سؤالات آزمون‌های کارشناسی ارشد ـ سراسری ۱۳۹۳

سؤالات و پاسخ‌های تشریحی رشته‌های برق ـ مکانیک و کامپیوتر در کتاب اصلی ارائه شده است. علاقه‌مندان می‌توانند سؤالات و پاسخ‌های سایر رشته‌ها را از این قسمت دانلود کنند.

تذکر: سؤالات سال ۷۸ تا ۹۲ تمام رشته‌ها به صورت طبقه‌بندی شده در پایان هر درسنامه کتاب ریاضی مهندسی ارائه شده است.

مهندسی هوا فضا

۱ـ اگر $F[\frac{1}{x^2+a^2}]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|\omega|}}{a}$ که $a>0$، آن‌گاه کدام گزینه جواب $F[\frac{6x^2-2a^2}{(x^2+a^2)^3}]$ می‌باشد؟

۱) $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega^2 e^{-a|\omega|}}{a}$　　۲) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega^2 e^{-a|\omega|^2}}{a}$　　۳) $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega e^{-a|\omega|}}{a}$　　۴) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega^2 e^{-a|\omega|}}{a^2}$

۲ـ اگر $z=x^2\arctan\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$، حاصل $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر کدام است؟

۱) $2x^2\arctan\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

۲) $-\frac{x^2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\arctan\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

۳) $\frac{x^2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\arctan\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

۴) $x^2\arctan\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

۳ـ تابع داده شده دارای کدام سری لوران می‌باشد؟

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)}$$

۱) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{(-1)^k}{(z-2)^{k+1}}-\frac{1}{2}\frac{(-3)^k}{(z-2)^{k+1}}\right)\ ,\ |z-2|<3$

۲) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{(-1)^k}{(z-2)^{k+1}}-\frac{1}{2}(-2)^k(z-2)^{k+1}\right)\ ,\ 1<|z-2|<3$

۳) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(-1)^k(z-2)^k+\frac{1}{2}(-2)^k(z-2)^k\right)\ ,\ |z-2|<1$

۴) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{(-1)^k}{(z-2)^{k+1}}+\frac{1}{2}\frac{(-3)^k}{(z-2)^{k+1}}\right)\ ,\ |z-2|>3$

۴ـ معادله $(1-y)u_{xx}+2(1-x)u_{xy}+(1+y)u_{yy}-xu_y+yu_x=0$ از چه نوعی است؟

۱) اگر C دایره $(x-1)^2+y^2=1$ باشد آنگاه معادله روی C سهمی‌گون است، داخل C هذلولی‌گون است و خارج آن بیضی‌گون است.

۲) اگر C دایره $(x-1)^2+y^2=1$ باشد آنگاه معادله روی C سهمی‌گون، داخل C بیضی‌گون و در خارج آن هذلولی‌گون است.

۳) اگر C هذلولی $y^2-(x-1)^2=1$ باشد آنگاه معادله روی C سهمی‌گون است، در نقاط داخل خم C بیضی‌گون است و در سایر نقاط هذلولی‌گون است.

۴) اگر C هذلولی $y^2-(x-1)^2=1$ باشد آنگاه معادله روی C سهمی‌گون است، در نقاط داخل خم C هذلولی‌گون است و در سایر نقاط بیضی‌گون است.

۵ـ تابع تحلیلی $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ که در آن $u(x,y)=x^3-3xy^2$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $f(z)=2z^2+iC$　　۲) $f(z)=2iz^2+C$　　۳) $f(z)=z^3+iC$　　۴) $f(z)=iz^3+C$

۶ـ جواب‌های معادله‌ی $Re(\sin z)+Im(\cos z)=0$ عبارتند از:

۱) $z=k\pi$

۲) $z=x+i(k\pi)\ ,\ k=0,1,2,\dots,x\in R$

۳) $z=k\pi+iy\ ,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots,y\in R$

۴) $z=k\pi+i\frac{k\pi}{2}\ ,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$

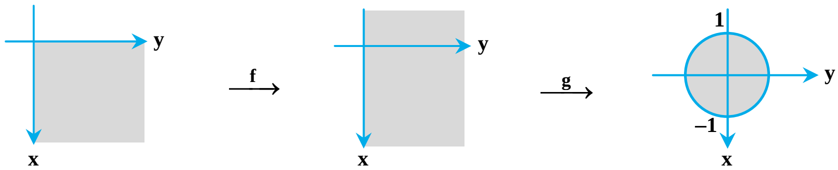
۷ــ مکان هندسی $|\frac{z+۳}{z-۴}|=۱$ کدام گزینه است؟

۱) یک دایره است.
۲) خطی، موازی محور x ها است.
۳) خطی که از مبدأ می‌گذرد، است.
۴) خطی، موازی محور y ها است.

۸ــ نقاط ثابت تابع خطی کسری $w=f(z)=\frac{z-۱}{z+۱}$ عبارتند از:

۱) $i,-i$
۲) $\frac{i}{۲},-i$
۳) $۱+i,۱-i$
۴) $-۱+i,-۱-i$

۹ــ نگاشت‌های f و g در شکل زیر، کدام‌اند؟



۱) $f(z)=z^۲, g(z)=\frac{۱}{z+i}$
۲) $f(z)=z^۳, g(z)=\frac{z-۱}{z+۱}$
۳) $f(z)=z^۲, g(z)=\frac{z-i}{z+i}$
۴) $f(z)=z^۳, g(z)=\frac{۱}{z+۱}$

۱۰ــ اگر $u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}B_n\sin(n\pi x)e^{-\lambda_n^۲ t}$ جواب معادله گرما باشد، به ازای چه مقادیری از B_n تابع u در شرط اولیه $u(x,۰)=\sin(x)$ صدق می‌کند؟

۱) $B_n=۱\ \ (n=۱,۲,\cdots)$
۲) $B_n=۰, B_۱=۱\ \ (n\geq ۲)$
۳) $B_{۲n}=۰, B_{۲n-۱}=۱\ \ (n=۱,۲,\cdots)$
۴) $B_{۲n-۱}=۱, B_{۲n-۱}=۰\ \ (n=۱,۲,\cdots)$

۱۱ــ انتگرال $\int_{|z|=۱}(\bar{z})^۲dz$ کدام است؟

۱) ۲π
۲) ۰
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) ۴π

۱۲ــ حاصل انتگرال حقیقی $\int_۰^{۲\pi}\frac{d\theta}{\frac{۵}{۴}-\cos\theta}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{۵}$
۲) $\frac{\pi}{۳}$
۳) $۸\frac{\pi}{۳}$
۴) $۸\frac{\pi}{۵}$

مهندسی مواد

۱۳ــ فرض کنیم $F(z)=F(re^{i\theta})=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$. چنانچه تابع F تحلیلی بوده و داشته باشیم $u(r,\theta)=r^۲\cos ۲\theta$، کدام گزینه $F(r,\theta)$ را معرفی می‌کند؟

۱) $F(z)=\frac{۱}{z^۲}+ic$
۲) $F(z)=z\bar{z}+ic$
۳) $F(z)=(z+\bar{z})^۲+ic$
۴) $F(z)=z^۲+ic$

۱۴ــ مقدار $\operatorname{Im}(\log\frac{z-۱}{z+۱})$ کدام است؟

۱) $\arctan\frac{y}{x^۲+y^۲-۱}$
۲) $\arctan\frac{۲y}{x^۲+y^۲+۱}$
۳) $\arctan\frac{۲y}{۱-x^۲-y^۲}$
۴) $\arctan\frac{۲y}{x^۲+y^۲-۱}$

۱۵ــ کدام‌یک از سری‌های زیر بسط لورانت تابع $f(z)=\frac{۱}{z(z-۱)(z-۲)}$ حول نقطه‌ی صفر در مجموعه $\{z\in\mathbb{C}, ۰<|z|<۱\}$ است؟

۱) $\frac{۱}{۲z}+\sum_{n=۰}^{\infty}(۱-\frac{۱}{۲^{n+۲}})z^n$
۲) $\frac{۱}{۲z}+\sum_{n=۰}^{\infty}(۱+\frac{۱}{۲^n})z^n$
۳) $\frac{۱}{۲z}+\sum_{n=۰}^{\infty}(۱+\frac{۱}{۲^{n+۲}})z^n$
۴) $\frac{۱}{۲z}+\sum_{n=۰}^{\infty}(۱-\frac{۱}{۲^n})z^n$

۱۶ــ حاصل انتگرال $\oint_C\frac{z^۲}{\sin z}dz$، که در آن C دایره‌ای به مرکز مبدأ و با شعاع ۸ می‌باشند، کدام است؟

۱) صفر
۲) $۱۲\pi^۳ i$
۳) $۶\pi^۲ i$
۴) $۴\pi^۲ i$

۱۷ـ هرگاه $\int_0^\infty g(t)\cos(tx)dt = \begin{cases} 1 \;, & |x|<a \\ 0 \;, & |x|>a \end{cases}$ باشد، $g(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{\pi}$ ۲) a ۳) $\frac{2a}{\pi}$ ۴) $2a$

۱۸ـ در مورد معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای $xu_{xx}+yu_{yy}+3y^2u_x=0$ در ناحیه‌ی $xy<0$ از نوع .... و در ناحیه‌ی $xy>0$ از نوع .... است.

۱) سهموی ـ بیضوی ۲) هذلولوی ـ سهموی ۳) هذلولوی ـ بیضوی ۴) بیضوی ـ هذلولوی

۱۹ـ مسئله مقدار مرزی دیریکله در ناحیه بین دو دایره هم مرکز به شعاع های a و b $(a<b)$ و با شرایط مرزی ثابت $\begin{cases} \nabla^2u = u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \\ u(a,\theta)=A \;,\; u(b,\theta)=B \end{cases}$ (A و B ثابت) داده شده است. جواب مسئله $u(r,\theta)$ کدام است؟

۱) $\frac{ab(A-B)}{b-a}\frac{1}{r}+\frac{bB-aA}{b-a}$

۲) $\frac{A-B}{Lna-Lnb}Lnr+\frac{BLna-ALnb}{Lna-Lnb}$

۳) $\frac{B-A}{Lna-Lnb}Lnr+\frac{ALna-BLnb}{Lna-Lnb}$

۴) $\frac{A-B}{a-b}r+\frac{Ba-Ab}{a-b}$

مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی ـ بهداشت ایمنی و محیط زیست بیوتکنولوژی و داروسازی

توضیح: سؤالات ۲۰ تا ۴۴ مشترک بین رشته‌های مهندسی نانومواد، ابزار دقیق و اتوماسیون و مهندسی شیمی‌ـ بیوتکنولوژی و داروسازی می‌باشد. داوطلبان رشته‌های مهندسی نانومواد و ابزار دقیق و اتوماسیون علاوه بر این سؤالات باید به سؤالات ۳۸ تا ۴۴ نیز پاسخ دهند.

سوالات ۲۰ تا ۲۷ مشترک بین مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون و مهندسی شیمی ـ بهداشت، ایمنی و محیط زیست می‌باشد.

۲۰ـ انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} 9-x^2 \;, & |x|<3 \\ 0 \;, & |x|>3 \end{cases}$، کدام است؟

اطلاعات لازم:

$$\int (a^2-x^2)\cos bx dx = \frac{a^2-x^2}{b}\sin bx-\frac{2x}{b^2}\cos bx+\frac{2}{b^3}\sin bx+C$$

$$\int (a^2-x^2)\sin bx dx = -\frac{a^2-x^2}{b}\cos bx-\frac{2x}{b^2}\sin bx-\frac{2}{b^3}\cos bx+C$$

۱) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 3\omega-\omega\cos 3\omega}{\omega^3}\cos\omega x d\omega$

۲) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 3\omega-3\omega\cos 3\omega}{\omega^3}\cos\omega x d\omega$

۳) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\cos 3\omega-3\sin 3\omega}{\omega^3}\cos\omega x d\omega$

۴) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{3\omega\cos 3\omega-\sin 3\omega}{\omega^3}\cos\omega x d\omega$

۲۱ـ در استفاده از روش ضربی $(u(x,y)=F(x)G(y))$ برای حل معادله دیفرانسیل $8u_x+6u_y=2(x+y)u$ فرم تابع $F(x)$، کدام است؟

۱) $f(x)=Ae^{\frac{1}{4}(x^2+2kx)}$ ۲) $f(x)=Ae^{\frac{1}{6}(x^2+2kx)}$ ۳) $f(x)=Ae^{\frac{1}{2}(x^2+2kx)}$ ۴) $f(x)=Ae^{\frac{1}{8}(x^2+2kx)}$

۲۲ـ تغییر متغیر $V=y$ و $Z=xy$ معادله $Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=0$ را به فرم نرمال (کانونی) تبدیل می‌کند این معادله کدام است؟ (A و B و C توابعی از x و y هستند.)

۱) $xu_{xx}-yu_{xy}=0$ ۲) $xu_{xx}-yu_{yy}=0$ ۳) $xu_{xx}+yu_{xy}=0$ ۴) $xu_{xx}+yu_{yy}=0$

۲۳ـ اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ یک تابع تحلیلی و $v=x^2-y^2+2y$، آن‌گاه $f'(i)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $-2(1+i)$ ۳) $2(1-i)$ ۴) $2(1+i)$

۲۴ـ مانده تابع $f(z)=(z^2-5z+6)e^{\frac{1}{z-2}}$ در $z=2$، کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 1

۲۵ـ نقاط ثابت (Fixed points) تابع $f(z)=\dfrac{z+2+2i}{(1-i)z-1-2i}$، کدام است؟

۱) $-i\pm\sqrt{-1+2i}$ ۲) $-i\pm\sqrt{1+2i}$ ۳) $i\pm\sqrt{-1+2i}$ ۴) $i\pm\sqrt{1+2i}$

۲۶ـ مقدار $\oint_C \dfrac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{4})^3}dz$ کدام است وقتی که C دایره‌ای $|z-\frac{\pi}{2}|=1$ است که در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت جهت‌گذاری شده است؟

۱) $-\dfrac{i\pi}{\sqrt{2}}$ ۲) $-\sqrt{2}\pi i$ ۳) $\dfrac{i\pi}{\sqrt{2}}$ ۴) $\sqrt{2}\pi i$

۲۷ـ نگاشت $w=\dfrac{1}{1-z}$ ناحیه $\{z=x+iy \mid x<1\}$ را به کدام ناحیه در صفحه w ها می‌نگارد؟

۱) $u\geq 0\,,\,-\infty<v<\infty$ ۲) $v>0\,,\,-\infty<u<\infty$ ۳) $v\geq 0\,,\,-\infty<u<\infty$ ۴) $u>0\,,\,-\infty<v<\infty$

سؤالات ۲۸ تا ۳۷ مشترک بین مهندسی نانو مواد و بیوتکنولوژی و داروسازی می‌باشد.

۲۸ـ نگاشت $w=\dfrac{z}{1-z}$ ناحیه $\{z=x+iy \mid 0<x<1\}$ را به کدام ناحیه در صفحه w می‌نگارد؟ $(w=u+iv)$

۱) $u<0\,,\,-\infty<v<\infty$ ۲) $v<0\,,\,-\infty<u<\infty$ ۳) $v>0\,,\,-\infty<u<\infty$ ۴) $u>0\,,\,-\infty<v<\infty$

۲۹ـ اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز تابع $u=2x(y+3)$ باشد و $v(0,0)=-4$ مقدار $v(2,2)$ برابر است با؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۳۰ـ اگر $f(z)=z-3i$ و C دایره‌ای به مرکز $1+3i$ و شعاع ۲ باشد آن‌گاه حاصل $\oint_C f(z)d\bar{z}$ کدام است؟

۱) $-2-2i$ ۲) $2+2i$ ۳) $-2-(8\pi+2)i$ ۴) $2+(8\pi+2)i$

۳۱ـ بسط لوران (لورانت) تابع $f(z)=\dfrac{4-3z}{z(1-z)(2-z)}$ به ازای $2<|z|<\infty$ کدام است؟

۱) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n-1}{z^n}$ ۲) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+1}{z^n}$ ۳) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{z^{n+1}}$ ۴) $f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+1}{z^{n+1}}$

۳۲ـ اگر سری فوریه تابع تناوبی $f(x)=|x|$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ به صورت $\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}(\cos x+\dfrac{1}{9}\cos 3x+\dfrac{1}{25}\cos 5x+\cdots)\right)$ باشد، آن‌گاه مجموع سری عددی $\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{5^4}+\dfrac{1}{7^4}+\cdots$ برابر است با:

۱) $\dfrac{\pi^4-96}{96}$ ۲) $\dfrac{\pi^3-32}{32}$ ۳) $\dfrac{\pi^3+32}{32}$ ۴) $\dfrac{\pi^4+96}{96}$

۳۳ـ هرگاه تابع f در بازه $[0,\pi]$ فرد باشد و $f(x)=3x^2+\sin 4x$ آن گاه ضریب $\sin 4x$ در سری فوریه مثلثاتی f در بازه $[-\pi,\pi]$، کدام است؟

۱) $\dfrac{2-3\pi}{2}$ ۲) $-\dfrac{3\pi}{2}$ ۳) $\dfrac{3\pi}{2}$ ۴) $\dfrac{2+3\pi}{2}$

۳۴ـ با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=e^{-a^2x^2}$ که به صورت $Fc[f(x)]=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$ تعریف می‌شود، تبدیل فوریه‌ی سینوسی تابع $xf(x)$، کدام است؟

۱) $\dfrac{\omega\sqrt{\pi}}{4a^2}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$ ۲) $\dfrac{\omega\sqrt{\pi}}{2a^2}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$ ۳) $\dfrac{\omega\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$ ۴) $\dfrac{\omega\sqrt{\pi}}{2a^2}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$

۳۵ـ جواب معادله $u_{xy}=u_x$ کدام است؟

۱) $f(x)e^x+g(y)$ ۲) $f(x)e^y+g(y)$ ۳) $f(y)e^x+g(x)$ ۴) $f(y)e^y+g(x)$

۳۶ـ تغییر متغیرهای $v=y-3x$ و $z=y-5x$ معادله $Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=0$ را به یک معادله از نوع کانونی (نرمال) تبدیل می‌کند، مقدار B کدام است؟

۱) $B=-8$ ۲) $B=-4$ ۳) $B=4$ ۴) $B=8$

۳۷ـ مقدار $u(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ در مسئله مقدار اولیه مرزی مقابل: $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0 \;,\; 0<x<\pi \;,\; t>0 \\ u(x,0)=\sin x \;,\; u_t(x,0)=0 \;,\; 0\le x\le \pi \\ u(0,t)=0 \;,\; u(\pi,t)=0 \;,\; t\ge 0 \end{cases}$ برابر است با:

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون

۳۸ـ اگر سری فوریه تابع تناوبی $f(x)=|\sin x|$، $f(x+2\pi)=f(x)$ به صورت $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)}$ باشد، آن‌گاه مجموع سری عددی $\cdots+\frac{1}{7^2\times 9^2}+\frac{1}{5^2\times 7^2}+\frac{1}{3^2\times 5^2}$، کدام است؟

۱) $\frac{8-\pi^2}{16}$ ۲) $\frac{\pi^2-8}{16}$ ۳) $\frac{9\pi^2-88}{144}$ ۴) $\frac{88-9\pi^2}{144}$

۳۹ـ جواب معادله دیفرانسیل $u_{tt}-9u_{xx}=0$ با شرایط $u(x,0)=\sinh x$ و $u_t(x,0)=\cosh\frac{x}{6}$، کدام است؟

۱) $u(x,t)=\sinh(x)\cosh(3t)+2\sinh(\frac{x}{6})\cosh(\frac{t}{2})$

۲) $u(x,t)=\cosh(x)\sinh(3t)+2\sinh(\frac{x}{6})\cosh(\frac{t}{2})$

۳) $u(x,t)=\cosh(x)\sinh(3t)+2\cosh(\frac{x}{6})\sinh(\frac{t}{2})$

۴) $u(x,t)=\sinh(x)\cosh(3t)+2\cosh(\frac{x}{6})\sinh(\frac{t}{2})$

۴۰ـ قدرمطلق عدد مختلط $w=\frac{1-t^2+2it}{1+t^2}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $1-t$ ۴) $\frac{1-t}{2}$

۴۱ـ مجموعه نقاطی که تابع $f(z)=\mathrm{Ln}(iz^2+2-i)$ در آن‌ها تحلیلی نمی‌باشد، کدام است؟

۱) $\{(x,y)\in R^2 \mid xy\le 1, x^2-y^2=1\}$

۲) $\{(x,y)\in R^2 \mid xy\ge 1, y^2-x^2=1\}$

۳) $\{(x,y)\in R^2 \mid xy\ge 1, x^2-y^2=1\}$

۴) $\{(x,y)\in R^2 \mid xy\le 1, y^2-x^2=1\}$

۴۲ـ سری لورانت تابع $f(z)=\frac{3}{2+z-z^2}$ در ناحیه $1<|z|<2$، کدام است؟

۱) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$

۲) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}$

۳) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$

۴) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$

۴۳ـ اگر z نقطه‌ای در درون دایره‌ی $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ باشد، آن‌گاه:

۱) $e^{-3}<|e^z|<e^{-1}$ ۲) $e^{-1}<|e^z|<e$ ۳) $e^{-1}<|e^z|<e^3$ ۴) $e<|e^z|<e^3$

۴۴ـ مقدار $\oint_C \frac{\sinh z}{z^2+\frac{\pi^2}{4}}dz$ کدام است وقتی‌که $C: |z-\frac{\pi}{2}i|=1$ دایره‌ای باشد که در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت جهت‌گذاری شده است؟

۱) 2 ۲) 2π ۳) $2i$ ۴) πi

مهندسی نانو مواد

۴۵ـ مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x^{2})dx}{(x^{2}+\pi)(x^{2}+\frac{\pi}{2})}$ کدام است؟

۱) $\frac{-\sqrt{2}i}{\pi\sqrt{\pi}}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}i}{\pi\sqrt{\pi}}$ ۳) $\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ ۴) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$

۴۶ـ مانده تابع $f(z)=\frac{e^{z}}{1-\cos z}$ در نقطه‌ی تکین تنهای $z=0$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

۴۷ـ با فرض $\int_{0}^{\infty}f(\omega)\sin\omega x\,d\omega=g(x)$، که $g(x)=\begin{cases}3x-1 & ;0\le x\le 2\\ 0 & ;x>2\end{cases}$ تابع f کدام است؟

۱) $-\frac{12}{\pi\omega}\cos 2\omega+\frac{6}{\pi\omega^{2}}\sin 2\omega$

۲) $-\frac{10}{\pi\omega}\cos 2\omega+\frac{6}{\pi\omega^{2}}\sin 2\omega-\frac{2}{\pi\omega}$

۳) $-\frac{5}{\pi\omega}\cos 2\omega+\frac{3}{\omega^{2}}\sin 2\omega-\frac{1}{\pi\omega}$

۴) $-\frac{3}{\pi\omega}\cos 2\omega+\frac{3}{2\pi\omega^{2}}\sin 2\omega$

۴۸ـ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $2xu_x+yu_y=x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^{2}$ ۲) $\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^{2}$ ۳) $(x^{2}+y^{2})-2xy$ ۴) $(x^{2}+y^{2})-2(\frac{x}{y})$

۴۹ـ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xt}+\sin t=0\,,\,x>0\,,\,t>0$ با شرایط مرزی و اولیه $u(x,0)=0\,,\,u(0,t)=0$، کدام است؟

۱) $1-x\cos t$ ۲) $x(\cos t-1)$ ۳) $t(\cos x-1)$ ۴) $x(\cos t+1)$

مهندسی معماری کشتی

۵۰ـ $z=(-1+i)^{7}$ معادل کدام است؟

۱) $-8(1+i)$ ۲) $8(1+i)$ ۳) $-8(1-i)$ ۴) $8(1-i)$

۵۱ـ مزدوج همساز $u=y^{3}-3x^{2}y$ کدام است؟

۱) $-x^{2}y+x^{2}+c$ ۲) $xy^{2}+x^{3}+c$ ۳) $3xy^{2}+x^{3}+c$ ۴) $-3x^{2}y+3x^{2}+c$

۵۲ـ نگاشت $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ دایره $|z|=2$ را بر کدام‌یک از منحنی‌های زیر می‌نگارد؟

۱) دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$

۲) یک بیضی که قطر کوچک آن موازی محور حقیقی است.

۳) یک بیضی که قطر آن موازی محورها نیست.

۴) یک بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور حقیقی است.

مهندسی نفت

۵۳ـ مقدار سری فوریه متناظر با تابع متناوب: $L=\pi$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $f(x)=2x^{4}+3x-1$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi^{2}+12\pi-8}{8}$ ۲) $\frac{\pi^{2}-8}{4}$ ۳) $\frac{\pi^{2}-8}{8}$ ۴) $\frac{\pi^{2}+12\pi-8}{4}$

۵۴ـ در معادله موج:

$$\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=0 & , \quad 0<x<12\\ u(x,0)=x-1 \quad , \quad u_t(x,0)=0 & , \quad 0\le x\le 12\\ u(0,t)=0 \quad , \quad u(12,t)=0 & , \quad t\ge 0\end{cases}$$

مقدار $u(7,11)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲- ۳) ۶- ۴) ۲

۵۵ـ اگر $f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{3n^2+1}$، حاصل $\int_0^{\pi}f(x)(1+\cos 3x)dx$، کدام است؟

۱) $\frac{15}{56}$
۲) $\frac{29}{56}\pi$
۳) $\frac{15}{56}\pi$
۴) $\frac{29}{56}$

۵۶ـ مانده تابع $f(z)=ze^z\cos(\frac{1}{z})$ حول $z=0$، کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(2n-1)!}$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(2n-2)!}$
۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)!}$
۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!(2n+1)!}$

۵۷ـ مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1}(2z+\mathrm{Ln}z)dz$ با در نظر گرفتن شاخه‌ی اصلی لگاریتم به صورت $-\frac{3\pi}{2}<\mathrm{Arg}z<\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $2+i\pi$
۲) $2-i\pi$
۳) $-2-i\pi$
۴) $-2+i\pi$

پاسخنامه آزمون‌های کارشناسی ارشد ـ سراسری ۱۳۹۳

مهندسی هوا فضا

۱ـ گزینه «۱» طبق خواص تبدیل فوریه، اگر تبدیل فوریه تابع $f(x)$ برابر $F(\omega)$ باشد، آنگاه تبدیل فوریه تابع $\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$ برابر با $(i\omega)^n F(\omega)$ خواهد بود.

در این مسئله تبدیل فوریه تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲+a^۲}$ را داریم که با دو بار متوالی، مشتق گرفتن از این تابع خواهیم داشت:

$$f'(x)=\frac{-۲x}{(x^۲+a^۲)^۲} \Rightarrow f''(x)=\frac{-۲(x^۲+a^۲)^۲-(-۲x)(۴x(x^۲+a^۲))}{(x^۲+a^۲)^۴} \Rightarrow f''(x)=\frac{۶x^۲-۲a^۲}{(x^۲+a^۲)^۳}$$

بنابراین، تبدیل فوریه این تابع برابر است با:

$$F[\frac{۶x^۲-۲a^۲}{(x^۲+a^۲)^۳}]=F[f''(x)]=(i\omega)^۲F[f(x)]=-\omega^۲\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\frac{e^{-a|\omega|}}{a}$$

۲ـ گزینه «۱» این سؤال بیشتر جزء سرفصل‌های درس ریاضی عمومی (۲) محسوب می‌شود تا ریاضی مهندسی! قبل از پاسخ به این سؤال فرمول اویلر برای تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ را به صورت مقابل معرفی می‌کنیم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$$

که n درجه‌ی همگنی تابع f است، در این سؤال تابع f همگن از درجه (۲) است، بنابراین داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz=۲x^۲\operatorname{arctg}(\frac{x^۲+y^۲}{x^۲-y^۲})$$

توضیح: روش محاسبه بر اساس مشتق‌گیری جزئی بسیار طولانی و زمان‌بر است و دانستن فرمول فوق برای حل این تست بسیار مفید است.

۳ـ گزینه «۴» با توجه به گزینه‌ها، سری لوران تابع f حول نقطه $z=۲$ مد نظر است. ابتدا $f(z)$ را به صورت مجموع کسرهای ساده می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{z}{(z-۱)(z+۱)}=\frac{\frac{۱}{۲}}{z-۱}+\frac{\frac{۱}{۲}}{z+۱}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+z-۲}+\frac{\frac{۱}{۲}}{۳+z-۲}=\frac{\frac{۱}{۲}}{z-۲}(\frac{۱}{۱+\frac{۱}{z-۲}}+\frac{۱}{۱+\frac{۳}{z-۲}})$$

ناحیه همگرایی سری لوران جمله اول عبارت فوق $۱<|z-۲|$ و ناحیه همگرایی جمله دوم $|z-۲|>۳$ است. پس ناحیه همگرایی سری لوران $f(z)$ حول $z=۲$ برابر اشتراک این دو ناحیه یعنی $|z-۲|>۳$ است. حال سری لوران هر کدام از جمله‌ها را می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{۱}{۲(z-۲)}[\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{(z-۲)^k}+\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۳)^k}{(z-۲)^k}]=\sum_{k=۰}^{\infty}(\frac{۱}{۲}\frac{(-۱)^k}{(z-۲)^{k+۱}}+\frac{۱}{۲}\frac{(-۳)^k}{(z-۲)^{k+۱}})$$

۴ـ گزینه «۲» برای تعیین نوع معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=۰$$

باید علامت عبارت $\Delta=b^۲-۴ac$ را مشخص کرد. در این سؤال داریم:

$$\Delta=۴(۱-x)^۲-۴(۱-y^۲)=۴((x-۱)^۲+y^۲-۱)$$

به ازای $\Delta=۰$، یعنی $(x-۱)^۲+y^۲=۱$ این معادله سهمی‌گون است. این نقاط روی یک دایره (دایره C) قرار می‌گیرند. به ازای $\Delta<۰$، یعنی $(x-۱)^۲+y^۲<۱$ (نقاط داخل دایره C) این معادله بیضی‌گون است. و در نهایت، به ازای $\Delta>۰$، یعنی $(x-۱)^۲+y^۲>۱$ (نقاط خارج دایره C) این معادله هذلولی‌گون است.

۵ـ گزینه «۳» هرگاه در ضابطه‌ی $u(x,y)$ که قسمت حقیقیِ تابع $f(z)$ است؛ به جای y ها صفر قرار دهیم و به جای x ها، z قرار دهیم، ضابطه‌ی $f(z)$ معلوم می‌شود. البته این دستورالعمل در مورد توابع تحلیلی قابل استفاده است و یک ثابت مختلط هم باید به $f(z)$ اضافه کنیم.

$$u(x,y)=x^۳-۳xy^۲\xrightarrow[y\to ۰]{x\to z}f(z)=z^۳-۰$$

با در نظر گرفتن یک ثابت دلخواه به جواب $f(z)=z^۳+ic$ می‌رسیم.

۶ـ گزینه «۳» ابتدا $\sin z$ و $\cos z$ را با فرض $z=x+iy$ بسط می‌دهیم:

$$\begin{cases}\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y\\ \cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y\end{cases}$$

بنابراین $\mathrm{Re}(\sin z)=\sin x\cosh y$ و $\mathrm{Im}(\cos z)=-\sin x\sinh y$ و معادله مسئله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin x\cosh y-\sin x\sinh y=0\ \Rightarrow\ \sin x(\cosh y-\sinh y)=0$$

پس داریم $\sin x=0$ یا $\sinh y=\cosh y$، هر دو معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\sin x=0\ \Rightarrow\ x=k\pi;k=0,\pm1,\pm2,\dots\\ \sinh y=\cosh y\ \Rightarrow e^y+e^{-y}=e^y-e^{-y}\ \Rightarrow e^{-y}=0\ \Rightarrow \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

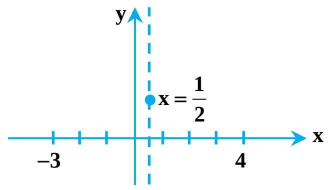
لذا جواب‌های این معادله به صورت $z=k\pi+iy$ هستند که $y\in\mathbb{R}$ و $k=0,\pm1,\pm2,\dots$.

۷ـ گزینه «۴»

روش اول: با جایگذاری $z=x+iy$ داریم:

$$|z+3|=|z-4|\ \Rightarrow\ |x+3+iy|=|x-4+iy|\ \Rightarrow\ (x+3)^2+y^2=(x-4)^2+y^2\ \Rightarrow\ |x+3|=|x-4|\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2}$$

معادله $x=\frac{1}{2}$ بیانگر خطی موازی محور y هاست.



روش دوم: با استفاده از مفهوم هندسی قدرمطلق و با توجه به تساوی $|z+3|=|z-4|$، مسأله را حل می‌کنیم.

$|z-4|$ یعنی فاصله‌ی z از ۴ و $|z+3|$ یعنی فاصله‌ی z از ۳-، با توجه به تساوی $|z-4|=|z+3|$، نقاطی را می‌خواهیم که فاصله‌ی یکسانی از ۴ و ۳- داشته باشند. این نقاط روی عمود منصف پاره‌خطی هستند که ۴ و ۳- را به هم متصل می‌کند. یعنی خط $x=\frac{4+(-3)}{2}=\frac{1}{2}$.

۸ـ گزینه «۱» نقاط ثابت این تابع از رابطه $f(z_0)=z_0$ به‌دست می‌آیند:

$$z_0=\frac{z_0-1}{z_0+1}\ \Rightarrow\ z_0^2+z_0=z_0-1\ \Rightarrow\ z_0^2=-1\ \Rightarrow\ z_0=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

۹ـ گزینه «۳» به این سؤال در فصل مربوطه «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

ابتدا به این موضوع توجه کنید که در نمودارهای داده شده جهت محور x ها وارونه داده شده است. در اولین ناحیه داریم $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le r<\infty$ در ناحیه دوم، کران‌های θ دو برابر شده‌اند. یعنی $0\le\theta\le\pi$ است. با توجه به این موضوع $f(z)=z^2$ بوده است. نگاشت g نگاشت موبیوسی است که نیم صفحه‌ی $y\ge0$ را به درون دایره واحد می‌نگارد. ضابطه‌ی این نگاشت به صورت $g(z)=\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ است که در آن $\mathrm{Im}\,z_0>0$ است. در بین گزینه‌ها، گزینه‌ی (۳) حالت درستی از این نگاشت است که با انتخاب $z_0=i$ بدست می‌آید.

۱۰ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. با رفع اشتباه تایپی گزینه (۲) درست است. توابع پایه‌ی X در سری داده شده عبارتند از: $\{\sin(n\pi x)\}\quad n\in\mathbb{N}$. سریِ $u(x,t)$ به شرطی متناهی خواهد شد که شرط اولیه‌ی $u(x,0)$ یکی از توابع پایه‌ی X باشد. در این مثال $u(x,0)=\sin(x)$ و این تابع با هیچکدام از توابع $\sin(n\pi x)$ برابر نیست. پس دنباله‌ی ضرایب B_n آن‌چنان که در گزینه‌ها آمده است از یک جا به بعد صفر نخواهد بود. منظور طراح سؤال البته $u(x,0)=\sin(\pi x)$ بوده است که در این حالت از تساویِ:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(n\pi x)=\sin(\pi x)$$

خواهیم داشت: $B_1=1$ و $B_n=0$ (برای $n\ge2$)

۱۱ـ گزینه «۲» از آن‌جایی که $|z|=1$ است، از تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ برای محاسبه این انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \quad \text{و} \quad \bar{z}=e^{-i\theta}$$

$$\int_{|z|=1}(\bar{z})^2dz=\int_0^{2\pi}e^{-2i\theta}ie^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}ie^{-i\theta}d\theta=-e^{-i\theta}\Big|_0^{2\pi}=1-e^{-i2\pi}=1-1=0$$

۱۲ـ گزینه «۳» با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ داریم $dz=ie^{i\theta}d\theta$ در نتیجه $d\theta=\frac{dz}{iz}$ است. همچنین می‌دانیم که $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}$ است.

پس این انتگرال برابر است با:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\frac{5}{4}-\cos\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}(z+z^{-1})}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{i(\frac{5}{4}z-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2})}=\oint_{|z|=1}\frac{-2dz}{i(z-\frac{1}{2})(z-2)}=\oint_{|z|=1}f(z)dz$$

تنها نقطه تکین $f(z)$ در داخل دایره $|z|=1$ نقطه $z=\frac{1}{2}$ است. با استفاده از قضیه مانده‌ها، انتگرال فوق برابر است با $2\pi i\,\underset{z=\frac{1}{2}}{\operatorname{Res}}(f(z))$. بنابراین داریم:

$$\underset{z=\frac{1}{2}}{\operatorname{Res}}(f(z))=\left.\frac{-2}{i(z-2)}\right|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{4}{3i}\Rightarrow\oint_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i\times\frac{4}{3i}=\frac{8\pi}{3}$$

مهندسی مواد

۱۳ـ گزینه «۴» با توجه به متن درس، هرگاه در ضابطه‌ی $u(r,\theta)$ که قسمت حقیقیِ $f(z)$ است، به جای θ، صفر قرار دهیم و به جای r، z قرار دهیم، به ضابطه‌ی $f(z)$ می‌رسیم. البته این دستورالعمل برای توابع تحلیلی قابل استفاده است و یک ثابت مختلط هم باید به $f(z)$ اضافه کنیم.

$$u(r,\theta)=r^2\cos2\theta\xrightarrow[\theta\to0]{r\to z}f(z)=z^2\cos(0)=z^2$$

اکنون با در نظر گرفتن ثابت مختلطِ ic داریم: $\mathbf{f(z)=z^2+ic}$.

۱۴ـ گزینه «۴» برای تابع لگاریتم داریم $\log z=\operatorname{Ln}|z|+i\arg(z)$. پس داریم:

$$\operatorname{Im}(\log\frac{z-1}{z+1})=\arg(\frac{z-1}{z+1})$$

اگر $z=x+iy$ باشد:

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{x-1+iy}{x+1+iy}=\frac{x-1+iy}{x+1+iy}\times\frac{x+1-iy}{x+1-iy}=\frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2}$$

بنابراین داریم:

$$\arg(\frac{z-1}{z+1})=\arctan\frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

۱۵ـ گزینه «۱» به این سؤال در فصل مربوطه «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود.

ابتدا $f(z)$ را به کسرهای ساده تجزیه می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}=\frac{\frac{1}{2}}{z}+\frac{-1}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}}{z-2}=\frac{1}{2z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{4}(\frac{1}{1-\frac{z}{2}})$$

با توجه به این که در ناحیه‌ی $|u|<1$ داریم $\sum_{n=0}^{\infty}u^n=\frac{1}{1-u}$، و در این سؤال هم $|z|<1$ و $|\frac{z}{2}|<1$ است، بسط لورانت $f(z)$ حول $z=0$ برابر است با:

$$f(z)=\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{-1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n=\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+2}})z^n$$

۱۶ـ گزینه «۲» تابع $f(z)=\frac{z^2}{\sin z}$ دارای قطب‌های $z=\pm\pi,\pm2\pi$ داخل دایره به مرکز مبدأ و با شعاع ۸ است. دقت شود که $z=0$ یک قطب این تابع نیست، زیرا ریشه‌ی صورت هم هست و f وقتی $z\to0$ کران‌دار است. طبق قضیه مانده‌ها داریم:

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{4}\operatorname{Res}(f(z))_{z=z_j}$$

از آن جایی که این قطب‌ها، صفر صورت نیستند و صفر ساده مخرج هستند، می‌توان مانده تابع در آن‌ها را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\operatorname{Res}(f(z))_{z=z_j}=\frac{z_j^2}{\cos z_j}$$

یادآوری می‌کنیم که برای تابع $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ در قطب‌های ساده داریم: $\operatorname{Res}f=\frac{p(z)}{q'(z)}$.

بنابراین داریم:

$$\oint_C\frac{z^2}{\sin z}dz=2\pi i(\frac{\pi^2}{\cos\pi}+\frac{(-\pi)^2}{\cos(-\pi)}+\frac{(2\pi)^2}{\cos2\pi}+\frac{(-2\pi)^2}{\cos(-2\pi)})=12\pi^3 i$$

۱۷ـ گزینه «۳» با استفاده از تعریف تبدیل فوریه کسینوسی داریم:

$$\begin{cases} g(t)=\int_{0}^{\infty}G(\omega)\cos\omega t\,d\omega \\ G(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}g(t)\cos\omega t\,dt \end{cases}$$

از $\int_{0}^{\infty}g(t)\cos(tx)dt=\begin{cases}1 & , |x|<a\\ 0 & , |x|>a\end{cases}$ نتیجه می‌شود $G(\omega)=\begin{cases}\frac{2}{\pi} & , |\omega|<a\\ 0 & , |\omega|>a\end{cases}$. بنابراین داریم:

$$g(0)=\int_{0}^{\infty}G(\omega)d\omega=\int_{0}^{a}\frac{2}{\pi}d\omega=\frac{2a}{\pi}$$

۱۸ـ گزینه «۳» برای تعیین نوع معادله دیفرانسیل $au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$ باید علامت $\Delta=b^2-4ac$ مشخص گردد.

برای این مسئله:

$$\Delta=0-4xy=-4xy$$

در ناحیه $xy<0$، $\Delta>0$ و در نتیجه معادله از نوع هذلولوی است. در ناحیه $xy>0$ داریم $\Delta<0$ و بنابراین معادله از نوع بیضوی است.

۱۹ـ گزینه «۲» به این سؤال در فصل مربوطه «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

در ناحیه‌ی بین دو دایره، متغیر θ همه‌ی مقادیرش را اختیار می‌کند. همچنین شرایط مرزی داده شده، مستقل از θ هستند. در چنین حالتی جواب معادله، مستقل از θ و به شکل $u(r,\theta)=k_1 Lnr+k_2$ است. ثابت‌های k_1 و k_2 را با استفاده از شرایط مرزی محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}u(a,\theta)=A\\ u(b,\theta)=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1 Lna+k_2=A\\ k_1 Lnb+k_2=B\end{cases}$$

بنابراین با حل دستگاه فوق با استفاده از روش کرامر، k_1 و k_2 به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$k_1=\frac{\begin{vmatrix}A & 1\\ B & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}Lna & 1\\ Lnb & 1\end{vmatrix}}=\frac{A-B}{Lna-Lnb} \quad \text{و} \quad k_2=\frac{\begin{vmatrix}Lna & A\\ Lnb & B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}Lna & 1\\ Lnb & 1\end{vmatrix}}=\frac{BLna-ALnb}{Lna-Lnb}$$

مهندسی ابزار دقیق و اتوماسیون ـ مهندسی نانومواد، مهندسی شیمی ـ بیوتکنولوژی و داروسازی

سوالات ۲۰ تا ۲۷ مشترک بین مهندسی ابزاردقیق و اتوماسیون و مهندسی شیمی ـ بهداشت، محیط زیست می‌باشد.

۲۰ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. از آن‌جایی که $f(x)$ تابعی زوج است، انتگرال فوریه آن کسینوسی است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(x)=\int_{0}^{\infty}a(\omega)\cos(\omega x)d\omega \\ a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos(\omega x)dx \end{cases}$$

$9-x^2$	$\cos\omega x$
$-2x$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$
-2	$-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x$
0	$-\frac{1}{\omega^3}\sin\omega x$

حال $a(\omega)$ را به دست می‌آوریم:

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{3}(9-x^2)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\Big[\frac{9-x^2}{\omega}\sin\omega x-\frac{2x}{\omega^2}\cos\omega x+\frac{2}{\omega^3}\sin\omega x\Big]_0^3=\frac{2}{\pi}\Big[\frac{-6}{\omega^2}\cos 3\omega+\frac{2}{\omega^3}\sin 3\omega\Big]=\frac{4}{\pi}\Big[\frac{\sin 3\omega-3\omega\cos 3\omega}{\omega^3}\Big]$$

۲۱ـ گزینه «۴» با جایگذاری $u(x,y)=F(x)G(y)$ در این معادله دیفرانسیل داریم:

$$8u_x+6u_y=2(x+y)u\Rightarrow 4F'(x)G(y)+3F(x)G'(y)=(x+y)F(x)G(y)\Rightarrow 4\frac{F'(x)}{F(x)}+3\frac{G'(y)}{G(y)}=x+y$$

در نتیجه داریم $\frac{4F'(x)}{F(x)}-x=y-\frac{3G'(y)}{G(y)}$. سمت چپ برحسب x و سمت راست برحسب y است. بنابراین تساوی آن‌ها نشان می‌دهد که یک مقدار ثابت هستند. این مقدار ثابت را k می‌نامیم.

$$\frac{4F'(x)}{F(x)}-x=y-\frac{3G'(y)}{G(y)}=k$$

برای یافتن $F(x)$ باید معادله‌ی دیفرانسیل $\frac{۴F'(x)}{F(x)} = x+k$ را حل کنیم. با انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$۴LnF(x) = \frac{x^۲}{۲} + kx + c \Rightarrow LnF(x) = \frac{x^۲}{۸} + \frac{k}{۴}x + ۴c \Rightarrow F(x) = e^{\frac{x^۲}{۸}+\frac{k}{۴}x+۴c}$$

به ازای $c = ۰$ داریم: $\mathbf{F(x) = e^{\frac{۱}{۸}(x^۲+۲kx)}}$.

۲۲ـ گزینه «۱» با توجه به شکل این معادله، معادله‌ی مشخصه آن به صورت مقابل است:

$$A(\frac{dy}{dx})^۲ - ۲B(\frac{dy}{dx}) + C = ۰ \qquad (۱)$$

از طرفی با تغییر متغیرهای $V = y$ و $Z = xy$ این معادله به فرم کانونی در می‌آید. بنابراین معادله مشخصه آن برابر است با:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = ۰ \\ xdy + ydx = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = ۰ \end{cases} \Rightarrow (\frac{dy}{dx})^۲ + (\frac{y}{x})\frac{dy}{dx} = ۰ \qquad (۲)$$

با مقایسه (۱) و (۲) داریم:

$$A = ۱ \ , \ ۲B = -\frac{y}{x} \ , \ C = ۰$$

پس شکل معادله به صورت مقابل است:

$$u_{xx} - \frac{y}{x}u_{xy} = ۰ \Rightarrow xu_{xx} - yu_{xy} = ۰$$

۲۳ـ گزینه «۱» چنانچه $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد، آن‌گاه مشتق آن در $z_۰$ برابر است با:

$$f'(z_۰) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow f'(z_۰) = (-۲y+۲) + i(۲x)$$

در نقطه $z_۰ = i$، داریم $x = ۰$ و $y = ۱$ پس: $f'(i) = (-۲\times۱+۲) + i(۲\times۰) = ۰$.

۲۴ـ گزینه «۲» با استفاده از بسط لورانت تابع نمایی داریم:

$$f(z) = (z^۲ - ۵z + ۶)e^{\frac{۱}{z-۲}} = [(z-۲)^۲ - (z-۲)]\times[۱ + (z-۲)^{-۱} + \frac{(z-۲)^{-۲}}{۲!} + \frac{(z-۲)^{-۳}}{۳!} + \cdots]$$

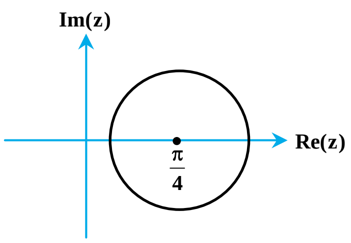
بنابراین ضریب $(z-۲)^{-۱}$ در بسط لورانت $f(z)$، یا به زبانی دیگر مانده $f(z)$ در $z = ۲$ برابر است با:

$$\frac{۱}{۳!} - \frac{۱}{۲!} = \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۳}$$

۲۵ـ گزینه «۳» اگر z نقطه ثابت $f(z)$ باشد، $f(z) = z$. بنابراین داریم:

$$\frac{z+۲+۲i}{(۱-i)z-۱-۲i} = z \Rightarrow (۱-i)z^۲ - (۱+۲i)z = z + ۲(۱+i) \Rightarrow z^۲ - ۲iz - ۲i = ۰ \Rightarrow z = i \pm \sqrt{-۱+۲i}$$

۲۶ـ گزینه «۱» با توجه به قضیه مانده‌ها داریم:



$$a_۲ = \frac{۱}{۲\pi i}\oint_c \frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{۴})^۳}dz$$

که $a_۲$ برابر ضریب جمله $(z-\frac{\pi}{۴})^۲$ در بسط تیلور تابع $\cos z$ حول $z = \frac{\pi}{۴}$ است. این ضریب برابر است با:

$$a_۲ = \frac{۱}{۲!}f''(z)\Big|_{z=\frac{\pi}{۴}} = -\frac{۱}{۲}\cos(\frac{\pi}{۴}) = -\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین انتگرال فوق برابر است با:

$$۲\pi i \times a_۲ = -\frac{\pi i}{\sqrt{۲}}$$

۲۷ـ گزینه «۴» $z = x + iy$ را در عبارت نگاشت جایگذاری می‌کنیم:

$$w = \frac{۱}{۱-z} = \frac{۱}{۱-x-iy}\times\frac{۱-x+iy}{۱-x+iy} \Rightarrow w = \frac{۱-x+iy}{(۱-x)^۲+y^۲}$$

با جایگذاری $w = u + iv$ داریم:

$$\begin{cases} u = \frac{۱-x}{(۱-x)^۲+y^۲} \xrightarrow{x<۱} u > ۰ \\ v = \frac{y}{(۱-x)^۲+y^۲} \end{cases}$$

v می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در نتیجه گزینه (۴) درست است.

توضیح: البته با روش نقطه‌گذاری و به روش ذهنی راحت می‌توان جواب را تعیین کرد. سعی کنید انجام دهید!

سؤالات ۲۸ تا ۳۷ مشترک بین مهندسی نانو مواد ومهندسی بیوتکنولوژی و داروسازی می‌باشد.

۲۸ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. نگاشت را به صورت $w=\frac{z}{1-z}=\frac{-(1-z)+1}{1-z}=\frac{1}{1-z}-1$ می‌نویسیم. اگر $w=u+iv$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$u+iv=\frac{1}{1-x-iy}-1=\frac{1}{1-x-iy}\times\frac{1-x+iy}{1-x+iy}-1=\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\Rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2}-1=\dfrac{1-x-(1-x)^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}\\ v=\dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}\end{cases}$$

به ازای $x=\frac{1}{2}$ و $y=0$ داریم $u>0$ و به ازای $x=\frac{1}{2}$ و $y=1$ داریم $u<0$، بنابراین تابع u محدودیت علامت ندارد. مخرج تابع v همواره مثبت است و از آن‌جایی که y هم محدودیت علامت ندارد، بنابراین تابع v نیز محدودیت علامت ندارد، پس هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیستند.

۲۹ـ گزینه «۲» می‌دانیم که $u=2x(y+3)$ است. پس داریم $u_x=2y+6$ و $u_y=2x$. ضابطه‌ی v از این فرمول قابل محاسبه است:

$$v=\int u_x dy-\int[\text{عبارتی که از حذف جملات شامل } y \text{ از } u_y \text{ حاصل می‌شود}]dx=\int(2y+6)dy-\int 2x dx=\mathbf{y^2+6y-x^2+c}$$

۳۰ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز $1+3i$، می‌توان z را به صورت پارامتری بر حسب زاویه θ نشان داد:

$$z(\theta)=1+3i+2e^{i\theta}\quad,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

در نتیجه: $\bar{z}=1-3i+2e^{-i\theta}$ و بنابراین $d\bar{z}=-2ie^{-i\theta}d\theta$.

همچنین $f(z)=z-3i=1+2e^{i\theta}$ است و مقدار انتگرال مسئله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\oint_C f(z)d\bar{z}=\int_0^{2\pi}(1+2e^{i\theta})(-2ie^{-i\theta})d\theta=-2i\int_0^{2\pi}(e^{-i\theta}+2)d\theta=-2i[ie^{-i\theta}+2\theta]_0^{2\pi}=-8\pi i$$

۳۱ـ گزینه «۴» ابتدا $f(z)$ را به مجموع کسرهای ساده تجزیه می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{4-3z}{z(1-z)(2-z)}=\frac{2}{z}+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2-z}$$

در ناحیه‌ی $2<|z|<\infty$ خواهیم داشت $|\frac{2}{z}|<1$ و $|\frac{1}{z}|<1$ بنابراین کسرها را به این صورت برای نوشتن سری لوران آماده می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)$$

می‌دانیم که اگر $|u|<1$ باشد، داریم: $\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n$. بنابراین داریم:

$$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}=\frac{2}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2^n}{z^{n+1}}$$

اگر اولین جمله‌ی سری را خارج کنیم، خواهیم داشت:

$$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{2}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{z^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{z^{n+1}}$$

۳۲ـ گزینه «۱» به این سؤال در فصل مربوطه «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

از قضیه پارسوال برای حل این سؤال استفاده می‌کنیم. طبق این قضیه داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=2\frac{\pi^2}{4}+\frac{16}{\pi^2}(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots)$$

اگر مقدار مطلوب مسئله را A بنامیم، آن‌گاه از تساوی فوق و با حل انتگرال داریم:

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{(-\pi^3)}{3}\right)=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}(1+A)\Rightarrow\frac{16}{\pi^2}(1+A)=\frac{2\pi^2}{3}-\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi^2}{6}\Rightarrow A=\frac{\pi^4}{96}-1=\frac{\pi^4-96}{96}$$

۳۳ـ گزینه «۱» کافیست ضریب $\sin 4x$ در سری فوریه‌ی تابع $y = 3x^2$ را در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ پیدا کنیم. اگر این ضریب را b_4 بنـامیم، ضـریب $\sin 4x$ در سری فوریه‌ی $f(x)$ برابر است با $1+b_4$. برای محاسبه‌ی b_4 با توجه به زوج بودن $y = 3x^2$ داریم: $b_4 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3x^2 \sin 4x \, dx$ با کمـک جـدول جـزء بـه جزء خواهیم داشت:

$3x^2$	$\sin 4x$
$6x$	$-\frac{1}{4}\cos 4x$
6	$-\frac{1}{16}\sin 4x$
0	$\frac{1}{64}\cos 4x$

$$\Rightarrow b_4 = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{3}{4}x^2 \cos 4x + \frac{6}{16} x \sin 4x + \frac{6}{64}\cos 4x\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{3\pi}{2}$$

بنابراین جواب برابر است با:

$$1 + b_4 = 1 - \frac{3\pi}{2} = \frac{2 - 3\pi}{2}$$

۳۴ـ گزینه «۳» از آن‌جایی که تابع $f(x)$ زوج است، تبدیل فوریه کسینوسی آن برابر با تبدیل فوریه مختلط آن است. همچنین $xf(x)$ تابعی فرد است و بنابراین تبدیل فوریه سینوسی آن برابر با i برابر تبدیل فوریه مختلط آن است. با استفاده از خواص سری فوریه مختلط داریم:

$$F\{xf(x)\} = -\frac{\partial}{\partial \omega}[F\{f(x)\}] \Rightarrow F\{xf(x)\} = -\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a} \times \frac{-2\omega}{4a^2} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} = \frac{\omega\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$$

۳۵ـ گزینه «۲» به این سؤال در فصل مربوطه «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

روش اول: از روش تفکیک متغیرها استفاده می‌کنیم. اگر $u = f(x)g(y)$ آن‌گاه داریم: $u_{xy} = u_x \Rightarrow f'(x)g'(y) = f'(x)g(y)$

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) $f'(x) = 0$، در این حالت $f(x) = c$ به ازای هر $g(y)$، معادله فوق برآورده می‌شود. در نتیجه جواب را می‌توان به صورت مقابل نوشت: $u_1 = g(y)$

ب) $f'(x) \neq 0$، در این حالت می‌توان طرفین معادله را بر $f'(x)$ تقسیم نمود: $g'(y) = g(y) \Rightarrow g(y) = e^y \Rightarrow u_2 = f(x)e^y$

از آن‌جایی که معادله همگن است، می‌توان جواب نهایی را به صورت مجموع دو جواب فوق نوشت: $u(x,y) = f(x)e^y + g(y)$

روش دوم: با این فرض که $u_{xy} = u_{yx}$ باشد، می‌توان معادله را چنین حل کرد: $u_{yx} - u_x = 0 \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری نسبت به } x} u_y - u = h(y)$

این یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول نسبت به y است. عامل انتگرال‌ساز $\mu = e^{-\int dy} = e^{-y}$ است. و جواب عمومی برابر است با:

$$u(x,y) = \frac{\int h(y)e^{-y}dy + f(x)}{e^{-y}} = e^y \int h(y)e^{-y}dy + e^y f(x)$$

اگر حاصلِ $e^y \int h(y)e^{-y}dy$ را به صورت $g(y)$ نمایش دهیم، فرم جواب به صورت $u = g(y) + e^y f(x)$ خواهد بود.

۳۶ـ گزینه «۳» با توجه به شکل این معادله، معادله مشخصه آن به صورت مقابل خواهد بود:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، تغییر متغیرهای $v = y - 3x$ و $z = y - 5x$ این معادله را به شکل کانونی در می‌آورند. پس معادله مشخصه برابر خواهد بود با:

$$\left(\frac{dy}{dx} - 5\right)\left(\frac{dy}{dx} - 3\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 8\frac{dy}{dx} + 15 = 0 \qquad (2)$$

از برابر قرار دادن (۱) و (۲)، $B = 4$ به دست می‌آید.

۳۷ـ گزینه «۱» با توجه به فرمول دالامبر برای این سؤال داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]+\frac{1}{2}[G^*(x+ct)-G^*(x-ct)]$$

در این سؤال $G(x)=0$ و لذا کافیست حاصل کروشه‌ی اول حساب شود، با توجه به صورت سؤال می‌دانیم $f(x)=\sin x$ و با توجه به این که $c=2$ است، داریم:

$$u(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}[f^*(\frac{\pi}{2}+2\times\frac{\pi}{2})+f^*(\frac{\pi}{2}-2\times\frac{\pi}{2})]=\frac{1}{2}[f^*(\frac{3\pi}{2})+f^*(-\frac{\pi}{2})]$$

اما دقت کنید محدوده‌ی x بین 0 تا π است، اما ما اینجا $f(\frac{3\pi}{2})$ داریم، پس باید با استفاده از دوره تناوب محدوده را تغییر دهیم.

دوره تناوب برای این سؤال $T=2\pi$ است، لذا داریم:

$$u(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}[f^*(2\pi-\frac{\pi}{2})+f^*(-\frac{\pi}{2})]=\frac{1}{2}[f^*(-\frac{\pi}{2})+f^*(-\frac{\pi}{2})]=f^*(-\frac{\pi}{2})$$

چون گسترش f فرد است، پس $f(-\frac{\pi}{2})=-f(\frac{\pi}{2})$ لذا داریم:

$$u(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=-f(\frac{\pi}{2})=-\sin(\frac{\pi}{2})=-1$$

ابزار دقیق و اتوماسیون

۳۸ـ گزینه «۳» به این سؤال در فصل مربوطه «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

با توجه به شکل سری فوریه می‌توان دریافت که تابع $f(x)$ با دوره تناوب π بسط یافته است. طبق اتحاد پارسوال داریم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)dx=2(a_0)^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$$

طرف سمت چپ تساوی بالا برابر است با:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{\pi}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^{\pi}=1$$

اگر $A=\frac{1}{3^2\times 5^2}+\frac{1}{5^2\times 7^2}+\cdots$ باشد، آن‌گاه از اتحاد پارسوال داریم:

$$1=2(\frac{2}{\pi})^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2}\times\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{8}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}(\frac{1}{9}+A)\Rightarrow A+\frac{1}{9}=\frac{\pi^2}{16}\times(\frac{\pi^2-8}{\pi^2})=\frac{\pi^2-8}{16}\Rightarrow A=\frac{9\pi^2-88}{144}$$

۳۹ـ گزینه «۴» به این سؤال در فصل مربوطه «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

از روش تفکیک متغیرها استفاده می‌کنیم. اگر $u=F(x)T(t)$ باشد، آن‌گاه:

$$\frac{T''}{T}=9\frac{F''}{F}=-\lambda$$

می‌دانیم که به ازای $\lambda>0$ به جواب‌های ویژه خواهیم رسید.

با توجه به تساوی‌های فوق داریم:

$$\begin{cases}F=A\sinh(\frac{\sqrt{\lambda}}{3}x)+B\cosh(\frac{\sqrt{\lambda}}{3}x)\\ T=C\sinh(\sqrt{\lambda}t)+D\cosh(\sqrt{\lambda}t)\end{cases}$$

از شرط مرزی $u(x,0)=\sinh x$ خواهیم داشت $\sqrt{\lambda}=3$ و $B=0$ و از شرط مرزی $u_t(x,0)=\cosh\frac{x}{6}$ خواهیم داشت $\sqrt{\lambda}=\frac{1}{2}$ و $A=0$. مشاهده می‌گردد که این دو شرط مرزی در حل با تفکیک متغیرها نمی‌توانند همزمان برقرار باشند. بنابراین جمله‌های تابع t را طوری تعیین می‌کنیم که این دو شرط به صورت همزمان برقرار شوند:

$$u=\sinh x\cosh(3t)+D\cosh(\frac{x}{6})\sinh(\frac{t}{2})$$

با استفاده از شرط مرزی $u_t(x,0)=\cosh(\frac{x}{6})$ مقدار $D=2$ به دست می‌آید.

۴۰ـ گزینه «۲» به این سؤال در فصل مربوطه «حل تست‌ها بدون دخالت دست و خودکار (روش رد گزینه‌ها)» به روش تستی و بدون حل پاسخ داده شده است. با وجود این، حل تشریحی نیز ارائه می‌شود:

قدرمطلق w برابر است با:

$$|w|^2=(\frac{1-t^2}{1+t^2})^2+(\frac{2t}{1+t^2})^2=\frac{1+t^4-2t^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1$$

۴۱ـ گزینه «۳» تابع لگاریتم مختلط در نقاطی که حقیقی و غیر مثبت باشند، تحلیلی نیست. پس داریم:

$$iz^{۲}+۲-i \xrightarrow{z=x+iy} i(x^{۲}-y^{۲}+۲xyi)+۲-i=۲(۱-xy)+i(x^{۲}-y^{۲}-۱)$$

برای آن که این عدد مختلط حقیقی و غیر مثبت باشد، لازم است روابط زیر را داشته باشیم:

$$\begin{cases}۱-xy\le ۰\\ x^{۲}-y^{۲}-۱=۰\end{cases} \Rightarrow \text{نقاط غیر تحلیلی}:\{(x,y)\in R^{۲}\mid xy\ge ۱\,,\ x^{۲}-y^{۲}=۱\}$$

۴۲ـ گزینه «۴» با تجزیه کسری $f(z)$ داریم:

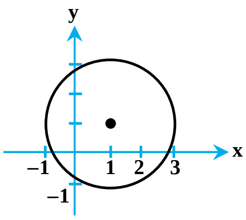
$$f(z)=\frac{۳}{۲+z-z^{۲}}=\frac{۳}{(۲-z)(z+۱)}=\frac{۱}{۲-z}+\frac{۱}{z+۱}=\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۱-\frac{z}{۲}}+\frac{۱}{z}\frac{۱}{۱+\frac{۱}{z}}$$

در ناحیه‌ی $۱<|z|<۲$ داریم: $\frac{۱}{۲}<|\frac{۱}{z}|<۱$ و $\frac{۱}{۲}<|\frac{z}{۲}|<۱$، بنابراین سری لورانت هر کدام از کسرها را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(z)=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{z}{۲})^{n}+\frac{۱}{z}\sum_{n=۰}^{\infty}(-\frac{۱}{z})^{n}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{z^{n}}{۲^{n+۱}}+\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{z^{n+۱}}$$

۴۳ـ گزینه «۳» با استفاده از اتحادها معادله این دایره به صورت $(x-۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۴$ نوشته می‌شود.

دایره‌ای به مرکز $(۱,۱)$ و شعاع ۲ است.



$$|e^{z}|=|e^{x}e^{iy}|=|e^{x}|.|e^{iy}|=e^{x}$$

از آن جایی که $-۱\le x<۳$ است، پس داریم:

$$e^{-۱}<e^{x}<e^{۳}$$

۴۴ـ گزینه «۳» از ریشه‌های مخرج، فقط $z_{۰}=i\frac{\pi}{۲}$ درون مرز C قرار می‌گیرد. با در نظر گرفتن $f(z)=\frac{\sinh z}{z+i\frac{\pi}{۲}}$ و با استفاده از فرمولِ انتگرال کوشی، خواهیم داشت:

$$\oint_{C}\frac{\sinh z}{(z-i\frac{\pi}{۲})(z+i\frac{\pi}{۲})}dz=\oint_{C}\frac{f(z)}{z-i\frac{\pi}{۲}}dz=۲\pi i f(i\frac{\pi}{۲})$$

حالا مقدار $f(i\frac{\pi}{۲})$ را حساب می‌کنیم:

$$f(i\frac{\pi}{۲})=\frac{\sinh(i\frac{\pi}{۲})}{i\frac{\pi}{۲}+i\frac{\pi}{۲}}=\frac{i\sin(\frac{\pi}{۲})}{i\pi}=\frac{i}{i\pi}=\frac{۱}{\pi}$$

بنابراین مقدار انتگرال برابر است با:

$$\oint_{C}\frac{f(z)}{z-i\frac{\pi}{۲}}=۲\pi i\times\frac{۱}{\pi}=۲i$$

مهندسی نانو مواد

۴۵ـ گزینه «۳» این انتگرال را با استفاده از قضیه مانده‌ها برای تابع $f(z)=\frac{\sin(z^{۲})}{(z^{۲}+\pi)(z^{۲}+\frac{\pi}{۲})}$ در نیم‌صفحه $\text{Im}(z)>۰$ محاسبه می‌کنیم. تنها نقطه تکین $f(z)$ در این نیم‌صفحه $z=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}i$ است. دقت شود که $z=\sqrt{\pi}\,i$ یک نقطه تکین رفع شدنی برای $f(z)$ است، بنابراین در محاسبه انتگرال نقشی ندارد، لذا داریم:

$$\text{Res}(f(z))\Big|_{z=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}i}=(z-\sqrt{\frac{\pi}{۲}}i)f(z)\Big|_{z=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}i}=\frac{\sin(-\frac{\pi}{۲})}{(\sqrt{\frac{\pi}{۲}}i+\sqrt{\frac{\pi}{۲}}i)(-\frac{\pi}{۲}+\pi)}=\frac{-۱}{\pi\sqrt{\frac{\pi}{۲}}i}$$

در نتیجه مقدار انتگرال برابر است با:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x^{۲})dx}{(x^{۲}+\pi)(x^{۲}+\frac{\pi}{۲})}=۲\pi i\times\text{Res}(f(z))\Big|_{z=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}i}=۲\pi i\times\frac{-۱}{\pi\sqrt{\frac{\pi}{۲}}i}=\frac{-۲\sqrt{۲}}{\sqrt{\pi}}$$

۴۶ـ گزینه «۴» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: $z=0$ یک نقطه تکین مرتبه ۲ برای $f(z)=\frac{e^z}{1-\cos z}$ است. ابتدا سری تیلور $\cos z$ را در $f(z)$ جایگذاری می‌کنیم: $f(z)=\frac{e^z}{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots}$

طبق تعریف، مانده $f(z)$ در $z=0$ برابر است با:

$$\operatorname{Res}(f(z))\Big|_{z=0}=(z^2f(z))'_{z=0}=\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\cdots}\right)\Bigg|_{z=0}=\frac{e^z(\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\cdots)-e^z(-\frac{2z}{4!}+\frac{4z^3}{6!}-\cdots)}{(\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\cdots)^2}\Bigg|_{z=0}=\frac{1\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2}}=2$$

روش دوم: برای محاسبه مانده، روش راحت‌تری نیز وجود دارد، دقت کنید $z=0$ یک صفر مرتبه دوم برای تابع $h(z)=1-\cos z$ و در نتیجه یک قطب مرتبه دوم برای تابع $f(z)=\frac{e^z}{1-\cos z}$ است، قبل از ادامه حل، به دلیل اینکه چرا $z=0$ صفر مرتبه دوم تابع $h(z)=1-\cos z$ است، اشاره می‌کنیم:

$$h'(z)=\sin z\ \Rightarrow h'(0)=\sin(0)=0 \qquad \text{و} \qquad h''(z)=\cos z\ \Rightarrow h''(0)=\cos(0)=1$$

چون مشتق دوم مخالف صفر شد، پس $z=0$ صفر مرتبه دوم است.

$$(\text{مانده در } z=0)=\lim_{z\to 0}[(z-0)^2(\frac{e^z}{1-\cos z})]'=\lim_{z\to 0}(\frac{z^2e^z}{1-\cos z})'=\lim_{z\to 0}(\frac{z^2e^z}{\frac{z^2}{2}})'=\lim_{z\to 0}(2e^z)'=2$$

۴۷ـ گزینه «۲» با استفاده از تعریف تبدیل فوریه سینوسی برای یک تابع فرد داریم:

$$\begin{cases}\int_0^\infty f(\omega)\sin\omega x\,d\omega=g(x)=\begin{cases}3x-1 & , \quad 0\le x\le 2\\ 0 & , \quad x>2\end{cases}\\ f(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(x)\sin\omega x\,dx\end{cases}$$

بنابراین $f(\omega)$ برابر است با:

$$f(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^2(3x-1)\sin\omega x\,dx\ \underset{\text{روش جزء به جزء}}{=}\ \frac{2}{\pi}\{-\frac{1}{\omega}(3x-1)\cos\omega x\Big|_0^2+\int_0^2\frac{3}{\omega}\cos\omega x\,dx\}=\frac{2}{\pi}[-\frac{5}{\omega}\cos 2\omega-\frac{1}{\omega}+\frac{3}{\omega^2}\sin 2\omega]$$

$$=\frac{-10}{\pi\omega}\cos 2\omega+\frac{6}{\pi\omega^2}\sin 2\omega-\frac{2}{\pi\omega}$$

۴۸ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. برای حل این معادله مشتقات پاره‌ای درجه اول از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم. طبق این روش داریم:

$$\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{x}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{y}\ \Rightarrow \operatorname{Ln}y=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}x+k\ \Rightarrow y=e^kx^{\frac{1}{2}}\ \Rightarrow \frac{y^2}{x}=c_1\\ \frac{dx}{2x}=\frac{du}{x}\ \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow u=\frac{1}{2}x+c_2\end{cases}$$

در تساوی اول $c_1=e^{2k}$ است. پس داریم $\frac{y^2}{x}=c_1$ و $u-\frac{1}{2}x=c_2$ که c_1 و c_2 اعداد ثابت هستند. با فرضِ $\eta=\frac{y^2}{x}$ و $\xi=u-\frac{1}{2}x$ جواب معادله می‌تواند به شکل $\xi=h(\eta)$ باشد. یعنی $u-\frac{1}{2}x=h(\frac{y^2}{x})$ بنابراین داریم: $\mathbf{u=\frac{1}{2}x+h(\frac{y^2}{x})}$

که h تابعی دلخواه است. هیچکدام از گزینه‌ها به شکل $\frac{1}{2}x+h(\frac{y^2}{x})$ نیستند.

توضیح: اگر صورت سؤال به شکل $2xu_x+2yu_y=x$ تصحیح شود گزینه (۱) درست خواهد بود.

۴۹ـ گزینه «۲» از روش تفکیک متغیرها برای حل این معادله استفاده می‌کنیم. اگر $u = F(x)T(t)$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$u_{xt} = -\sin t \Rightarrow F'T' = -\sin t \Rightarrow F' = -\frac{\sin t}{T'} = k$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} F' = k \Rightarrow F = kx + a \\ \dfrac{-\sin t}{T'} = k \Rightarrow T = \dfrac{1}{k}\cos t + b \end{cases}$$

با استفاده از شرایط مرزی مسئله داریم:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \Rightarrow a = 0 \\ u(x,0) = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{k} \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = kx(\frac{1}{k}\cos t - \frac{1}{k}) = x(\cos t - 1)$$

مهندسی معماری کشتی

۵۰ـ گزینه «۱» از نمایش قطبی اعداد مختلط برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم:

$$w = -1+i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} \Rightarrow z = w^7 = (-1+i)^7 = u^7 = (\sqrt{2})^7 e^{\frac{21\pi}{4}i} = 8\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} = 8\sqrt{2}(-1-i)\frac{\sqrt{2}}{2} = 8(-1-i) = -8(1+i)$$

توضیح در مورد محاسبات فوق: توجه کنید که $\frac{21\pi}{4} = 4\pi + \frac{5\pi}{4}$ است.

۵۱ـ هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. اگر تابع v مزدوج همساز u باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$v(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dy + \int (\text{عبارتی که با حذف جملات شامل } y \text{ از } -\frac{\partial u}{\partial y} \text{ به دست می‌آید})dx = \int -6xydy + \int 3x^2dx = -3xy^2 + x^3 + c$$

پس هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست! به نظر می‌رسد که در گزینه (۳) علامت منفی جمله $3xy^2$ افتاده است.

۵۲ـ گزینه «۴» با در نظر گرفتن $z = 2e^{i\theta}$ داریم:

$$w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = e^{i\theta} + \frac{1}{4}e^{-i\theta}$$

فرض می‌کنیم $w = u + iv$. بنابراین داریم:

$$u + iv = \cos\theta + \frac{1}{4}\cos\theta + i(\sin\theta - \frac{1}{4}\sin\theta) = \frac{5}{4}\cos\theta + i\frac{3}{4}\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{5}{4}\cos\theta \\ v = \dfrac{3}{4}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow (\frac{4u}{5})^2 + (\frac{4v}{3})^2 = 1$$

معادله فوق، معادله یک بیضی است که شعاع آن در راستای محور u برابر با $\sqrt{\frac{5}{4}}$ و در راستای محور v برابر با $\sqrt{\frac{3}{4}}$ است. پس قطر بزرگ آن در راستای محور u است.

مهندسی نفت

۵۳ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. تابع $f(x)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ ناپیوسته است. طبق قضیه دیریکله، در این نقطه مقدار سری فوریه برابر است با:

$$\frac{f(\frac{\pi^-}{2}) + f(\frac{\pi^+}{2})}{2} = \frac{f(+\frac{\pi}{2}) + f(-\frac{\pi}{2})}{2}$$

طبق صورت سؤال $L = \pi$ است بنابراین $T = 2\pi$ خواهد بود در نتیجه داریم:

$$f(\frac{\pi^+}{2}) = f((\frac{\pi}{2} - 2\pi)^+) = f(-\frac{3\pi^+}{2})$$

اما طراح سؤال در مورد ضابطه‌ی f در $-\frac{3\pi}{2}$ هیچ اطلاعی نداده است. حالا فرض کنیم اشتباه تایپی رخ داده است و منظور طراح سؤال $T = 2L = \pi$ بوده است. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi^4}{8} + \dfrac{3\pi}{2} - 1 \\ f(-\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi^4}{8} - \dfrac{3\pi}{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) + f(-\frac{\pi}{2}) = 2(\frac{\pi^4}{8} - 1)$$

بنابراین مقدار سری فوریه در $x = \frac{\pi}{2}$ برابر است با:

$$\frac{\pi^4}{8} - 1 = \frac{\pi^4 - 8}{8}$$

توضیح: در صورت اصلاح گزینه‌ها، گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

۵۴ــ گزینه «۱» بر اساس فرمول دالامبر معادله‌ی موج چون $g(x)=0$، لذا داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)] \Rightarrow u(7,11)=\frac{1}{2}[f^*(7+2\times 11)+f^*(7-2\times 11)]=\frac{1}{2}[f^*(29)+f^*(-15)]$$

در این مرحله باید توجه کنید، چون محدوده‌ی x بین 0 تا 12 است، و ما در این سؤال $f(29)$ و $f(-15)$ داریم، باید با استفاده از دوره تناوب به محدوده‌ی موردنظر برسیم، چون دوره تناوب $2\times 12=24$ است، لذا داریم:

$$u(7,11)=\frac{1}{2}[f^*(24+5)+f^*(-24+9)]=\frac{1}{2}[f^*(5)+f^*(9)]=\frac{1}{2}[(5-1)+(9-1)]=6$$

۵۵ــ گزینه «۲» طبق تعریف سری فوریه کسینوسی برای تابع زوج f با دوره تناوب 2π داریم:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

بنابراین داریم:

$$I=\int_0^{\pi} f(x)(1+\cos 3x)dx=\int_0^{\pi} f(x)dx+\int_0^{\pi} f(x)\cos(3x)dx=\frac{\pi}{2}(a_3+a_0)$$

ضرایب سری فوریه f برابرند با:

$$\begin{cases} a_0=2\times\frac{1}{2}=1 \\ a_n=\dfrac{1}{3n^2+1} \Rightarrow a_3=\dfrac{1}{3\times 9+1}=\dfrac{1}{28} \end{cases} \Rightarrow I=\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{28})=\frac{29}{56}\pi$$

۵۶ــ گزینه «۲» با بسط توابع نمایی و کسینوسی حول $z=0$ داریم:

$$f(z)=ze^z\cos(\frac{1}{z})=z(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots)(1-\frac{z^{-2}}{2!}+\frac{z^{-4}}{4!}-\cdots)=(z+z^2+\frac{z^3}{2!}+\cdots)(1-\frac{z^{-2}}{2!}+\frac{z^{-4}}{4!}-\cdots)$$

مانده $f(z)$ حول $z=0$ برابر ضریب z^{-1} در سری لوران آن است. بنابراین داریم:

$$\operatorname{Res}(f(z))\Big|_{z=0}=-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!4!}-\frac{1}{4!6!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(2n-2)!}$$

۵۷ــ گزینه «۳» سؤال را به دو روش پاسخ می‌دهیم:

روش اول: با توجه به شرط $-\frac{3\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ ما از تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ برای $-\pi\le\theta\le 0$ استفاده می‌کنیم. به ازای $z=-1$ داریم $\theta=-\pi$ و به ازای $z=1$ داریم $\theta=0$.

$$\int_{-1}^{1}(2z+Lnz)dz=\int_{-\pi}^{0}(2e^{i\theta}+i\theta)ie^{i\theta}d\theta=\int_{-\pi}^{0}(2ie^{2i\theta}-\theta e^{i\theta})d\theta=(e^{2i\theta}+i\theta e^{i\theta}-e^{i\theta})\Big|_{-\pi}^{0}=(1-1-1-i\pi-1)=-i\pi-2$$

روش دوم: می‌دانیم که تابع $f(z)=2z+Lnz$ دارای تابع اولیه‌ای به صورت مقابل است:

$$F(z)=\int(2z+Lnz)dz=z^2+z(Lnz-1)+c$$

برای حل انتگرال $\int Lnzdz$ از جزء به جزء استفاده کرده‌ایم. حال از آنجا که شاخه‌ی اصلی لگاریتم را با شرط $-\frac{3\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ داریم در نقطه‌ی $z=1$ داریم $\theta=0$ و در $z=-1$ داریم $\theta=-\pi$. با جایگذاری کران‌ها داریم:

$$\int_{-1}^{1}f(z)dz=(z^2+z(Lnz-1))\Big|_{-1}^{1}=Ln(1)+Ln(-1)-2=-i\pi-2$$
