c_5=\frac{f^{(5)}(1)}{5!}= \quad (x-1)^5 \text{ ضریب}$$

$$f(x)=\operatorname{Ln}x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f''(x)=\frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'''(x)=\frac{2}{x^3} \Rightarrow f^{(4)}(x)=\frac{-6}{x^4} \Rightarrow f^{(5)}(x)=\frac{24}{x^5}$$

$$\Rightarrow f^{(5)}(1)=24 \Rightarrow c_5=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$$

روش دوم: ابتدا تابع $f(x)$ را به صورت $f(x)=\operatorname{Ln}(1+(x-1))$ می‌نویسیم. در هنگام نوشتن بسط تیلور حول نقطه $x=1$ در واقع همانند بسط مک‌لورن تابع $\operatorname{Ln}(1+x)$ خواهد بود، یعنی:

$$f(x)=\operatorname{Ln}(1+(x-1))=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\cdots+\frac{(x-1)^5}{5}+\cdots \Rightarrow \frac{1}{5}=(x-1)^5 \text{ ضریب}$$

۸۳۲ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه نقطه A روی صفحه داده شده قرار ندارد، پس باید یکی از ۴ رأس وجه موازی آن باشد؛ درنتیجه فاصله این نقطه از صفحه، همان اندازه یال مکعب است، یعنی:

$$d=\frac{|3(4)-2(3)+6(5)-1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{35}{7}=5 \Rightarrow V=d^3=125$$